

УДК: 532.5.013.4

## Процессы переноса и диссипации кинетической энергии турбулентности в течении термовязкой жидкости\*

Ю.М. Куликов, Э.Е. Сон

*Объединенный институт высоких температур РАН, Москва*

E-mail: kulikov-yurii@yandex.ru, son.eduard@gmail.com

Исследуется турбулентное движение термовязкой жидкости в трехмерной области, периодически продолженной в двух направлениях. Характеристики течения описываются в терминах уравнения для турбулентной кинетической энергии, позволяющего разделить вклад различных слагаемых, связанных с производством, транспортом и диссипацией турбулентной кинетической энергии. Указанные члены можно получить на основе моментов усреднения различного порядка. Предыдущие исследования показали, что течение термовязкой жидкости проходит несколько стадий эволюции, в том числе и стадию нестационарной турбулентности, что позволяет обсудить вопросы математической строгости и применимости различных методов усреднения. Существование пространственной периодичности допускает использование комбинированного пространственно-временного усреднения различных величин на участке стационарной турбулентности. Результаты данного метода представлены в виде совокупности  $Z-t$ -диаграмм. Кроме того, в работе проводится анализ развития течения на основе непосредственной визуализации полей скорости и температуры.

**Ключевые слова:** термовязкая жидкость, турбулентность, кинетическая энергия, смешение, усреднение по Рейнольдсу, стационарная турбулентность, временной масштаб, турбулентный тепловой поток, неоднородная турбулентность, фильтрация, моменты усреднения, адвекция, диссипация, диффузия, турбулентный транспорт.

### Введение

В настоящем исследовании течение термовязкой жидкости (ТВЖ) рассматривается в русле статистического подхода к турбулентности (в самом широком смысле), в частности, на основе анализа членов уравнения для турбулентной кинетической энергии (ТКЭ). Постановка задачи подробно описывалась в работе [1] и была связана с течением ТВЖ в расчетной области кубической формы. Начальные распределения скорости и температуры в этой постановке согласованы с перепадом давления по оси  $X$  и температурой на стенках, ограничивающих расчетную область в направлении  $Z$ . В направлении  $Y$  задаются условия периодичности. Отметим также, что в направлении основного течения также задается условие периодичности, но с сохранением перепада давления. Данная постановка позволяет рассматривать бесконечный периодически продолженный слой жидкости, который затем эволюционирует во времени под воздействием малых возмущений скорости.

---

\* Исследование выполнено при поддержке гос. задания ОИВТ РАН.

В дальнейшем будут рассматриваться результаты расчета для среднемассового числа Рейнольдса  $Re_1 = 4704$  на сетках  $128^3$  и  $256^3$  ячеек. Расчеты проводились на основе самостоятельной реализации численного метода КАБАРЕ [2], выполненного в приближении слабой сжимаемости. В случае турбулентной эволюции течение ТВЖ имеет несколько стадий: усиление мелкомасштабных возмущений, крупномасштабный захват слоев жидкости с различной температурой, стадия нестационарной турбулентности и, в конечном итоге, установление стационарного режима. При статистическом подходе используется уравнение для ТКЭ, которое напрямую основывается на разложении Рейнольдса. Именно Рейнольдс заложил основы восприятия турбулентности как чисто случайного явления [3]. Одним из первых крупных результатов, полученных в рамках этого подхода, стала модель Прандтля [4] и связанная с ней гипотеза о длине пути перемешивания. Данная модель основывалась на аналогии между турбулентным хаотическим движением жидких частиц и поведением молекул и атомов в газе, описываемом кинетической теорией. В дальнейшем систематический подход получил развитие в работах Тейлора [5, 6] и Колмогорова [7] (в особенности для однородной изотропной турбулентности). Вместе с тем, использование статистического подхода поднимает ряд вопросов, касающихся его состоятельности и результативности, в частности [8]:

- эксперименты в турбулентных течениях показывают существование предистории развития турбулентности, а также существование когерентных структур;
- нерешенность «проблемы замыкания», трудность физической интерпретации моментов усреднения высокого порядка;
- противоречие с детерминистским характером уравнений Навье–Стокса.

В статье последовательно обсуждаются результаты непосредственной визуализации полей скорости и температуры, методология усреднения слагаемых уравнения для ТКЭ для рассматриваемой задачи,  $Z$ - $t$ -диаграммы моментов усреднения различного порядка и слагаемых уравнения для ТКЭ.

### 1. Турбулизация течения ТВЖ с точки зрения трехмерных полей скорости и температуры

Визуализация трехмерных полей скорости и температуры позволяет получить наглядное представление о процессе смешения в течении ТВЖ. Значения температуры приведены к диапазону  $[-1, 1]$ , а компоненты вектора скорости ( $U$ ,  $V$ ,  $W$ ) в направлении координатных осей нормированы на начальное значение среднемассовой скорости  $U_0$ .

В силу специфики уравнения состояния, а также малой теплопередачи поле температуры выступает в качестве активного скаляра, связанного с уравнениями движения экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры. Тем не менее, открытым остается вопрос о степени этого влияния на процесс теплопереноса. Так, можно предположить, что в рассматриваемом случае температура выступает в качестве маркера жидких частиц, который хорошо отмечает смещение слоев. В начальный момент времени ( $t \approx 0,59$ ) наиболее заметны возмущения поля температуры в направлении  $Y$  (без градиента давления), которые затем ( $t \approx 2,97$ ) приводят к появлению весьма существенных гребней и началу сворачивания «клубов» (рис. 1а). В дальнейшем ( $t \approx 5,93$ ) в силу малой вязкости процесс смешения наиболее интенсивно происходит в области  $z \gtrsim 3/4$ , при этом на некоторых участках пристеночные слои горячей жидкости вытесняются высокоскоростными включениями более холодной жидкости из ядра потока (рис. 1б). Из верхней части канала процесс смешения постепенно ( $t \approx 8,9$ ) распространяется в центральную часть течения с соответствующим ростом размеров смешивающихся структур, при этом развития смешения в нижних слоях практически не наблюдается (рис. 1с). При  $t \approx 11,9$  характер смешения остается неизменным. К моменту  $t \approx 14,83$  (рис. 1д) в нижней полуплоскости наблюдаются крупномасштабные включения из жидких частиц с различной

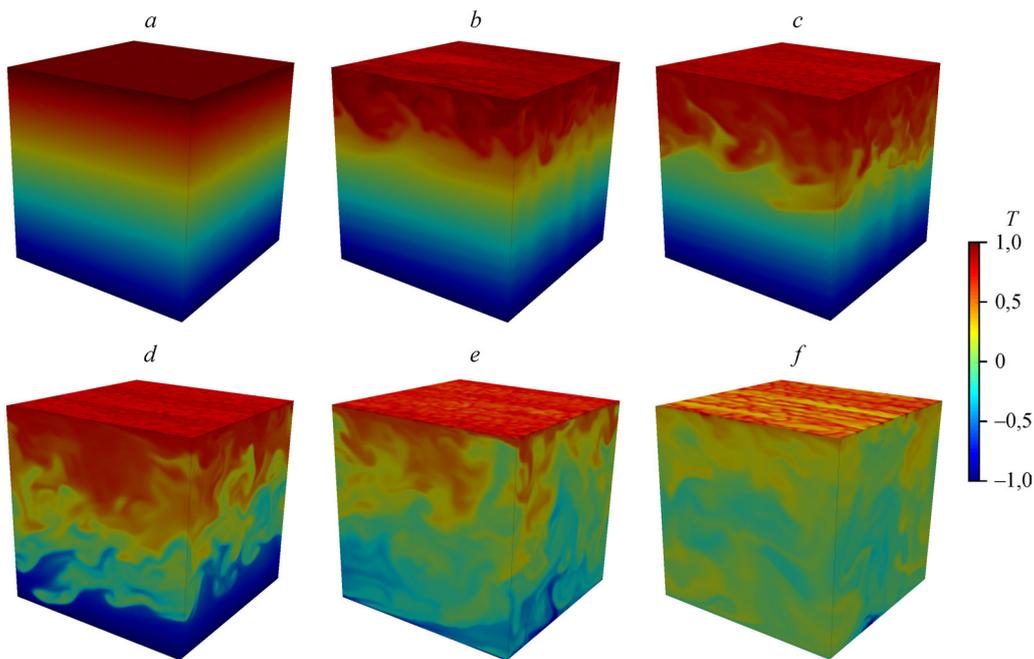


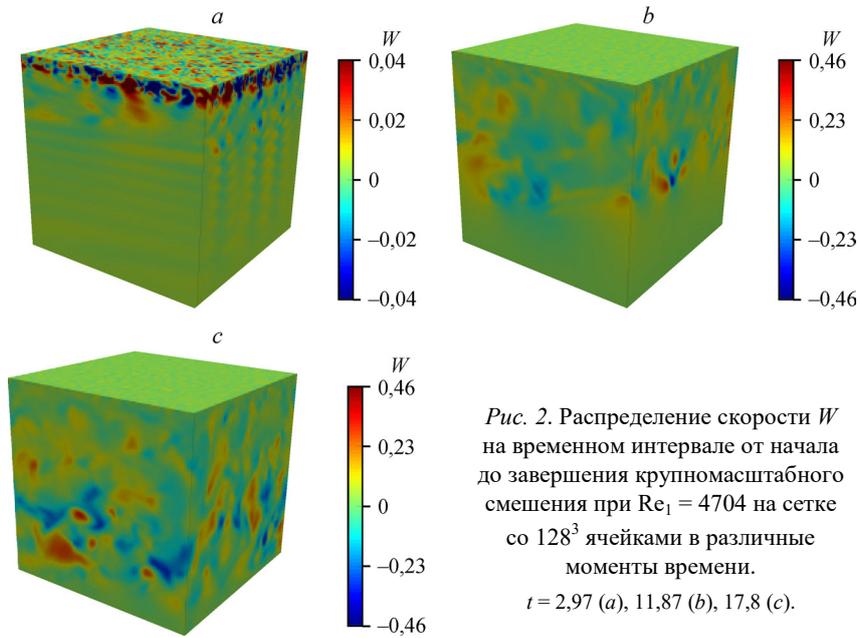
Рис. 1. Распределение температуры в объеме жидкости, наблюдаемое в процессе смешения при среднемассовом  $Re_1 = 4704$  в различные моменты времени.

$t = 2,97$  (a),  $5,93$  (b),  $8,9$  (c),  $14,83$  (d),  $29,7$  (e),  $44,5$  (f); визуализация расчета на сетке  $128^3$ ; значения температуры приведены к диапазону  $[-1, 1]$ .

температурой ( $T = \pm 0,8$  и  $T = 0$ ). К моменту  $t \approx 29,7$  (рис. 1e) появляется достаточно широкая область в среднем течении с температурой жидкости  $T \approx 0$ , а также наблюдаются структуры, свидетельствующие о выбросах холодной жидкости из пристеночной области, напоминающие по форме грибы. При  $t = 44,5$  основная часть жидкости оказывается перемешанной (рис. 1f), также здесь можно выделить два тепловых слоя, периодически нарушаемых вихрями из центральной области течения.

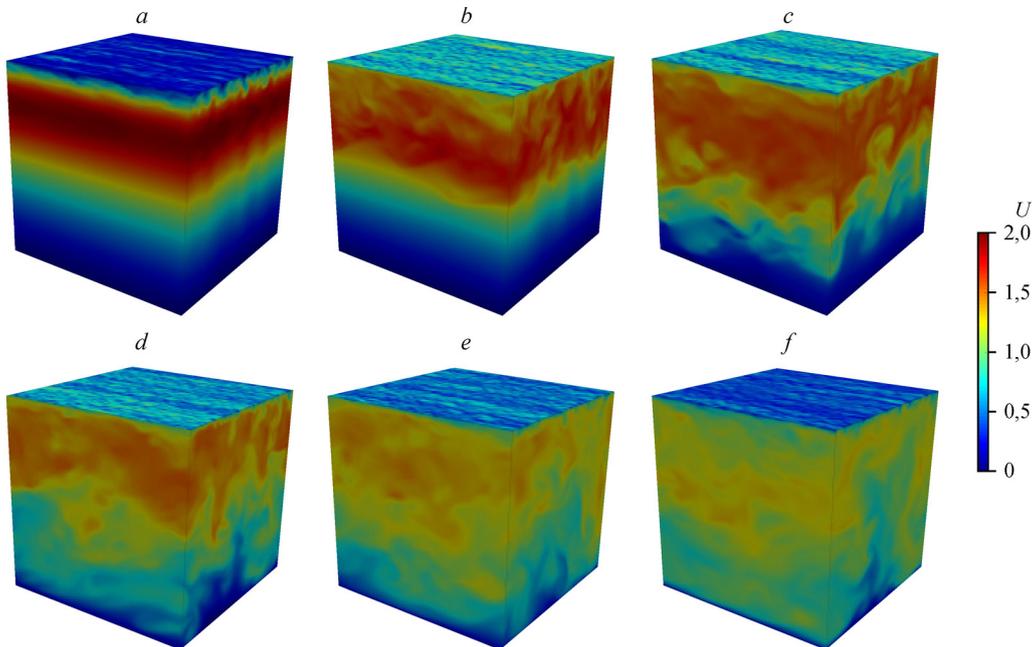
Рассмотрим эволюцию скорости  $W$ , изначально имеющую нулевое значение. При  $t = 0,59$  (рис. 2a) сказывается двумерный характер шума, поэтому возбуждение  $W$  носит регулярный пространственно-периодический характер. Однако практически сразу проявляется и влияние неоднородности поля вязкости, приводящей к тому, что в горячей пристенке формируются наиболее сильные возмущения (порядка  $\pm 4 \cdot 10^{-2}$ ), которые усиливаются в дальнейшем. Вместе с этим усиление пристеночных пульсаций приводит к развитию крупных возмущений в ядре потока, которые превосходят амплитуды в пристенке примерно на порядок ( $\pm 5 \cdot 10^{-1}$ ). При  $t \approx 11,87$  возмущения становятся более крупномасштабными и занимают центральную часть течения (рис. 2b). Данный процесс продолжается также при  $t \approx 17,8$  (рис. 2c) и сопровождается расширением диапазона масштабов, на которых существуют пульсации, последние при этом смещаются к холодной стенке. В дальнейшем происходит увеличение масштаба пульсаций с падением амплитуды до  $\pm 0,2$ .

Аналогично профилю температуры при начальных условиях расчета для распределения скорости  $U$  наблюдается достаточно выраженное возмущение в направлении  $Y$  ( $t \approx 2,97$ ). Наиболее быстро происходит возмущение горячего пристенка, в котором имеется сильный градиент скорости и малая вязкость (рис. 3a). Ко времени  $t \approx 5,93$  фактически имеет место разрушение ядра потока (рис. 3b). Следует также обратить внимание,



что несмотря на большое значение средней скорости и ее градиента, в направлении основного течения картина возмущений оказывается более размытой, чем в направлении  $Y$ .

При  $t \approx 8,9$  можно заметить своеобразное расслоение течения (рис. 3с): в его верхней половине происходит разрушение ядра потока и сильное истончение пограничного слоя у горячей стенки. В нижней половине в основном сохраняется регулярный характер течения. При  $t \approx 11,87$  начинается проникновение возмущений в нижнюю полуплоскость,



а также соответствующее увеличение их масштаба (рис. 3*d*). При  $t \approx 20,76$  возмущения охватывают всю расчетную область (рис. 3*e*). После  $t \approx 32,63$  (рис. 3*f*) наблюдается существенное выравнивание течения в различных слоях, а максимальная его скорость при этом падает в два раза. В дальнейшем характер эволюции не меняется.

Анализ полей скорости и температуры дает возможность проследить основные этапы эволюции течения в широком диапазоне параметров определяемой, в принципе, среднemasсовым числом Рейнольдса  $Re_1$  и интенсивностью возмущений. В общем случае она сводится к следующему: при развитии течения возмущения в области  $z \lesssim 3/4$  практически не растут (или растут слабо), наиболее существенным их рост оказывается в верхней пристеночной области. В некоторый момент времени имеет место резкое усиление возмущений в зоне ядра потока, которое может быть вызвано или их самостоятельным ростом в отсутствие подавляющего эффекта стенки, или происходит под воздействием пристеночного возмущения, связанного с «выбросом» медленных жидких частиц в высокоскоростную область. В результате наблюдается активная турбулизация течения в верхней половине канала. Дальнейшее развитие течения сводится к смешению в нижней половине расчетной области, полному выравниванию температуры и дальнейшей эволюции турбулизованного потока с изотермическим (квазиизотермическим) ядром.

В некоторых режимах течения турбулентность может поддерживать себя дольше, то есть участки с большой вязкостью являются ламинарными, а турбулентная кинетическая энергия сохраняется и может переноситься к малым масштабам. Такую турбулентность, сочетающую в себе ламинарную и турбулентную «фазы» можно назвать очаговой («lumru», см. [9]).

## 2. Комбинированное усреднение для слагаемых уравнения турбулентной кинетической энергии

В монографии [8] можно найти развернутую критику существующих в настоящее время представлений о турбулентности, методах расчета турбулентных течений, а также их методологического обоснования. В частности, в ней указывается на ошибочность восприятия турбулентного течения как чисто случайного, так как в таком случае необходимо отказаться от любых методов усреднения уравнений Навье–Стокса и в целом от предположения (принимаемого повсеместно), что эти уравнения могут описывать турбулентное движение сплошной среды, так как они являются детерминистскими. Если все-таки полагать, что турбулентность — случайное (непредсказуемое) явление, тогда и усреднение уравнений Навье–Стокса, выполняемое в рамках подхода RANS, почти не имеет смысла, т.к. описание потока начинается с «неправильных» уравнений и оканчивается нестохастическими уравнениями. Таким образом, остается выбор [8]: или принять уравнения Навье–Стокса в качестве корректного описания потока и считать, что турбулентность не является случайным явлением, или искать совершенно другое описание (возможно, в области стохастических дифференциальных уравнений). С экспериментальной точки зрения главным аргументом против случайности является существование предыстории (или памяти) турбулентного течения, пусть даже на коротких временах.

В основе проведения усреднения по Рейнольдсу для получения уравнений RANS (Reynolds-averaged Navier–Stokes)

$$\bar{u}_i + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} = -\nabla \bar{p} + \nu \Delta \bar{u} - R(u', u'),$$

где  $R$  — тензор напряжений Рейнольдса, лежат две гипотезы [8]. В первой предполагается, что усреднение по ансамблю сохраняет зависимость средней скорости от времени, то есть операции усреднения по ансамблю и дифференцирования коммутативны, во второй — что операции усреднения по ансамблю и по времени эквивалентны. Широко

используемое объяснение для сохранения временной производной в уравнениях RANS исходит из существования различных временных масштабов. Предполагается, что рассматриваемое течение обладает двумя различными временными масштабами —  $t_1$  (турбулентные пульсации) и  $t_2$  (крупномасштабные движения), такими, что  $t_1 \ll t_2$ . Тогда усреднение по Рейнольдсу будет иметь вид:

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T u(x, t) dt, \quad (1)$$

где  $T$  — период усреднения.

К сожалению, указанное предположение выполняется далеко не всегда, так как большинство турбулентных течений имеют много временных масштабов. Даже в случае существования  $t_1$  и  $t_2$  период усреднения  $T$  все равно оказывается неопределенным в формуле усреднения (1), и определение не является математически строгим. Таким образом, попытка получить нестационарные решения уравнений RANS приводит к конфликту с математическим формализмом, используемым при усреднении Рейнольдса.

Усреднение по Рейнольдсу оказывается точно определенным, если добавить в него предельный переход  $T \rightarrow \infty$ :

$$\bar{u}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(x, t) dt. \quad (2)$$

Из накапливаемых за все время расчета средних можно получить результаты усреднения между отдельными моментами времени («кадрами») по следующему простому алгоритму:

$$N_1 \bar{U}_1 = \sum_{i=1}^{N_1} U_i, \quad N_2 \bar{U}_2 = \sum_{i=1}^{N_2} U_i,$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — количество шагов усреднения  $U_1$ ,  $U_2$  — средние значения продольной скорости  $U$  за  $N_1$  и  $N_2$  отсчетов соответственно. Среднее за интервал 1–2 запишется в виде

$$\bar{U}_{12} = \frac{N_2 \bar{U}_2 - N_1 \bar{U}_1}{N_2 - N_1}.$$

Указанное выражение справедливо при любой системе нумерации отсчетов, так как из него всегда можно вынести общий множитель.

Анализируемые в дальнейшем величины получены с помощью нескольких методов усреднения, которые включают в себя: непрерывное накопление массивов данных с усредненными величинами (способ № 1, основанный на интеграле с предельным переходом (2)); получение массивов данных, усредненных на интервале между последовательными «кадрами» (способ № 2, более «традиционный», основанный на формуле (1)); и, наконец, усреднение массивов данных по направлениям периодичности, что дает возможность анализировать  $Z$ - $t$ -диаграммы (величины, полученные подобным образом, имеют обозначение  $\langle \bar{\ } \rangle_s$ ).

Следует заметить, что в первом способе о процессе выхода течения на статистически стационарный режим можно судить по достижению асимптотических значений на  $Z$ - $t$ -диаграмме. Для второго способа интервал временного усреднения несколько превосходит среднее пролетное  $t_0$  или минимальное пролетное ( $L/U_{\max}$ ) времена. В силу достаточно большого объема данных интервал усреднения фактически представляет собой промежуток времени между двумя кадрами сохранения данных, т.е. определяется

не из физических соображений, хотя он и превосходит все характерные масштабы турбулентных пульсаций и, следовательно, достаточен для получения статистики. Отдельных исследований, направленных на выявление минимального достаточного интервала накопления данных (например, по достижению стационарного значения трения на стенке  $\tau^*$ ), не проводилось.

При использовании строгого с математической точки зрения способа № 1 серьезные трудности возникают в случае существования нестационарной турбулентности на участке усреднения, когда статическое описание является не самым подходящим. Таким образом, величины, накопленные в массивах средних моментов различного порядка хранят историю выхода течения на стационарный режим, которая не позволяет судить об истинных значениях усреднённых величин на больших временах расчета. Альтернативным вариантом является смещение начала усреднения по формуле (2) на участок мелкомасштабного смешения  $t \gtrsim 40$ . Однако в этом случае теряется математическая строгость, так как нижний предел интеграла (2) выбирается произвольно.

Уравнение для турбулентной кинетической энергии  $\bar{e}_{\text{turb}} = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$  может быть получено из системы уравнений для напряжений Рейнольдса суммированием по повторяющимся индексам для диагональных членов тензора напряжений Рейнольдса:

$$\frac{\partial \bar{e}_{\text{turb}}}{\partial t} = -U_j \frac{\partial \bar{e}_{\text{turb}}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_j u'_j u'_i}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{e}_{\text{turb}}}{\partial x_j^2} - \overline{u'_j u'_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_i}$$

Члены в правой части соответствуют адвекции

$$\mathcal{A}_t = - \left( U \frac{\partial \bar{e}_{\text{turb}}}{\partial x} + V \frac{\partial \bar{e}_{\text{turb}}}{\partial y} + W \frac{\partial \bar{e}_{\text{turb}}}{\partial z} \right) \frac{L}{U_0^3},$$

диффузии вследствие корреляции пульсаций давления и скорости

$$\mathcal{D}_p = - \left( \frac{\partial \overline{u' p'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v' p'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w' p'}}{\partial z} \right) \frac{L}{\rho_0 U_0^3},$$

турбулентному переносу

$$\mathcal{T}_t = - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \overline{u'^3} + \overline{u' v'^2} + \overline{u' w'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \overline{u'^2 v'} + \overline{v'^3} + \overline{w'^2 v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{u'^2 w'} + \overline{v'^2 w'} + \overline{w'^3} \right) \right) \frac{L}{U_0^3},$$

переносу вследствие молекулярной вязкости

$$\mathcal{T}_\nu = \frac{\mu}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 \bar{e}_{\text{turb}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{e}_{\text{turb}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{e}_{\text{turb}}}{\partial z^2} \right) \frac{L}{U_0^3},$$

производству турбулентной кинетической энергии

$$\mathcal{P} = - \left( \overline{u'^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{v'^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w'^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{u' v'} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \overline{u' w'} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \overline{v' w'} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right) \frac{L}{U_0^3}$$

и турбулентной диссипации

$$\varepsilon_k = -\frac{\mu}{\rho_0} \left( \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{L}{U_0^3}.$$

Достаточно подробно роль основных членов этого уравнения описывается в работе [10]. Уравнение для ТКЭ часто используется в метеорологии, где роль многих слагаемых можно выделить более явно в силу большого масштаба атмосферных процессов ( $Re \approx 10^8$ ).

Рассмотрим тепловой поток, обусловленный корреляцией турбулентных пульсаций скорости и температуры (далее — турбулентный тепловой поток) в различных направлениях:

$$Q_x^T = -\frac{\overline{\rho u' T'}}{\rho_0}, \quad Q_y^T = -\frac{\overline{\rho v' T'}}{\rho_0}, \quad Q_z^T = -\frac{\overline{\rho w' T'}}{\rho_0}.$$

Компоненты (приведенные) турбулентного теплового потока рассчитываются без домножения на теплоемкость  $c_p$ .

Рассматриваемое в используемых методах усреднения двойное интегрирование — по времени и по пространству («комбинированный фильтр») — представляет собой интегральное преобразование, которое, с одной стороны, облегчает анализ, а с другой — «стирает» мелкомасштабные характеристики течения, связанные с турбулентными пульсациями или мелкомасштабным течением. Авторы также предполагают, что частота дискретизации получаемых данных оказывается достаточной для построения информативных  $Z-t$ -диаграмм. Анализ статических средних, полученных вторым способом, проводится только для режимов, соответствующих турбулентному развитию течения. Большой объем данных связан с необходимостью накопления и хранения трехмерных (в общем случае) массивов средних температуры  $\langle \bar{T} \rangle_s$ , компонент скорости  $\langle \bar{U} \rangle_s$ ,  $\langle \bar{V} \rangle_s$ ,  $\langle \bar{W} \rangle_s$ , первых моментов усреднения пульсаций скорости  $\langle \bar{u}' \rangle_s$ ,  $\langle \bar{v}' \rangle_s$ ,  $\langle \bar{w}' \rangle_s$ , вторых моментов  $\langle \bar{u'^2} \rangle_s$ ,  $\langle \bar{v'^2} \rangle_s$ ,  $\langle \bar{w'^2} \rangle_s$ , интенсивности  $\langle \bar{I} \rangle_s$  и кинетической энергии турбулентности  $\langle \bar{e}_{\text{turb}} \rangle_s$ , а также компонентов уравнения для кинетической энергии турбулентности.

Как при проведении обычного пространственного усреднения, в рассматриваемом случае на цветковых  $Z-t$ -диаграммах будут наблюдаться включения различного размера, сохраняющиеся при усреднении, которые, несмотря на относительно малый размер на диаграмме, могут представлять собой либо высокоамплитудные пульсации, либо структуры, занимающие большой объем и способные внести достаточный вклад в общее хаотическое поле пульсаций. Мощь (или грубость) фильтра делает большинство картин средних величин подобными как по шкале времени, так и по шкале амплитуд.

В качестве общей рекомендации можно отметить [11], что в экспериментах и численном моделировании пространственную и (или) временную дискретизацию следует выбирать так, чтобы изменение расчетных величин было гладким на масштабе расчетной области или измеряемом временном интервале, тогда корреляционные функции на расстояниях, сравнимых с размером расчетной области, уменьшаются до пренебрежимо малых значений. Для сеток размером  $64^3$ ,  $128^3$  и  $256^3$  ячеек время между последовательными «кадрами»  $\Delta t$  составляло 1,186, 0,593 и 0,593 соответственно. Для дальнейшей визуализации  $Z-t$ -диаграмм в данном разделе использовались результаты расчетов на сетках  $128^3$  и  $256^3$  ячеек для большого числа Рейнольдса, в последнем случае более трудоемкие вычисления не удалось провести до той же точки останова, что на сетке  $128^3$ .

Вследствие ограничений процессорного времени расчеты на сетке  $256^3$  в том же диапазоне временных масштабов, что и на более мелких сетках, являются трудно реализуемыми. Таким образом, часть описания течения на больших временах эволюции проводилась по данным более грубых сеток. Исходя из общего поведения усредняемых величин, на большинстве диаграмм можно выделить три области: область мелкомасштабного смешения, образовавшуюся вследствие воздействия начальных мелкомасштабных возмущений, которые соответствуют небольшому «размытию» слоев с различной температурой; участок крупномасштабного смешения, в котором происходит увеличение всех амплитуд усредняемых величин (то есть на этом участке реальный процесс мог идти еще интенсивнее); участок мелкомасштабного смешения в жидкости с уменьшенным градиентом температуры. Кроме того,  $Z-t$ -диаграммы некоторых величин являются подобными друг другу, в этом случае при дальнейшем описании они указываются в скобках.

## 2. Анализ $Z-t$ -диаграмм моментов усреднения различного порядка, а также членов уравнения для ТКЭ

Характеризуя процесс смешения по средним профилям температуры  $\langle \bar{T} \rangle_s$  (рис. 4), можно заметить, что они испытывают существенное изменение в интервале, границы которого для различных расчетов колеблются: начальная точка лежит в пределах  $t \approx 10 \div 20$ , конец крупномасштабного смешения и наиболее активного выравнивания температуры приходится на  $t \approx 40 \div 45$ . В дальнейшем образуются тонкие пристеночные тепловые слои, которые имеют толщину  $3 \div 4$  %. В центральной зоне при  $t \geq 40$  слои меняются значительно слабее. Процесс менее масштабного смешения отражается на форме изолиний этих слоев, имеющих пилообразную форму. В результате смешения общий перепад температуры по высоте профиля уменьшается более чем в 10 раз и составляет  $0,07\Delta t$ . В некоторых расчетах, несмотря на длительность смешения, реализуется больший перепад температуры:  $0,15\Delta t$  и  $0,2\Delta t$ , где  $\Delta t$  — исходная разница температур между стенками.

Профиль скорости в направлении основного течения  $\langle \bar{U} \rangle_s$  меняется следующим образом (рис. 5а): происходит расширение ядра потока на интервале  $t \approx 20 \div 40$ , соответствующем крупномасштабному смешению, затем при  $t \approx 100 \div 140$  профиль практически не меняется. В дальнейшем при  $t \geq 150$  результаты некоторых расчетов указывают

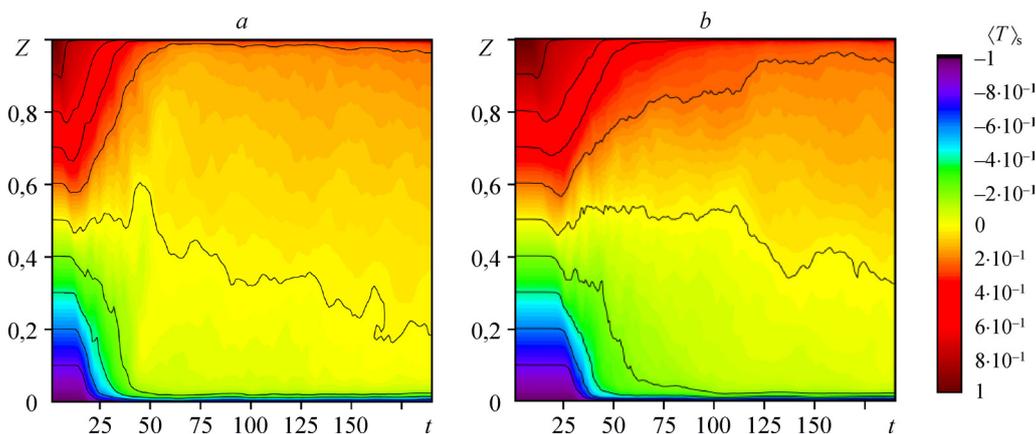


Рис. 4. Сравнение  $Z-t$ -диаграмм среднего профиля температуры  $\langle \bar{T} \rangle_s$  при среднемассовом числе Рейнольдса  $Re_1 = 4704$  по результатам расчета на сетках со  $128^3$  (а) и  $256^3$  (б) ячейками.

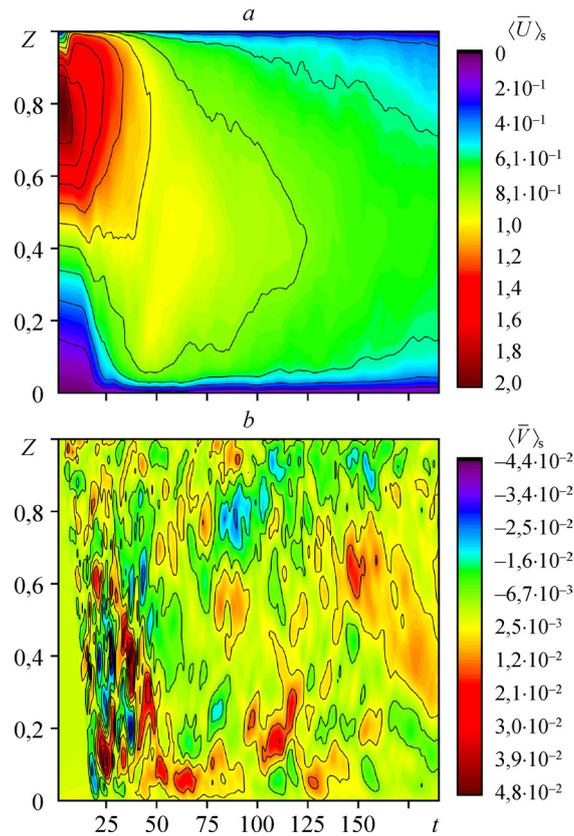


Рис. 5.  $Z$ - $t$ -диаграммы среднего профиля основной скорости  $\langle \bar{U} \rangle_s$  (а), а также скорости в направлении периодичности  $\langle \bar{V} \rangle_s$  (б) при  $Re_1 = 4704$  на сетке со  $128^3$  ячейками.

на замедление в области пристеночных слоев, что свидетельствует о продолжении эволюции течения даже на очень больших временах ( $t \gtrsim 180$ ). Компонента скорости в направлении периодичности без градиента давления имеет в среднем ненулевые значения, область их появления со временем расширяется сверху вниз (рис. 5б). При  $t \gtrsim 20$  начинают появляться области с противоположным направлением скорости («пятна»), где наблюдаются наибольшие амплитуды ( $\pm 0,02 \div \pm 0,03$ ) средних движений. При  $t \gtrsim 60 \div 80$  их интенсивность спадает приблизительно в 2 раза, а сами они становятся более размытыми (возможно не хватает временной дискретизации).

Компонента скорости  $W$ , отвечающая за пульсации в направлении, перпендикулярном стенкам, имеет изначально нулевое значение. Впоследствии  $\langle \bar{W} \rangle_s$  (рис. 6а), усредненная в интервалах между двумя последовательными «кадрами» на участке смешения, дает малоамплитудные (пренебрежимо малые) значения порядка  $10^{-7}$ , которые, как правило, исчезают при  $t \gtrsim 50$ . Вместе с тем, у этого среднего поля скорости более сложный и менее регулярный характер, так что в профиле могут наблюдаться как положительные, так и отрицательные значения.

Малые значения средней скорости можно объяснить характером граничных условий (стенка), а также хаотичностью поля скорости. Поле интенсивности  $\langle \bar{T} \rangle_s$  демонстрирует более интересную картину (рис. 6б), так как в нем присутствует несколько

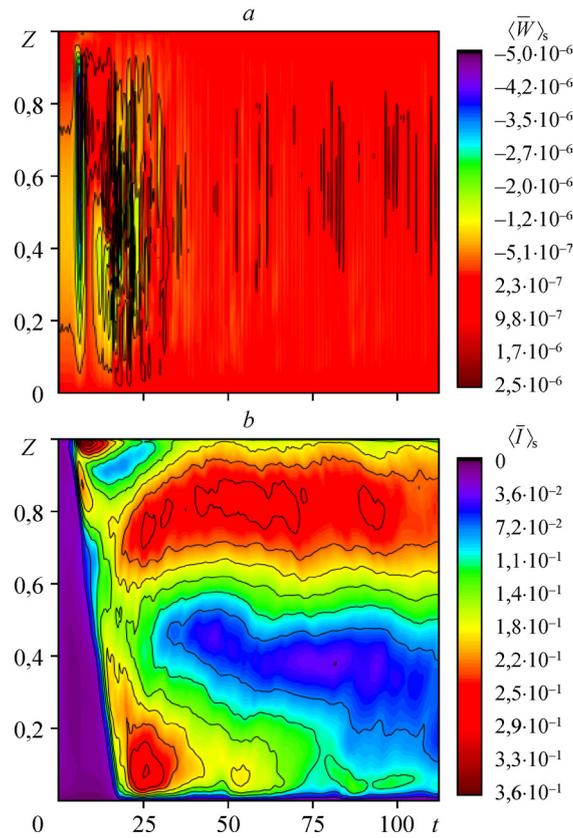


Рис. 6.  $Z$ - $t$ -диаграмма среднего профиля  $\langle \bar{W} \rangle_s$  (a)

и диаграмма интенсивности турбулентности  $\langle \bar{I} \rangle_s$  (b) при расчете на сетке с  $256^3$  ячейками.

характерных участков. Здесь можно выделить малоинтенсивную зону  $\langle \bar{I} \rangle_s \approx 10^{-2}$ , соответствующую слабой турбулентности, расширяющуюся снизу вверх в диапазоне  $t \approx 1,5 \div 10$  (у холодной стенки) и имеющую форму трапеции.

Следует также обратить внимание на локализованное образование у верхней стенки ( $\langle \bar{I} \rangle_s \approx 0,28 \div 0,35$ ), соответствующее сильной турбулентности, которое существует при  $t = 8,5 \div 18$ , а затем на той же высоте канала (в том же слое течения) следует спад ( $\langle \bar{I} \rangle_s \approx 0,04 \div 0,05$ ) в диапазоне  $t \approx 18 \div 32$ , т.е. на этом участке пульсации подавляются в непосредственной близости от пристеночного слоя. В то же время эти достаточно интенсивные движения приводят к возбуждению турбулентности в более близких к ядру потока слоях, и дальнейшее ее распространение начинается из слоя  $0,7 \lesssim z \lesssim 0,8$ . Об этом свидетельствует узкий «мостик» между двумя областями повышенной интенсивности.

В верхней полуплоскости (на участке, соответствующем ядру потока) зона интенсивной турбулентности вновь возникает, начиная с  $t \approx 8,3$ , а затем достигает практически стационарных значений  $\langle \bar{I} \rangle_s \sim 0,0184 \div 0,236$ , простираясь до диапазона  $t \approx 80 \div 140$ , т.е. фактически до конца расчета. На больших временах расчета общая интенсивность в верхней полуплоскости начинает падать и имеет пульсационный характер. В средней зоне интенсивность является практически неизменной и составляет  $\langle \bar{I} \rangle_s \sim 0,12$ .

В нижней полуплоскости после «трапеции» располагается участок треугольной формы, в котором существуют пульсации  $\langle \bar{I} \rangle_s \sim 0,24$  в диапазоне  $t \approx 22 \div 60$ . За ним следует ( $t \approx 80 \div 120$ ) область слабой турбулентности  $\langle \bar{I} \rangle_s \sim 0,03$ , которая при  $t \approx 120 \div 170$  начинает сужаться к холодной стенке, а интенсивность пульсаций — расти ( $\langle \bar{I} \rangle_s \approx 0,07 \div 0,08$ ). Следует отметить, что в верхнем пристеночном слое большая интенсивность сохраняется все время расчета.

Турбулентная кинетическая энергия  $\langle \bar{e}_{\text{turb}} \rangle_s$  демонстрирует поведение (рис. 7а), схожее с интенсивностью, так как последняя строится на ее основе, а в силу квадратичной связи указанные выше зоны становятся еще более выраженными. Вместе с тем, обнаруживается хорошее совпадение  $\langle \bar{e}_{\text{turb}} \rangle_s$  и  $\langle \bar{u}' \rangle_s^2$ . Изначально в зоне «прямоугольной трапеции»  $\langle \bar{e}_{\text{turb}} \rangle_s$  пренебрежимо мала:  $\langle \bar{e}_{\text{turb}} \rangle_s \approx 10^{-4}$  ( $\langle \bar{u}'^2 \rangle_s, 5 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-4}$ ), в локализованном образовании у верхней стенки в зоне активной генерации турбулентности  $\langle \bar{e}_{\text{turb}} \rangle_s \approx 0,1 \div 0,18$  ( $\langle \bar{u}'^2 \rangle_s \approx 0,35$ ), далее её величина опускается до  $\langle \bar{e}_{\text{turb}} \rangle_s \approx 0,05$  с некоторыми более сильными «вкраплениями». Впоследствии в верхней полуплоскости  $\langle \bar{e}_{\text{turb}} \rangle_s$  меняется в диапазоне от 0,081 до 0,091 ( $\langle \bar{u}'^2 \rangle_s \approx 0,007 \div 0,0014$ ). В нижней полуплоскости присутствует большое образование треугольной формы с интенсивностью до  $\langle \bar{e}_{\text{turb}} \rangle_s \approx 0,095 \div 0,127$  ( $\langle \bar{u}'^2 \rangle_s \sim 0,2$ ), однако оно быстро спадает до значений  $\langle \bar{e}_{\text{turb}} \rangle_s \approx 0,0011 \div 0,0033$  ( $\langle \bar{u}'^2 \rangle_s \approx 0,003$ ). Следует отметить, что в центральном участке существенных турбулентных пульсаций не наблюдается в любом интервале усреднения.

Для пульсаций  $\langle \bar{u}' \rangle_s$  в направлении  $X$  наблюдается подобие с турбулентным тепловым потоком  $Q_X^T$ . Для них характерны достаточно большие амплитуды (рис. 7б), что, помимо крупномасштабного смещения, связано с перестройкой основного профиля. В верхней полуплоскости происходит торможение, в нижней — разгон в силу несимметричности профиля скорости. В области «трапеции» амплитуда пульсаций составляет около 0,04 ( $Q_X^T \approx -0,002$ ), затем на участке разрушения основного профиля наблюдаются значения с амплитудой  $-0,48 \leq \langle \bar{u}' \rangle_s \leq -0,37$  ( $Q_X^T \approx 0,02$ ) в верхней части и с  $\langle \bar{u}' \rangle_s \approx 0,48 - 0,54$  ( $Q_X^T \approx -0,02$ ) — в нижней. В дальнейшем все время расчета в верхней части расчетной области наблюдается постоянное торможение с  $\langle \bar{u}' \rangle_s \sim -0,33$  ( $Q_X^T \sim -0,08 \div -0,05$ ), а в нижней разгон сменяется постоянным торможением, приводящим к постоянным отрицательным средним ( $\langle \bar{u}' \rangle_s \sim -0,1$ ). Аналогично для теплового потока в нижней половине канала отрицательный участок на участке крупномасштабного смещения постепенно сменяется околонулевыми положительными значениями.

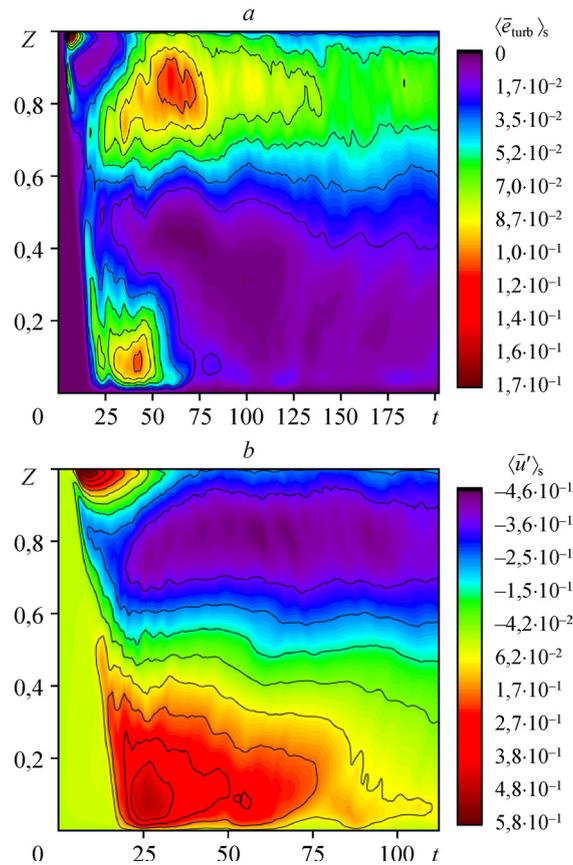


Рис. 7.  $Z$ - $t$ -диаграмма распределения кинетической энергии турбулентных пульсаций  $\langle \overline{e_{\text{turb}}} \rangle_s$  (а) при расчете на сетке с  $128^3$  ячейками и распределения средних пульсаций скорости  $\langle \overline{u'} \rangle_s$  (б).

Вторая компонента турбулентной кинетической энергии — квадрат пульсации в направлении  $Y \langle \overline{v'^2} \rangle_s$  (рис. 8а) — имеет схожесть с  $\langle \overline{w'^2} \rangle_s$ , а также с диаграммой производства кинетической энергии турбулентности  $P$ : имеется трапецевидная область с амплитудой  $\langle \overline{v'^2} \rangle_s \approx 10^{-4} \div 10^{-5}$  ( $\langle \overline{w'^2} \rangle_s \approx 2 \cdot 10^{-5}$ ,  $\langle \overline{w'^2} \rangle_s \approx 10^{-5}$ ,  $P \sim 10^{-7}$ ), которая в диапазоне  $t \approx 20 \div 40$  сменяется областью резкого роста до максимальных значений  $\langle \overline{v'^2} \rangle_s \sim 0,025 \div 0,033$  ( $\langle \overline{w'^2} \rangle_s \approx 0,02$ ). В верхней пристеночной области максимум достигается при  $t \approx 11,5$ , а затем спадает от 0,01 до 0,05 ( $t \approx 40 \div 50$ ) ( $\langle \overline{w'^2} \rangle_s \approx 0,001 \div 0,002$ ,  $P \approx 0,07 \div 0,01$ ) и в последствии до слабых амплитуд  $10^{-3}$ ; вместе с тем, эти пульсации имеют характер «пятен» и в верхней полуплоскости могут достигать 0,002 ( $P \sim 0,03$ ). В центре течения и нижней полуплоскости максимум достигается в центре ( $t \approx 20$ ;  $\langle \overline{v'^2} \rangle_s \approx 0,011$ ) и затем плавно спадает до 0,004; таким образом, существует два участка, в которых пульсации развиваются наиболее интенсивно.

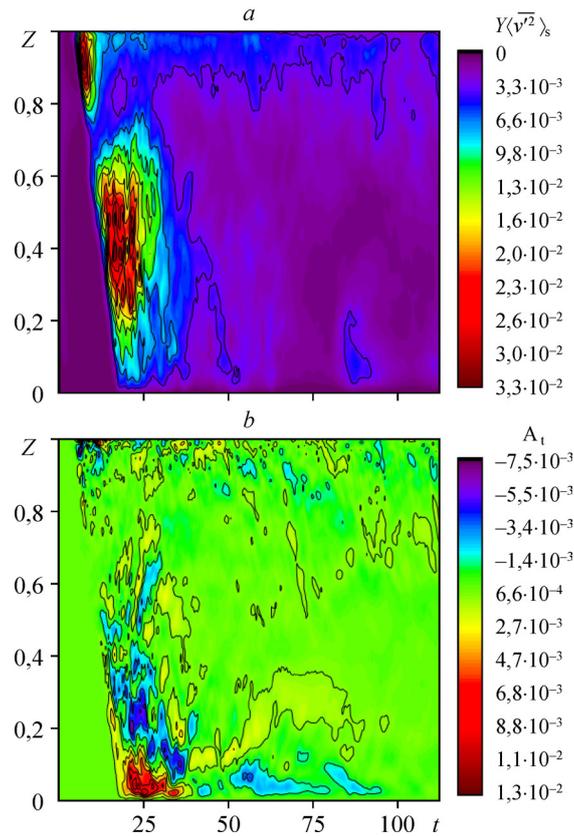


Рис. 8.  $Z-t$ -диаграмма распределения среднего квадрата пульсаций скорости в направлении  $Y \langle \overline{v'^2} \rangle_s$  (а) при расчете на сетке с  $256^3$  ячейками и значений турбулентной адвекции  $A_t$  (б) при расчете на сетке с  $256^3$  ячейками.

Средние пульсации в направлении  $Y \langle \overline{v'^2} \rangle_s$  (поперек основного течения) могут составлять до 0,04 по амплитуде (на рисунках не приводятся), наибольшая интенсивность у них наблюдается в зоне крупномасштабного смешения ( $t \approx 20 \div 60$ ), но и потом они сохраняются на всем протяжении расчета в виде «пятен» как в верхней, так и в нижней полуплоскости. Пульсации в направлении  $Z \langle \overline{w'^2} \rangle_s$  имеют достаточно малые амплитуды  $\pm(10^{-6} \div 10^{-7})$  и значимой информации не несут.

Адвекция ТКЭ  $A_t$  (рис. 8б) в трапециевидной зоне (меньшее основание «трапеции» (при  $t \approx 0 \div 8,5$ ) располагается у верхней стенки, большее основание (при  $t \approx 0 \div 27,5$ ) — у нижней стенки) имеет отрицательное значение:  $A_t \approx -4 \div -2,5 \cdot 10^{-8}$ , за ней располагается зона крупномасштабного смешения ( $A_t \approx \pm 0,01$ ) в диапазоне  $t \approx 20 \div 40$ . Далее эта компонента в основном развита в верхней полуплоскости ( $z \geq 3/4$ ) в виде крупномасштабных «пятен», где их амплитуда составляет  $A_t \approx -1,2 \div 1,7 \cdot 10^{-3}$  и сохраняется на всем расчетном промежутке, а в нижней полуплоскости в среднем наблюдаются околонулевые значения; при  $t > 50$  в центральной зоне и нижней полуплоскости устанавливаются величины порядка  $\pm 10^{-4}$ .

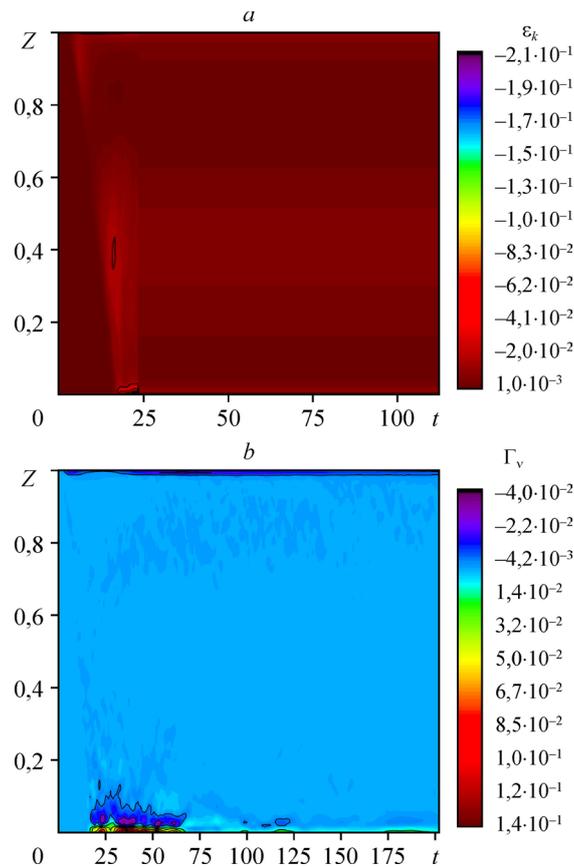


Рис. 9.  $Z$ - $t$ -диаграммы средних значений диссипации ТКЭ  $\varepsilon_k$  (a) при расчете на сетке с  $256^3$  ячейками и вязкого молекулярного транспорта ТКЭ  $\Gamma_v$  (b) при расчете на сетке с  $128^3$  ячейками.

Диссипация ТКЭ  $\varepsilon_k$  в трапециевидной зоне (рис. 9a) имеет отрицательные значения порядка  $-10^{-4} \div -10^{-5}$ , к ней прилегает узкая полоска в зоне активного смешения, имеющая максимальную ширину  $t \approx 20 \div 30$  у нижней стенки. В зоне активного смешения на некоторых режимах в верхнем пристенке могут достигаться значения  $\varepsilon_k \approx -0,36$ , в средней зоне — до  $\varepsilon_k \approx -4 \cdot 10^{-3}$ , в нижнем пристеночном слое  $\varepsilon_k \approx -0,5 \div -0,13$ . При дальнейшей эволюции у горячей стенки реализуются значения  $\varepsilon_k \approx -0,02$ , а в центральной зоне имеют место околонулевые положительные значения —  $\varepsilon_k \sim 10^{-4}$ , в нижней части существует протяженный участок отрицательных значений в диапазоне  $\varepsilon_k \approx -0,003$ . В некоторых режимах при длительных временах эволюции (после  $t > 40$ ) скорость диссипации оказывается на порядок меньше ( $-2 \cdot 10^{-4}$ ), тем не менее, в общей диаграмме сохраняются более интенсивные включения.

Вязкий молекулярный транспорт ТКЭ  $\Gamma_v$  практически на всей диаграмме (рис. 9b) имеет пренебрежимо малые значения ( $\Gamma_v \approx 6 \cdot 10^{-5}$ ), исключение составляет узкий участок у нижней стенки ( $t \approx 20 \div 40$  и  $z \lesssim 1/8$ ) с положительной ( $\Gamma_v \approx 0,066$ ) и отрицательной ( $\Gamma_v \approx -0,03$ ) зонами. В верхнем пристенке после трапециевидной зоны наблюдается узкий продолжительный участок с отрицательными значениями ( $\Gamma_v \approx -0,0305$ ). В нижней полуплоскости на больших временах расчета ( $t \approx 110 \div 160$ ) вязкая диссипация имеет отрицательные значения.

Диффузия ТКЭ (см. рис. 10a), обусловленная корреляцией пульсаций давления и скорости  $\Delta_p$ , начинает развиваться только после начала крупномасштабного смешения  $t \gtrsim 15$

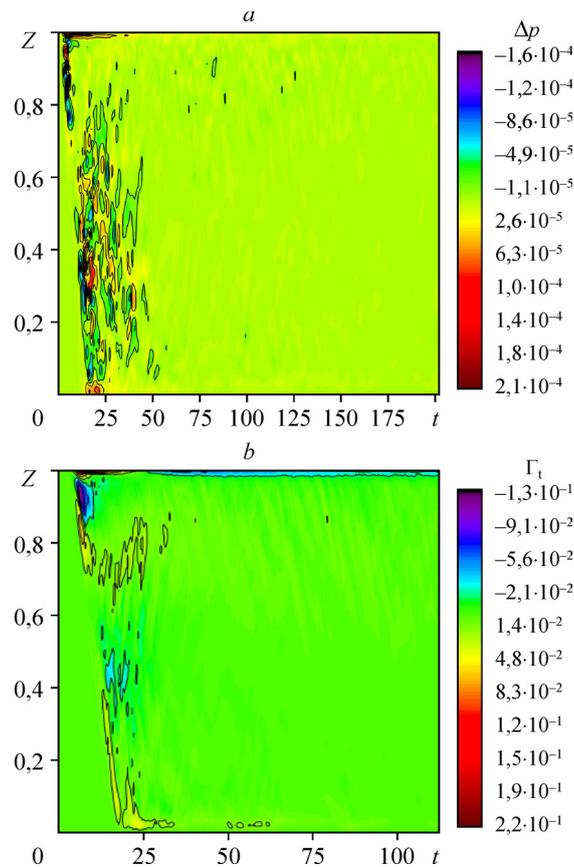


Рис. 10.  $Z$ - $t$ -диаграммы средних значений диффузии ТКЭ  $\Delta_p$  при расчете на  $128^3$  ячейках (a) и турбулентного транспорта ТКЭ  $\Gamma_t$  при расчете на  $256^3$  ячейках (b).

(в трапециевидной зоне значения этого компонента в среднем пренебрежимо малы —  $\Delta_p \sim 10^{-8}$ ) в зоне сильной турбулентности в центральной части и верхней полуплоскости ( $\Delta_p \sim \pm (10^{-5} \div 10^{-4})$ ), а затем сужается кверху и при  $t > 160$  почти полностью исчезает ( $\Delta_p \sim \pm 6 \cdot 10^{-6}$ ).

Турбулентный транспорт ТКЭ  $\Gamma_t$  (рис. 10b) наряду с диссипацией  $\varepsilon_k$  является самой трудновычисляемой величиной, у него также наблюдается трапециевидный участок  $\Gamma_t \sim 10^{-8} \div 4 \cdot 10^{-7}$ . Затем он наиболее активен в зоне крупномасштабного смешения ( $\Gamma_t \approx \pm 0,06$ ), а после её окончания — в верхней пристенке ( $t > 80$ ,  $\Gamma_t \approx 0,01$ ), в остальной области  $\Gamma_t \sim -2 \cdot 10^{-4}$ . На больших временах эволюции диаграмма  $\Gamma_t$  характеризуется многочисленными мелкими «всплесками» или «пятнами».

Турбулентный тепловой поток  $Q_Y^T$  в направлении  $Y$  аналогичным образом (рис. 11a) в трапециевидной зоне имеет крайне малые значения ( $Q_Y^T \sim 10^{-7}$ ) и увеличивается на несколько порядков при активном смешении ( $\pm 6 \cdot 10^{-3}$ ). После этой зоны в центре в среднем имеются положительные значения. При больших временах эволюции  $t > 80$  на различных режимах он оказывается наиболее силен в нижней и верхней пристеночных зонах, а не в центре течения. В отличие от пристеночных зон в центральной части отсутствуют области с выраженным направлением переноса при сохранении пятен амплитудой  $\pm 10^{-3}$ .

Турбулентный тепловой поток  $Q_X^T$  в трапециевидной области отсутствует ( $Q_Z^T \sim 10^{-7} \div 10^{-6}$ ), затем в зоне крупномасштабного смешения ( $t \approx 20 \div 40$ ) принимает в среднем

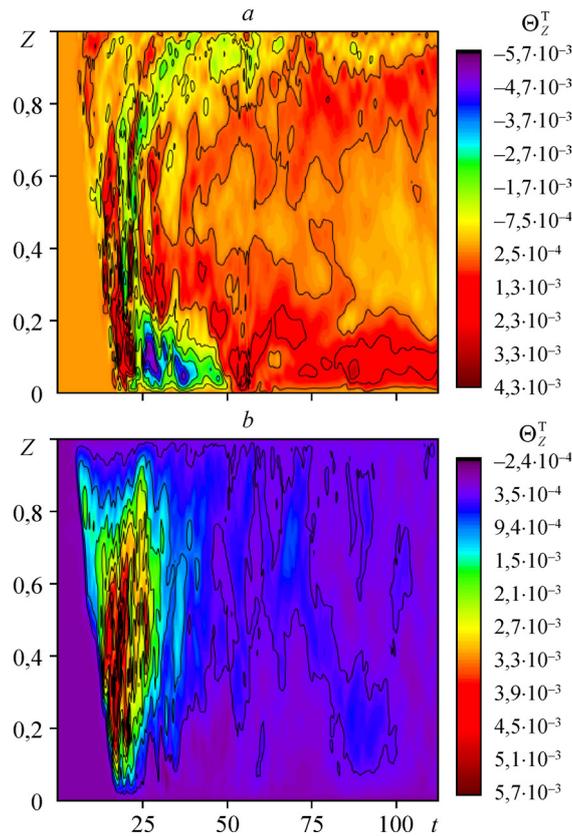


Рис. 11.  $Z$ - $t$ -диаграммы усредненного турбулентного теплового потока  $Q_Z^T$  (a) и  $Q_Z^T$  (b) при расчете на сетке с  $256^3$  ячейками.

положительные значения до  $Q_Z^T \sim 0,005$ . В дальнейшем в верхней полуплоскости ( $t > 60$ ) возникают отрицательные значения, сменяемые слабыми положительными «пятнами» ( $Q_Z^T \leq 10^{-4}$ ) во всей области. Рассматривая  $Z$ - $t$ -диаграммы  $Q_Z^T$ , можно заметить (рис. 11b), что в среднем  $Q_Z^T > 0$ , что кажется весьма необычным. Действительно, для несжимаемой жидкости в случае одномерных пульсаций  $T' \propto w'$ . Таким образом, тепловой поток  $Q_Z^T \propto -\langle w'^2 \rangle_s$  должен быть направлен сверху вниз. Объяснение следует искать в существовании постоянного течения в направлении  $X$ , приводящего к значительным различиям в величине средних пульсаций по направлениям  $X$  и  $Z$ . В результате можно заметить явную связь  $T' \propto u'$ , приводящую к наблюдаемому подобию диаграмм  $Q_X^T$  и  $\langle u'^2 \rangle_s$ .

### Выводы

В настоящей работе выполнено исследование турбулентного течения термовязкой жидкости на основе анализа членов уравнения для кинетической энергии турбулентности и с помощью непосредственной визуализации полей скорости и температуры.

Относительно методов усреднения можно заметить, что для применения строгого с математической точки зрения способа № 1 возникают серьезные трудности в случае существования нестационарной турбулентности, которая связана с крупномасштабным смещением. Величины, накопленные в массивах средних моментов различного порядка, хранят историю выхода течения на стационарный режим, что не позволяет судить об истинных значениях усредненных величин на больших временах расчета. Некоторым

компромиссом может быть смещение начала усреднения по формуле (1) на участок мелкомасштабного смешения. Однако в этом случае теряется математическая строгость (2), так как нижний предел интеграла выбирается произвольно.

Средние профили температуры позволяют установить приблизительный интервал процесса крупномасштабного смешения и активного выравнивая температуры. Его начало приходится на  $t \approx 10 \div 20$ , конец — на  $t \approx 40 \div 45$ . В дальнейшем образуются тонкие пристеночные тепловые слои, которые занимают 3÷4 % от высоты канала. В результате смешения общий перепад температуры в центральной зоне течения может уменьшиться более чем в 10 раз. Разрушение основного течения происходит в интервале  $t \approx 20 \div 40$ , также соответствующем крупномасштабному течению, в дальнейшем при  $t \approx 100 \div 140$  профиль скорости практически не меняется.

Наиболее интересное поведение демонстрируют диаграммы интенсивности турбулентных пульсаций  $\langle \bar{T} \rangle_s$ . Они позволяют сделать ряд выводов о развитии смешения. В начальный момент времени на  $Z-t$ -диаграмме наблюдается малоинтенсивная зона, которая слегка расширяется снизу вверх и имеет форму трапеции. В дальнейшем наиболее сильные пульсации наблюдаются у горячей стенки, однако затем происходит их подавление в силу близости пристеночного слоя. Одновременно имеет место усиление пульсаций в ядре потока, что приводит к резкой интенсификации процесса смешения и возникновению сильной турбулентности. Следует отметить, что в верхнем пристеночном слое большая интенсивность сохраняется все время расчета. Неоднородность возникающей турбулентности подтверждается средними значениями  $\langle \bar{u}^T \rangle_s$ , что связано сстройкой основного профиля и существованием перепада давления в направлении  $X$ . Компоненты уравнения для ТКЭ оказываются подобными интенсивности  $\langle \bar{T} \rangle_s$ , их наиболее существенные значения приходятся на участок крупномасштабного смешения. Существование основного течения в направлении  $X$  приводит к сильной неоднородности турбулентного теплового потока, выражающееся в подобию диаграмм  $Q_X^T$  и  $\langle \bar{u}^{T^2} \rangle_s$ .

Результаты пространственного усреднения подтверждаются и непосредственной визуализацией поля температуры, которая позволяет наблюдать развитие смешения в расчетной области, выравнивание температуры и формирование пристеночных тепловых слоев.

### Список литературы

1. Куликов Ю.М., Сон Э.Е. Режимы течения термовязкой жидкости в плоском неизотермическом слое // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 6. С. 877–898.
2. Головинин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.Н. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М: Изд-во МГУ, 2013. 532 с.
3. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Philosophical Transactions of the Royal Society of London A. 1895. Vol. 186. P. 123–164.
4. Prandtl L. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 1925. Vol. 5, No. 2. P. 136–139.
5. Taylor G.I. Diffusion by continuous movements // Proceedings of the London Mathematical Society. 1922. Vol. 20, No. 1. P. 196–212.
6. Taylor G.I. The spectrum of turbulence // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engng Sci. 1938. Vol. 164, No. 919. P. 476–490.
7. Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. 1985. М.: Наука, 470 с.
8. McDonough J.M. Introductory lectures on turbulence // CreateSpace Independent Publishing Platform. 2014. 180 p.
9. Gréa B.-J., Griffond J., Burlot A. The effects of variable viscosity on the decay of homogeneous isotropic turbulence // Physics of Fluids. 2014. Vol. 26, No. 3. P. 35104-1–35104-20.
10. George W.K. Lectures in turbulence for the 21st century. 2013. 303 p.
11. Jimenez J. The largest scales of turbulent wall flows: annual research briefs // Center Turbulence Research. 1998. 18 p.

*Статья поступила в редакцию 15 июля 2019 г.,  
после доработки — 13 января 2020 г.,  
принята к публикации 10 февраля 2020 г.*