

УДК 532.591+517.948

## ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается кинетическая модель движения несжимаемых пузырьков в идеальной жидкости с учетом их коллективного взаимодействия в случае одной пространственной переменной. Найдены обобщенные характеристики и характеристическая форма уравнений. Сформулированы необходимые и достаточные условия гиперболичности интегродифференциальной модели разреженного пузырькового течения. Построены точные решения кинетического уравнения в классе бегущих волн. Получено решение линеаризованного уравнения.

Ключевые слова: пузырьковая жидкость, кинетические уравнения, гиперболичность.

**Введение.** В последнее время в ряде работ [1–5] развивается кинетический подход к изучению потенциального движения идеальной жидкости с пузырьками газа, основанный на статистическом описании взаимодействия большого числа пузырьков. Полученные уравнения, учитывающие эффекты коллективного взаимодействия пузырьков, по структуре близки к уравнению Власова, хорошо известному в физике плазмы. При выводе кинетических моделей используется система гамильтоновых обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая движение отдельных пузырьков. Для получения данной системы уравнений необходимо знать кинетическую энергию жидкости, представимую в виде квадратичной формы от скоростей пузырьков:  $T = 2^{-1} \sum_{i,j} \mathbf{u}_i^T A_{ij} \mathbf{u}_j$  ( $\mathbf{u}_i$  — скорость

$i$ -го пузырька) [6], коэффициенты которой определяются потенциалом течения жидкости в области между пузырьками. В предположении о том, что все пузырьки являются сферическими невесомыми постоянного радиуса, путем асимптотического разложения решения уравнения Лапласа по малому параметру (отношению радиуса пузырьков к среднему расстоянию между ними) кинетическая энергия  $T$  и гамильтониан  $H = 2^{-1} \sum_{i,j} \mathbf{p}_i^T B_{ij} \mathbf{p}_j$

( $\mathbf{p}_i = \partial T / \partial \mathbf{u}_i$  — обобщенный импульс  $i$ -го пузырька), определяющий движение пузырьков, приближенно вычислены для разреженной пузырьковой среды Д. Руссо и П. Смерекой [3]. С использованием системы гамильтоновых уравнений для координат и импульсов пузырьков и метода вывода уравнения Власова в работе [3] получено кинетическое уравнение, описывающее эволюцию одночастичной функции распределения. Исследованию характеристических свойств, нахождению симметрий и законов сохранения, построению точных решений одномерной модели Руссо — Смереки посвящены работы [7, 8]. Кинетическая модель движения сжимаемых пузырьков в жидкости предложена В. М. Тешуковым [5].

К недостаткам модели Руссо — Смереки можно отнести то, что вычисленный приближенно гамильтониан  $H$  системы уравнений не является знакоопределенной функцией. Работа Г. Херреро, Б. Ликуин-Десре, Б. Пертама [4] имеет ряд отличий от работы [3]. В частности, в [4] более точно выражены скорости пузырьков через обобщенные импульсы:  $\mathbf{u}_k = \sum_j B_{kj} \mathbf{p}_j$ . Матрицы  $B_{ij}$  размерности  $3 \times 3$  определяются из уравнения

$$\sum_k A_{ik} B_{kj} = I \delta_{ij}, \quad A_{ij} = \begin{cases} (\tau \rho_l / 2) I, & i = j, \\ (3\tau \rho_l / 4) (a / |r_{ij}|)^3 (I - 3\mathbf{r}_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij} / |r_{ij}|^2), & i \neq j. \end{cases}$$

Здесь  $I$  — единичная матрица;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\tau, a$  — объем и радиус пузырька;  $\rho_l$  — плотность жидкости;  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  — обозначение диады;  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ ;  $\mathbf{x}_i$  — координаты центра  $i$ -го пузырька. При этом гамильтониан системы — неотрицательная функция. В результате предложена следующая кинетическая модель разреженного пузырькового течения [4]:

$$\begin{aligned} f_t + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(H_{\mathbf{p}} f) - \operatorname{div}_{\mathbf{p}}(H_{\mathbf{x}} f) &= 0, & t \geq 0, & \mathbf{x} \in R^3, & \mathbf{p} \in R^3, \\ H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) &= 2^{-1} |\mathbf{p} + \nabla \varphi|^2, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}}((1 + \lambda \rho) \nabla \varphi(t, \mathbf{x})) + \lambda \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) &= 0, \\ \rho(t, \mathbf{x}) &= \int_{R^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}, & \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) &= \int_{R^3} \mathbf{p} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  — плотность распределения пузырьков по декартовым координатам  $\mathbf{x}$  и импульсам пузырьков  $\mathbf{p}$  в момент времени  $t$ ;  $\lambda$  — постоянная (все величины считаются безразмерными). В стационарном случае линии  $H = \text{const}$  являются интегральными кривыми системы (1). В силу того что  $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) > 0$ , интегральные кривые в фазовом пространстве  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  замкнуты и ограничены. В дальнейшем будет рассматриваться уравнение (1) в одномерном случае.

**1. Обобщенные характеристики и условия гиперболичности кинетического уравнения.** В случае одной пространственной переменной уравнение (1) принимает вид

$$f_t + (p - l) f_x + (p - l) l_x f_p = 0, \quad (1.1)$$

где

$$l = \frac{\lambda j}{1 + \lambda \rho}, \quad \rho = \int_{-\infty}^{\infty} f dp, \quad j = \int_{-\infty}^{\infty} p f dp.$$

Плотность распределения  $f$  считается неотрицательной функцией, финитной или быстро убывающей при  $|p| \rightarrow \infty$ . По структуре уравнение (1.1) близко к одномерному уравнению Руссо — Смереки

$$f_t + (p - \lambda j) f_x + \lambda p j_x f_p = 0, \quad j = \int_{-\infty}^{\infty} p f dp$$

и переходит в него, если выполнить разложение функции  $l(t, x; \lambda)$  по степеням  $\lambda$ , пренебрегая членами порядка  $\lambda^2$  и выше. Далее, без ограничения общности полагаем  $\lambda = 1$  (это достигается растяжением переменной  $f$ ). Перейдем в уравнении (1.1) к эйлерово-лагранжевым координатам  $x, \nu$  с помощью замены переменной  $p = p(t, x, \nu)$ , где функция  $p$  — решение задачи Коши

$$p_t + (p - l) p_x = (p - l) l_x, \quad p|_{t=0} = p_0(x, \nu).$$

В переменных  $t, x, \nu$  из уравнения (1.1) получаем систему для определения функций  $p$  и  $f$

$$p_t + (p - l)(p - l)_x = 0, \quad f_t + (p - l)f_x = 0, \quad (1.2)$$

где

$$l = \frac{j}{1 + \rho}, \quad \rho = \int_{-\infty}^{\infty} p_\nu f \, d\nu, \quad j = \int_{-\infty}^{\infty} pp_\nu f \, d\nu.$$

Замена обратима при условии  $p_\nu(t, x, \nu) \neq 0$ . В этом случае можно определить  $\nu(t, x, p)$  и после подстановки в  $f(t, x, \nu)$  получить решение  $f = f(t, x, p)$  уравнения (1.1). Далее будем предполагать выполнение неравенства  $p_\nu > 0$ .

Уравнения (1.2) принадлежат классу систем с операторными коэффициентами

$$\mathbf{U}_t + A\mathbf{U}_x = 0, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(t, x, \nu), \quad (1.3)$$

для которых обобщены понятия характеристик и гиперболичности [9]. В данном случае  $\mathbf{U} = (p, f)^T$ ,  $A$  — нелокальный матричный оператор, действующий по переменной  $\nu$ :

$$A = \begin{pmatrix} (p - l) + (1 + \rho)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (p - l)f_\nu \dots \, d\nu & -(1 + \rho)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (p - l)p_\nu \dots \, d\nu \\ 0 & p - l \end{pmatrix}.$$

Пусть  $B$  — банахово пространство вектор-функций  $\varphi = (\varphi_1(\nu), \varphi_2(\nu))^T$ ; функции  $\mathbf{U}, \mathbf{U}_t, \mathbf{U}_x$  (зависимость от  $t, x$  как от параметров) принадлежат  $B$ . Нетрудно показать, что  $A: B \rightarrow B$  — линейный оператор. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$(\mathbf{F}, (A - kI)\varphi) = 0. \quad (1.4)$$

Решение ищется относительно векторного функционала  $\mathbf{F} \in B^*$  ( $B^*$  — сопряженное с  $B$  пространство функционалов), действующего на произвольную вектор-функцию  $\varphi \in B$ . Выражение  $(\mathbf{F}, \varphi)$  обозначает результат действия функционала на пробную вектор-функцию. Действие функционала  $\mathbf{F}$  на уравнение (1.3) дает соотношение на характеристике

$$(\mathbf{F}, \mathbf{U}_t + k\mathbf{U}_x) = 0. \quad (1.5)$$

Согласно [9] система (1.3) называется гиперболической, если все собственные числа  $k$  вещественны и соответствующие собственные функционалы образуют полную систему, т. е. совокупность соотношений на характеристиках (1.5) эквивалентна уравнениям (1.3).

Для системы (1.2) задача на собственные значения и функционалы (1.4) дает два уравнения для определения  $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ :

$$\begin{aligned} (F_1, (p - l - k)\varphi_1) + (1 + \rho)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (p - l)f_\nu \varphi_1 \, d\nu (F_1, (p - l)) &= 0, \\ (F_2, (p - l - k)\varphi_2) - (1 + \rho)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (p - l)p_\nu \varphi_2 \, d\nu (F_1, (p - l)) &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

При этом использована независимость компонент пробной функции  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ . Заметим, что задача (1.6) имеет непрерывный спектр характеристических скоростей  $k^\nu = p(\nu) - l$ , которым соответствуют собственные функционалы  $\mathbf{F}^{1\nu}, \mathbf{F}^{2\nu}$  с компонентами

$$(F_1^{1\nu}, \varphi) = \frac{\varphi}{v} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v' f'_\mu (\varphi' - \varphi) \, d\mu}{v' - v}, \quad (F_2^{1\nu}, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v' v'_\mu (\varphi' - \varphi) \, d\mu}{v' - v},$$

$$(F_1^{2\nu}, \varphi(\mu)) = 0, \quad (F_2^{2\nu}, \varphi(\mu)) = \varphi(\nu),$$

определенные на гладких пробных функциях. Здесь  $v = p(\nu) - l$ ;  $v' = v(\mu)$  (аргументы  $t, x$  опущены для сокращения записи).

Для определения дискретного характеристического спектра рассмотрим случай  $k(t, x) \neq p(t, x, \nu) - l(t, x)$  в области, где  $f(t, x, \nu) > 0$ . Система (1.6) имеет решение

$$(F_1, \varphi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p-l)f_\nu \varphi du}{p-l-k}, \quad (F_2, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p-l)p_\nu \varphi du}{p-l-k},$$

где  $k(t, x)$  — корень уравнения

$$\chi(k) = 1 + k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_\nu f d\nu}{(p-l-k)^2} = 0. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7), определяющее дискретный характеристический спектр оператора  $A$ , не имеет вещественных корней. Действительно, если  $f$  не является финитной функцией, то  $k$  не принадлежит вещественной оси в силу условия  $k \neq p - l$ . В случае финитной функции распределения это следует из вида функции  $\chi(k)$  и неравенств  $f \geq 0, p_\nu \geq 0$ . Однако уравнение (1.7) может иметь комплексные корни, и для гиперболичности системы необходимо сформулировать условия их отсутствия.

Действуя собственными функционалами  $F^{1\nu}$  и  $F^{2\nu}$  на уравнения (1.2), получаем характеристическую форму системы

$$v^{-2}(\partial_t + v\partial_x)p + v^{-1}(\partial_t + v\partial_x)\rho + (\partial_t + v\partial_x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'_\mu f' d\mu}{p' - p} = 0, \quad (1.8)$$

$$f_t + v f_x = 0.$$

По-видимому, модель (1.2) не приводится к инвариантам Римана, сохраняющимся вдоль характеристик непрерывного спектра, в отличие от уравнений Руссо — Смереки [7].

Условия гиперболичности системы уравнений (1.2) формулируются в терминах комплексной функции  $\chi(z)$ , а точнее, ее предельных значений из верхней и нижней полуплоскостей на вещественной оси

$$\chi^\pm(v(\nu)) = 1 + v^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_\mu d\mu}{v' - v} \pm \pi i v^2 \frac{f_\nu}{v_\nu}.$$

Заметим, что функция  $\chi(z)$  аналитична и не имеет полюсов в комплексной плоскости с вырезанной вещественной осью. Из принципа аргумента следует

**Лемма 1.** Уравнение (1.7) на решении  $p(t, x, \nu)$ ,  $f(t, x, \nu)$  не имеет комплексных корней, если выполнены условия

$$\Delta \arg \chi^\pm = 0, \quad \chi^\pm \neq 0 \quad (1.9)$$

(приращение аргумента вычисляется при изменении  $\nu$  от  $-\infty$  до  $\infty$  и фиксированных значениях  $t, x$ ).

Приведенная ниже лемма устанавливает условия, при которых соотношения на характеристиках (1.8) эквивалентны уравнениям (1.2).

**Лемма 2.** Пусть компоненты вектор-функции  $\mathbf{S} = (S_1, S_2)^T$  гёльдеровы по переменной  $\nu$ , выполняются соотношения  $(F^{1\nu}, \mathbf{S}) = 0$ ,  $(F^{2\nu}, \mathbf{S}) = 0$  и условия (1.9). Тогда  $\mathbf{S} \equiv 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения  $(\mathbf{F}^{2\nu}, \mathbf{S}) = 0$  следует, что  $S_2 \equiv 0$ . С учетом этого уравнение  $(\mathbf{F}^{1\nu}, \mathbf{S}) = 0$  можно записать в виде

$$S_1 - v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v' f'_\mu (S'_1 - S_1) d\mu}{v' - v} = 0.$$

Переходя к переменной интегрирования  $v'$ , получаем сингулярное интегральное уравнение

$$S_1 \left( 1 + v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v' f'_{v'}}{v' - v} dv' \right) - v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v' f'_{v'} S'_1}{v' - v} dv' = 0. \quad (1.10)$$

Сведем уравнение (1.10) к задаче сопряжения теории аналитических функций [10]. Введем функцию

$$\Psi(z) = z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v' f'_{v'} S'_1}{v' - z} dv'.$$

По формулам Сохоцкого — Племеля вычисляются предельные значения функции  $\Psi(z)$  на вещественной оси. Нетрудно проверить, что решение уравнения (1.10) равносильно решению однородной задачи сопряжения

$$\Psi^+(v) = G(v)\Psi^-(v), \quad G(v) = \chi^+(v)/\chi^-(v), \quad (1.11)$$

где  $G$  — заданная, а  $\Psi$  — искомая функции. Требуется определить аналитические функции комплексной переменной в верхней и нижней полуплоскостях по граничному условию на вещественной оси. В силу выполнения условий (1.9) индекс задачи сопряжения равен нулю. В этом случае согласно [10] задача (1.11) имеет только тривиальное решение в классе функций, исчезающих на бесконечности. Из уравнения (1.10) с учетом того, что  $\Psi = \Psi^\pm = 0$ , получаем равенства  $\operatorname{Re}(\chi^\pm S_1) = 0$ ,  $\operatorname{Im}(\chi^\pm S_1) = 0$ . Так как  $\chi^\pm \neq 0$ , то необходимо  $S_1 = 0$ . Таким образом, установлена полнота системы собственных функционалов. Лемма доказана.

Из приведенных выше лемм и определения гиперболичности следует

**Теорема.** *Условия (1.9) являются необходимыми и достаточными для гиперболичности системы уравнений (1.2), если функции  $p$  и  $f$  дифференцируемые,  $p_\nu$  и  $f_\nu$  гёльдеровы по переменной  $\nu$  ( $p_\nu \neq 0$ ),  $f$  и  $f_\nu$  обращаются в нуль при  $|\nu| \rightarrow \infty$ .*

**2. Бегущие волны.** Решение вида  $f = f(\xi, p)$ , где  $\xi = x - Dt$ , описывает бегущую волну, распространяющуюся с постоянной скоростью  $D$ . На этом классе решений уравнение (1.1) принимает вид

$$(p - l - D)f_\xi + (p - l)l_\xi f_p = 0.$$

В качестве независимой переменной удобно взять  $l$  (полагаем, что  $l_\xi \neq 0$ ). Тогда уравнение бегущих волн запишется в виде

$$(p - l - D)f_l + (p - l)f_p = 0. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) интегрируется:

$$f = \Phi(\eta), \quad \eta = p^2/2 - (D + l)p + l^2/2. \quad (2.2)$$

Пусть  $D > 0$  (случай  $D < 0$  аналогичен, а при  $D = 0$  решение легко строится методом характеристик). Решение (2.2) принимает постоянные значения на характеристиках  $\eta = \text{const}$  (эти линии в плоскости переменных  $(p, l)$  показаны на рис. 1).

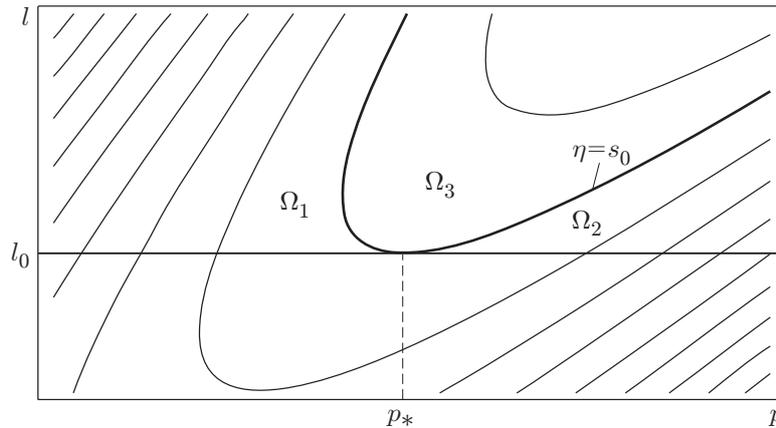


Рис. 1

Рассмотрим задачу Коши

$$f(l_0, p) = f_0(p), \quad l_0 = \left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} f_0(p) dp\right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} p f_0(p) dp. \quad (2.3)$$

Условия (2.3) обеспечивают непрерывное примыкание бегущей волны к заданному стационарному однородному по пространству решению  $f_0(p)$ . Как видно на рис. 1, для  $l > l_0$  решение задачи Коши однозначно определяется по начальным данным в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , а в области  $\Omega_3$ , ограниченной кривой  $\eta = s_0 = -D^2/2 - Dl_0$ , решение находится из дополнительных уравнений. Отметим, что задача Коши (2.3) некорректна для  $l < l_0$ , так как функция  $f_0(p)$  не может быть задана произвольно (характеристики пересекают линию, на которой заданы условия Коши, в двух точках). Построим решение задачи (2.1), (2.3) в некотором интервале  $l_0 \leq l \leq l_1$ .

Определим функцию  $\Phi(\eta)$  на линии  $l = l_0$  для  $p \geq p_* = l_0 + D$  и  $p \leq p_*$ . Значения функции  $\Phi$  на этих промежутках обозначим  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  соответственно. Из формул (2.2) и (2.3) получаем

$$\begin{aligned} \Phi^+(\eta) &= f_0(l_0 + D + \sqrt{2\eta + D^2 + 2Dl_0}), \\ \Phi^-(\eta) &= f_0(l_0 + D - \sqrt{2\eta + D^2 + 2Dl_0}). \end{aligned}$$

По известным функциям  $\Phi^\pm$  из (2.2) определяем решение в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ :

$$\begin{aligned} f &= \Phi^+(p^2/2 - (l + D)p + l^2/2), & p &\geq l + D + \sqrt{2D(l - l_0)}, \\ f &= \Phi^-(p^2/2 - (l + D)p + l^2/2), & p &\leq l + D - \sqrt{2D(l - l_0)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для построения решения в области  $\Omega_3$  преобразуем соотношение

$$l = \left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} f dp\right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} p f dp \quad (2.5)$$

в интегральное уравнение для определения функции  $\Phi(\eta)$  на интервале  $\eta \in (s, s_0)$ , где  $s = -D^2/2 - Dl$ . Для этого в (2.5) перейдем от переменной интегрирования  $p$  к переменной  $\eta$ . В результате получаем интегральное уравнение Абеля для определения функции  $\Phi(\eta)$  в области  $\Omega_3$ :

$$\int_s^{s_0} \frac{\Phi(\eta) d\eta}{\sqrt{\eta - s}} = F(s), \quad (2.6)$$

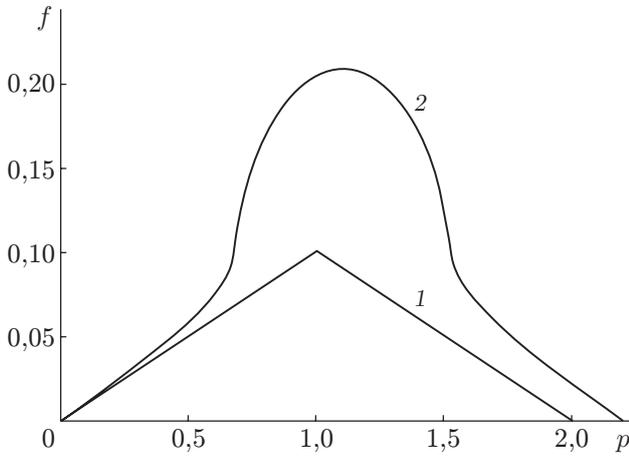


Рис. 2

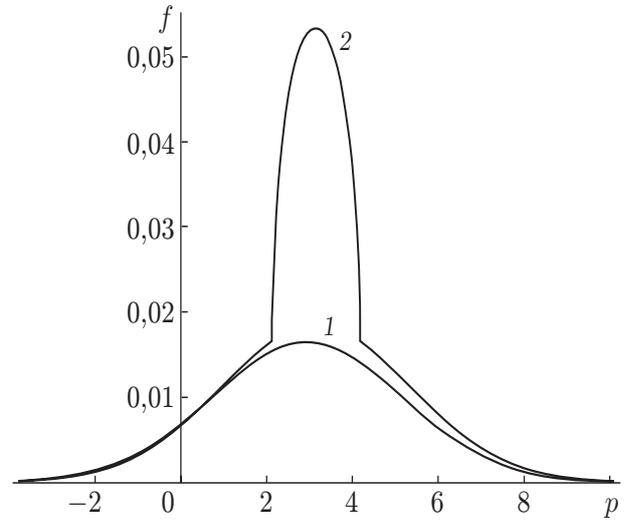


Рис. 3

где

$$F(s) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{s}{D^2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\Phi^+(\eta) + \Phi^-(\eta)}{\sqrt{\eta - s}} d\eta - \frac{1}{D\sqrt{2}} \int_{s_0}^{\infty} (\Phi^+(\eta) - \Phi^-(\eta)) d\eta.$$

В результате решения уравнения Абеля (2.6) находим

$$\Phi(\eta) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{F(s_0)}{\sqrt{s_0 - \eta}} - \int_{\eta}^{s_0} \frac{F'(s) ds}{\sqrt{s - \eta}} \right).$$

В области  $\Omega_3$  решение имеет вид

$$f = \Phi(p^2/2 - (l + D)p + l^2/2), \tag{2.7}$$

где  $l + D - \sqrt{2D(l - l_0)} \leq p \leq l + D + \sqrt{2D(l - l_0)}$ . Таким образом, формулы (2.4), (2.7) полностью определяют решение в области бегущей волны.

Приведем два примера построения бегущей волны по описанному выше алгоритму. В первом примере (рис. 2) в качестве начального распределения выбрана финитная функция вида

$$f_0(p) = \begin{cases} hp, & 0 \leq p \leq 1, \\ h(2 - p), & 1 \leq p \leq 2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Во втором примере (рис. 3)

$$f_0(p) = \rho_0(2\pi T)^{-1/2} \exp(-(p - a)^2/(2T)).$$

В этом случае удастся получить решение в явном виде

$$f = \rho_0(2\pi T)^{-1/2} \exp(-(p^2 - 2(l + D)p + l^2 + D^2 + 2Dl_0)/(2T)), \quad p \notin (p_1, p_2),$$

$$f = \Phi(p^2/2 - (l + D)p + l^2/2), \quad p_1 \leq p \leq p_2,$$

$$\Phi(\eta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi D^2} \sqrt{s_0 - \eta} - \frac{\rho_0}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{D^2 + 2Dl_0 + 2\eta}{2T}\right) \left(\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{s_0 - \eta}{T}}\right) - 1\right),$$

$$p_1 = l + D - \sqrt{2D(l - l_0)}, \quad p_2 = l + D + \sqrt{2D(l - l_0)}.$$

На рис. 2, 3 кривыми 1 показан график функции начального распределения, кривые 2 соответствуют решению при фиксированном  $l > l_0$ .

Из уравнения бегущих волн (2.1) следует, что  $\rho = \rho_0 + d^{-1}(l - l_0)$ , и в области волны происходит увеличение концентрации пузырьков. Этим объясняется резкое возрастание функции  $f$  (см. рис. 2, 3). При этом в области бегущей волны происходит поворотное движение пузырьков. Действительно, траектории движения пузырьков определяются как решения системы уравнений  $dl/dt = p - l - D$ ,  $dp/dt = p - l$ . В области  $\Omega_3$  величина  $p - l - D$  меняет знак, и в некоторых точках скорость пузырьков совпадает со скоростью волны.

**3. Решение линеаризованного кинетического уравнения.** Линеаризуем уравнения (1.2) на стационарном и однородном по пространству решении  $p = p^0(\nu)$ ,  $f = f^0(\nu)$ . В результате для малых возмущений получим систему

$$p_t + (p^0 - l^0)(p - l)_x = 0, \quad f_t + (p^0 - l^0)f_x = 0. \quad (3.1)$$

Здесь

$$l = \frac{1}{1 + \rho^0} \int_{-\infty}^{\infty} (pp_\nu^0 f^0 + p^0 p_\nu f^0 + p^0 p_\nu^0 f) d\nu - \frac{l^0}{1 + \rho^0} \int_{-\infty}^{\infty} (p_\nu^0 f + p_\nu f^0) d\nu,$$

$$l^0 = \frac{j^0}{1 + \rho^0}, \quad \rho^0 = \int_{-\infty}^{\infty} p_\nu^0 f^0 d\nu, \quad j^0 = \int_{-\infty}^{\infty} p^0 p_\nu^0 f^0 d\nu.$$

Характеристическая форма системы (3.1) получается линеаризацией соотношений (1.8). С использованием обозначения

$$W(t, x, \nu) = \frac{p(t, x, \nu)}{(v^0(\nu))^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_\mu(t, x, \mu) f^0(\mu) - p_\mu^0(\mu) f(t, x, \mu)}{p^0(\mu) - p^0(\nu)} d\mu +$$

$$+ \frac{1}{v^0(\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} (p_\nu^0 f + p_\nu f^0) d\nu - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p(t, x, \mu) - p(t, x, \nu)) p_\mu^0(\mu) f^0(\mu)}{(p^0(\mu) - p^0(\nu))^2} d\mu \quad (3.2)$$

$(v^0(\nu) = p^0(\nu) - l^0)$  соотношения на характеристиках для уравнений (3.1) принимают вид

$$W_t + v^0(\nu)W_x = 0, \quad f_t + v^0(\nu)f_x = 0. \quad (3.3)$$

Рассмотрим задачу Коши  $p|_{t=0} = p_0(x, \nu)$ ,  $f|_{t=0} = f_0(x, \nu)$ . Если функции  $p_0$  и  $f_0$  заданы, то в силу (3.2) известна функция  $W_0(x, \nu)$ . Интегрирование уравнений (3.3) с начальными условиями приводит к решению

$$W = W_0(x - v^0(\nu)t, \nu), \quad f = f_0(x - v^0(\nu)t, \nu).$$

Для получения решения исходных уравнений (3.1) необходимо найти функцию  $p(t, x, \nu)$  по известным функциям  $f$  и  $W$ . Это достигается в результате решения сингулярного интегрального уравнения. После несложных преобразований из (3.2) следует уравнение для определения  $p(t, x, \nu)$  (зависимость от  $t, x$  как от параметров)

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{v^0} + v^0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\mu}^0(\mu) d\mu}{v^0(\mu) - v^0(\nu)} \right) p - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^0(\mu) f_{\mu}^0(\mu) p'}{v^0(\mu) - v^0(\nu)} = \\ = v^0 W - \int_{-\infty}^{\infty} v_{\mu}^0 f' d\mu + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_{\mu}^0(\mu) f' d\mu}{v^0(\mu) - v^0(\nu)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Пусть на вещественной оси  $z = v^0(\nu)$ . Обозначим  $\xi = v^0(\mu)$ ,  $\bar{f}^0(\xi) = f^0(\mu)$  и введем комплексные функции

$$\chi(z) = 1 + z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}_{\xi}^0 d\xi}{\xi - z}, \quad \Psi(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \bar{f}_{\xi}^0 p d\xi}{\xi - z}.$$

Функция  $\chi(z)$  совпадает с характеристической функцией, определенной в п. 2. В терминах предельных значений этой функции формулируются условия гиперболичности (1.9). Пусть на решении  $f = f^0(\nu)$ ,  $p = p^0(\nu)$  условия (1.9) выполнены. Используя формулы Сохоцкого — Племеля, нетрудно проверить, что решение сингулярного интегрального уравнения (3.4) сводится к решению неоднородной задачи сопряжения

$$\Psi^+(z) = G(z)\Psi^-(z) + g(z), \quad G(z) = \chi^+(z)/\chi^-(z), \quad (3.5)$$

где

$$g(z) = \frac{\pi i z^2 \bar{f}_z^0}{\chi^-(z)} \left( zW - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f} d\xi}{\xi - z} \right).$$

При выполнении условий гиперболичности (1.9) индекс задачи сопряжения равен нулю и в классе функций, исчезающих на бесконечности, решение (3.5) имеет вид [10]

$$\Psi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi) d\xi}{\chi^+(\xi)(\xi - z)}.$$

Функция  $p$  находится по формуле  $p(z) = (\Psi^+(z) - \Psi^-(z))/(\pi i z \bar{f}_z^0)$ . Проведя вычисления и сделав обратную замену переменных, получим

$$\begin{aligned} p(t, x, \nu) = v^0(\nu) \left( m(t, x, \nu) \chi(v^0(\nu)) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v^0(\mu))^2 f_{\mu}^0(\mu) m(t, x, \mu) d\mu}{v^0(\mu) - v^0(\nu)} \right), \\ m(t, x, \nu) = \frac{1}{\chi^+ \chi^-} \left( v^0(\nu) W(t, x, \nu) - \int_{-\infty}^{\infty} f p_{\mu}^0(\mu) d\mu + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_{\mu}^0(\mu) f(t, x, \mu) d\mu}{v^0(\mu) - v^0(\nu)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, функции  $f$ ,  $p$  определены и решение линеаризованного кинетического уравнения (3.1) построено.

**Заключение.** Проведено теоретическое исследование одномерного кинетического уравнения пузырьковой жидкости Г. Херреро, Б. Ликуин-Десре, Б. Пертама [4]. Установлено, что это уравнение сводится к интегродифференциальной системе, являющейся обобщенно-гиперболической [9] при выполнении некоторых условий. Построены точные решения модели в классе бегущих волн. Получено решение кинетического уравнения, линеаризованного на стационарной однородной по пространству функции распределения.

В отличие от близкого по структуре уравнения Руссо — Смереки данная модель имеет знакоопределенный гамильтониан, но, по-видимому, меньше свойств симметрии: не приводится к инвариантам Римана и не обладает бесконечной серией законов сохранения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Biesheuvel A., van Wijngaarden L.** Two-phase flow equations for a dilute dispersion of gas bubbles in liquid // J. Fluid Mech. 1984. V. 148. P. 301–318.
2. **Biesheuvel A., Gorissen W. C. M.** Void fraction disturbance in a uniform bubble liquid // J. Multiphase Flow. 1990. V. 16. P. 211–231.
3. **Russo G., Smereka P.** Kinetic theory for bubble flow. 1. Collisionless case // SIAM J. Appl. Math. 1996. V. 56, N 2. P. 327–357.
4. **Herrero H., Lucquin-Desreux B., Perthame B.** On the motion of dispersed bubbles in a potential flow // SIAM J. Appl. Math. 1999. V. 60, N 1. P. 61–83.
5. **Тещуков В. М.** Кинетическая модель пузырькового течения // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 5. С. 130–139.
6. **Милн-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
7. **Тещуков В. М.** Характеристики, законы сохранения и симметрии кинетических уравнений движения пузырьков в жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 86–100.
8. **Чесноков А. А.** Точные решения одномерного кинетического уравнения Руссо — Смереки // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 4. С. 21–32.
9. **Тещуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–562.
10. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

*Поступила в редакцию 30/IX 2002 г.,  
в окончательном варианте — 25/XI 2002 г.*

---