

**УСТАНОВЛЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ
МЕЖДУ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ
КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА
ПРИ ОПИСАНИИ ОБРАТИМОЙ МАРТЕНСИТНОЙ ДЕФОРМАЦИИ
В РАМКАХ СИНТЕЗНОЙ МОДЕЛИ**

УДК 539.4.011

И. М. Голиборода, К. Н. Русинко

**Университет «Львівська політехніка»,
290013 Львов**

При создании и применении новых конструкционных материалов часто возникает проблема прогнозирования и учета нелинейных деформаций, вызванных обратимыми мартенситными преобразованиями. Указанные преобразования протекают путем кооперативного движения атомов и порождают широкий спектр специфических явлений (сверхупругость, эффект памяти формы, пластичность преобразования и др.), которые коренным образом изменяют свойства материалов и открывают принципиально новые возможности по их практическому использованию. Таким образом, актуальность создания математической модели, позволяющей описывать и прогнозировать деформационное поведение поликристаллов с учетом упомянутых явлений и допускающей широкое практическое применение, очевидна.

В силу математической обоснованности, строгости и простоты модели пластической деформации, основанной на синтезе положений концепции скольжения и теории течения [1, 2], логичным представляется ее дальнейшее развитие для описания и прогнозирования деформационного поведения современных конструкционных материалов в условиях сложных температурно-силовых режимов нагружения с учетом существенных микроструктурных свойств описываемых явлений. Ниже синтезная модель применяется для описания нелинейной обратимой деформации, порожденной мартенситными реакциями первого рода.

Определяющие соотношения модели. Для отображения существенных свойств явлений на микроуровне рассмотрим ряд известных положений [3]. Закономерности обратимых фазовых переходов описываются диаграммой (рис. 1), которая задана в системе координат относительное количество низкотемпературной (мартенситной) фазы Φ — эффективная температура T^* . Моментам начала и конца прямой реакции — перехода высокотемпературной фазы в низкотемпературную (впредь соответствующие фазы будем называть аустенит и мартенсит) — в данном микрообъеме соответствуют значения $\Phi = 0$ и $\Phi = \Phi_0$. Точки M_n и M_k , A_n и A_k отвечают характеристическим температурам начала и конца прямой и обратной реакции. Введение понятия эффективной температуры (выражение для ее определения дано ниже) и построение диаграммы в указанной системе координат вызвано смещением характеристических температур реакции под действием приложенного нагружения — эффективная температура отражает принцип Клаузиуса — Клапейрона [3, 4] о влиянии силового нагружения на кинетику мартенситных переходов и обеспечивает независимость характеристических температур, играющих роль параметров материала, от приложенного нагружения.

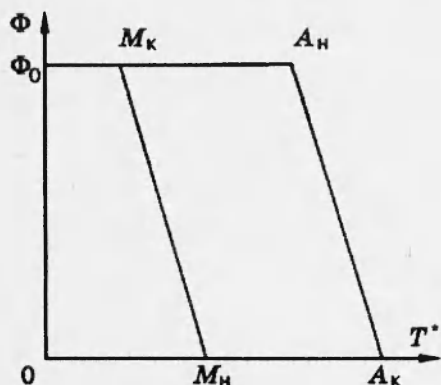


Рис. 1

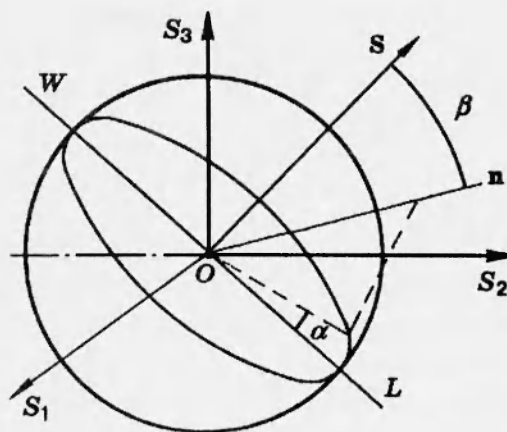


Рис. 2

Для описания кинетики реакции в соответствии с рис. 1 используем равенство [3]

$$\dot{\Phi} = -\dot{T}^* \{ H(\Phi_0 - \Phi) H(-T^*) H[M_H - \Phi(M_H - M_K) - T^*] (M_H - M_K)^{-1} + \\ + H(\Phi) H(\dot{T}^*) H[T^* - A_K + \Phi(A_K - A_H)] (A_K - A_H)^{-1} \} \quad (1)$$

(H — функция Хевисайда). При этом предполагается, что кинетика развития фазовой реакции существенно не зависит от вида напряженного состояния [5].

Мартенситное преобразование решетки обычно сопровождается деформацией сдвигового характера (дилатационные эффекты во многих случаях отсутствуют, либо ими можно пренебречь [5–8]). Поскольку тензор фазовой микродеформации, возникающей в рассматриваемом микрообъеме тела, определяется трансформацией (дисторсией) кристаллической решетки, для параметра фазовой микродеформации справедливо соотношение [3]

$$\varphi = D_{13}\Phi, \quad (2)$$

где D_{13} — сдвиговая компонента тензора дисторсии кристаллической решетки вследствие фазового перехода.

Сдвиговый характер мартенситной реакции делает применение модели на основе концепции скольжения для описания данного класса явлений логичным и обоснованным. Подобно тому как в концепции скольжения [9] необратимая деформация обусловлена сдвигами в заданных системах скольжения, в рассматриваемой феноменологической трактовке величина деформации ставится в зависимость от перемещения плоскостей пятимерного пространства девиаторов Ильюшина [10]; каждой указанной плоскости соответствует определенная система скольжения (нормаль к плоскости и направление в ней). Плоскости перемещаются под действием вектора напряжений S , компоненты которого определяются через компоненты девиатора напряжений (здесь и далее используем систему положений и обозначений [2]):

$$S_1 = \frac{3}{2}(S_{zz} + S_{xx}), \quad S_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(S_{zz} - S_{xx}), \quad S_3 = \sqrt{3}S_{xz}, \quad S_4 = \sqrt{3}S_{yz}, \quad S_5 = \sqrt{3}S_{xy}. \quad (3)$$

Если нагружение производится в трехмерном подпространстве упомянутого пространства девиаторов, которое определяется компонентами вектора S_1, S_2, S_3 (рис. 2), то дефор-

мация однозначно находится по перемещению следов указанных плоскостей в трехмерном подпространстве. Обозначим через $\mathbf{N}$ нормаль к плоскости пятимерного пространства, $\mathbf{n}$ — нормаль к ее следу в трехмерном подпространстве, λ — угол между нормалью $\mathbf{N}$ и $\mathbf{n}$,

$$N_k = n_k \cos \lambda, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Ориентацию вектора $\mathbf{S}$ при пропорциональном нагружении в пространстве компонент S_1, S_2, S_3 определяют направляющие косинусы n_k^0 . Ориентация нормали $\mathbf{n}$ задается в сферической системе координат, связанной с вектором нагружения $\mathbf{S}$ с помощью углов β и α (β — угол между $\mathbf{S}$ и $\mathbf{n}$, α — угол между проекцией $\mathbf{n}$ на плоскость W , перпендикулярную $\mathbf{S}$, и линией L — линией пересечения указанной плоскости W с координатной плоскостью S_1OS_2). Такой выбор координатных углов фактически приводит к совмещению координатной оси с вектором нагружения $\mathbf{S}$ и к упрощенному представлению направляющих косинусов n_k нормали $\mathbf{n}$ через направляющие косинусы вектора нагружения n_k^0 (вследствие инвариантности относительно угла α) [2].

В базовой синтетической теории пластичности воздействие вектора нагружения приводит к перемещению плоскостей пространства девиаторов как жесткого целого (каждой плоскости отвечает точка в координатном пространстве α, β, λ) и тем обуславливает трансформацию поверхности нагружения; указанная поверхность и границы ее трансформированной области определяются из условия пластичности [2]. В настоящей модели уровень температуры и вектор нагружения задают область реализации мартенситного перехода в пространстве угловых координат α, β, λ . Точные границы области могут быть найдены из (1).

При переходе к макроуровню и усреднении микродеформаций рассмотренная система координат позволяет записать выражение для компонент вектора деформации (строится в пятимерном пространстве девиаторов аналогично вектору нагружения) на макроуровне в виде

$$\epsilon_k^\Phi = \int_0^t \iiint_{\Omega} N_k \dot{\varphi} f(\Omega) ds d\Omega, \quad (5)$$

где $\Omega(\alpha, \beta, \lambda)$ — область, в которой проходит фазовая реакция ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \lambda \leq \pi/2$); $f(\Omega)$ — параметр макроанизотропии. Для макроизотропной среды $f(\Omega) = 1/(2\pi^2)$.

Учитывая (4) и способ задания координатных углов, получим

$$\epsilon_k^\Phi = \frac{n_k^0}{2\pi^2} \int_0^t \iiint_{\alpha \beta \lambda} \dot{\varphi} \cos^2 \beta \cos \lambda \sin \beta d\alpha d\beta d\lambda dS. \quad (6)$$

Согласно сделанным предположениям, рассмотренную выше эффективную температуру реакции можно задать в виде, аналогичном [3]:

$$\dot{T}^* = \dot{T} - \frac{T_0}{q_0} D_{13}(\dot{\mathbf{S}}, \mathbf{N}). \quad (7)$$

Здесь q_0 — тепловой эффект реакции; T_0 — температура термодинамического равновесия фаз; второе слагаемое правой части, так же как и в [3], отвечает работе микронапряжений, выполненной на сдвиговой деформации решетки.

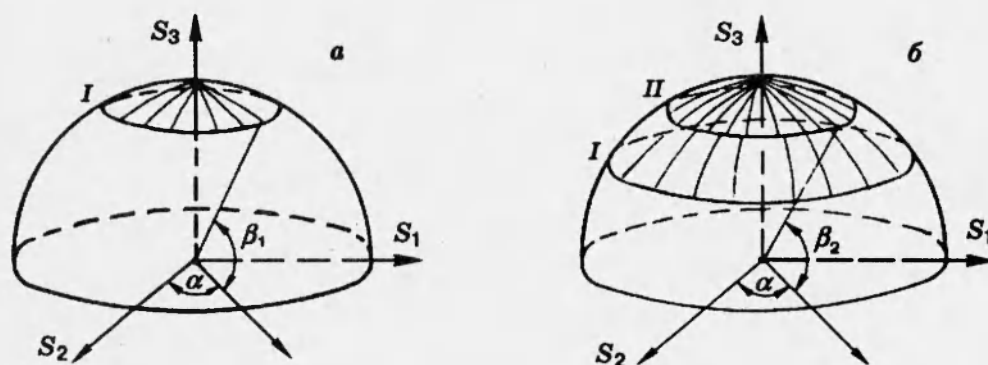


Рис. 3

Исходя из (4), свойств скалярного произведения векторов $\dot{S}$, N и способа определения углов β , λ , соотношение (7) можно переписать:

$$\dot{T}^* = \dot{T} - \frac{T_0}{q_0} D_{13} |\dot{S}| \cos \beta \cos \lambda. \quad (8)$$

Рассмотренные соотношения (1), (2), (6), (8) позволяют описать нелинейную деформацию, обусловленную обратимыми мартенситными реакциями первого рода при пропорциональном нагружении.

Реализация модели для случая изотермической мартенситной реакции. Полагаем, что материал пребывает полностью в аустенитном состоянии при $T = \text{const} > M_n$ и на него действует внешняя нагрузка, которая увеличивается со временем. При этом в пространстве, задаваемом углами α , β , λ , возникает область A , где правая часть (8) отрицательна. В этой области T^* уменьшается (происходит «охлаждение»), при некотором нагружении будет выполняться равенство $T^* = M_n$ и начнется прямая реакция. В оставшейся части пространства — области B — выполняется неравенство $T^* > 0$, т. е. происходит «нагрев». Область A , где эффективная температура снижается, ограничена углами $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi/2$, $0 \leq \lambda \leq \pi/2$ и представляет собой верхнюю полусферу (рис. 3). В ней выполняется соотношение

$$\dot{\Phi} = K \dot{S} \cos \beta \cos \lambda H(\Phi_0 - \Phi) H(M_n - T + K S \cos \beta \cos \lambda - \Phi (M_n - M_s))(M_n - M_s)^{-1}, \quad (9)$$

где $S = |\dot{S}|$ — длина вектора $\dot{S}$; $K = T_0 D_{13} / q_0$.

Из соотношения (9), учитывая, что до начала мартенситного перехода $\Phi = 0$, и приравняв аргумент третьей функции Хевисайда к нулю, определим напряжение S_n , при котором начнется фазовая реакция (в точке $\beta = 0$, $\lambda = 0$):

$$S_n = \frac{T - M_n}{K},$$

и граничные углы, задающие область реализации реакции по мере увеличения напряжения (рис. 3, а):

$$\cos \beta_1 = \frac{T - M_n}{K S} = \frac{S_n}{S}, \quad \cos \lambda_1 = \frac{\cos \beta_1}{\cos \beta}. \quad (10)$$

Согласно (8), (10), формула (6) примет вид

$$\varepsilon_k^\Phi = \frac{\bar{K} \bar{D}_{13} n_k^0}{2\pi^2 a} \int_0^t ds \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\beta_1(S)} \cos^2 \beta \sin \beta d\beta \int_0^{\lambda_1(\beta)} \cos^2 \lambda d\lambda$$

при $a = M_H - M_K$.

Обычно полагается $\Phi_0 = 1$. Поскольку в рассматриваемом случае высокотемпературной (аустенитной) сверхупругости может происходить прорастание уже возникших кристаллов мартенсита из подобласти, где идет реакция, в подобласть B , где эта реакция воспрещена, полагаем $\Phi_0 = 2$ [3]. Согласно соотношению (9) и условию $\Phi_0 = 2$, определим напряжение S_0 , при котором реакция в точечной области ($\beta = 0$, $\lambda = 0$) завершается: $S_0 = (T - 2M_H + M_K)/K$, и граничные углы, характеризующие внутреннюю границу области реализации реакции по мере дальнейшего увеличения напряжения (рис. 3, б):

$$\cos \beta_2 = \frac{T - 2M_H + M_K}{KS} - \frac{S_0}{S}, \quad \cos \lambda_2 = \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta}.$$

При усреднении интегрирование ведется по указанной области реализации реакции. Таким образом, на полусфере возникают две области: I , определяемая углами β_1 , β_2 , где выполняются неравенства $0 < \Phi < 2$, и II , определяемая углом β_2 , где $\Phi = 2$ и прямая реакция завершилась.

При $S > S_0$ прирост фазовой деформации задается формулой

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^\Phi = \frac{K D_{13} n_k^0}{6\pi a} & \left[S \left[\arccos \left(\frac{S_H}{S} \right) - \arccos \left(\frac{S_0}{S} \right) \right] + 2 \left(\frac{S_0}{S} \sqrt{S^2 - S_0^2} - \frac{S_H}{S} \sqrt{S^2 - S_H^2} \right) + \right. \\ & \left. + \left(S_H^2 \ln \left| \frac{S + \sqrt{S^2 - S_H^2}}{S_H} \right| - S_0^2 \ln \left| \frac{S + \sqrt{S^2 - S_0^2}}{S_0} \right| \right) \frac{1}{S^3} \right]. \end{aligned}$$

Связь между компонентами вектора деформации и девиатора деформации осуществляется по формулам, аналогичным (3). Полная фазовая деформация (соответственно для чистого сдвига и одноосного растяжения) имеет вид $\varepsilon_{xz} = D_{13}/(\pi\sqrt{3})$, $\varepsilon_{xx} = 2D_{13}/(3\pi)$.

Если теперь, достигнув величины $S = S_m$, начать снижение приложенной нагрузки, то в соответствии с (5) в той же области координатного пространства A произойдет «нагрев», а по достижении эффективной температуры, соответствующей началу обратной реакции, — обратная трансформация мартенсита нагружения в аустенит, которая сопровождается снятием деформации.

При этом обратная реакция начнется вдоль линии $\beta = \beta_2$ (при $S = S_m(T - A_H + 2(A_K - A_H))/(KS_0)$), и далее область ее реализации распространится вверх по области, где прямая реакция уже завершилась и $\Phi = 2$, и вниз по области, где $0 < \Phi < 2$. Обратная реакция охватит всю область II (дойдет до ее верхней точки $\beta = 0$) при $S = (T - A_H + 2(A_K - A_H))/K$ и дойдет до нижней границы области I , определяемой линией $\beta = \beta_1$ при $S = S_m(T - A_K)/(KS_H)$. Прекращение обратной трансформации мартенсита (вследствие его полного перехода в аустенит) начнется от линии $\beta = \beta_1$ и полностью прекратится при $S = (T - A_K)/K$. Выражения для граничных углов и деформации, возвращающейся при нагрузке, имеют вид, подобный соответствующим формулам для нагружения.

Приведение определяющих соотношений модели к соотношениям деформационной теории. Формулу (6) можно представить в виде

$$\varepsilon_k^\Phi = n_k^0 F(S). \quad (11)$$

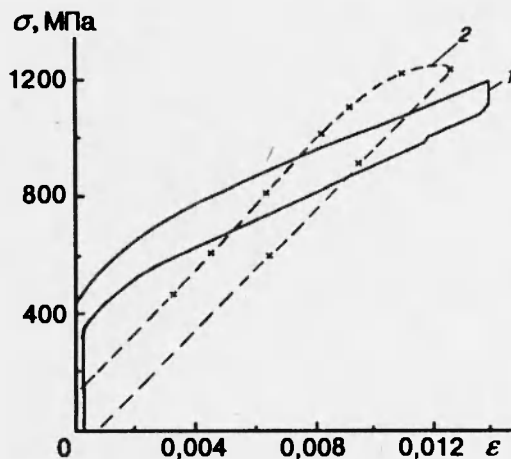


Рис. 4

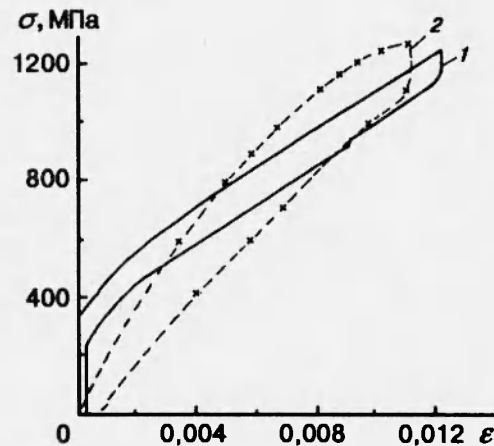


Рис. 5

Учитывая, что для компоненты фазовой деформации выполняется соотношение $\sqrt{\varepsilon_k^\Phi \varepsilon_k^\Phi} = (\sqrt{3}/2) \gamma^\Phi$ (γ^Φ — интенсивность деформаций сдвига, вызванных фазовыми реакциями), получаем $\gamma^\Phi = (2\sqrt{2}/3) F(S)$.

Принимая во внимание, что $S = (3/\sqrt{2}) \tau$ (τ — интенсивность касательных напряжений), формулу (11) преобразуем к виду $\varepsilon_k^\Phi = \gamma^\Phi S n_k^0 / (2\tau)$.

Добавляя упругие составляющие деформации и переходя от компонент вектора к компонентам девиатора, запишем $e_{ij} = S_{ij} / (2G'(\tau))$, $G'(\tau) = \gamma^\Phi / \tau + 1/G$ (G — упругий модуль сдвига).

Таким образом, при сделанных выше предположениях определяющие соотношения модели принимают вид, аналогичный деформационной теории пластичности [11].

Универсальную зависимость между τ и γ^Φ представим как

$$\gamma = \frac{\tau}{G} + \frac{\sqrt{2} K D_{13}}{9\pi (M_H - M_K)} \left\{ S \left[\arccos \left(\frac{S_H}{S} \right) - \arccos \left(\frac{S_0}{S} \right) \right] + \left[S_H^3 \ln \left| \frac{S + \sqrt{S^2 - S_H^2}}{S} \right| - S_0^3 \ln \left| \frac{S + \sqrt{S^2 - S_0^2}}{S_0} \right| \right] / S^3 + 2 \left[S_0 \sqrt{S^2 - S_0^2} - S_H \sqrt{S^2 - S_H^2} \right] \right\},$$

где γ — интенсивность деформаций сдвига.

Сравнение с экспериментом. Расчеты проводились для железоникелевых сплавов, в которых имеет место обратимое $\alpha \rightleftharpoons \gamma$ превращение. На рис. 4–7 показаны результаты расчетов диаграмм $\sigma - \varepsilon$ при одноосном растяжении (прогиб пластического образца, нагруженного по схеме трехточечного изгиба) и разгрузке для сплава Ni29Co19Ti6Fe при различных температурах выдержки: $T = 293; 273; 263; 243$ К (рис. 4–7 соответственно). Характеристические температуры реакции принимались согласно данным [12]: $M_H = 225$ К, $M_K = 150$ К, $A_H = 162$ К, $A_K = 237$ К. При расчетах брали $T_0 = 160$ К, $K = 0,173$.

Как следует из рисунков, достигнуто хорошее качественное и количественное соответствие расчетных результатов (кривые 1) экспериментальным (кривые 2 [12]).

Выводы. Принципы, положенные в основу концепции скольжения, могут быть использованы при разработке современных феноменологических моделей нелинейной дефор-

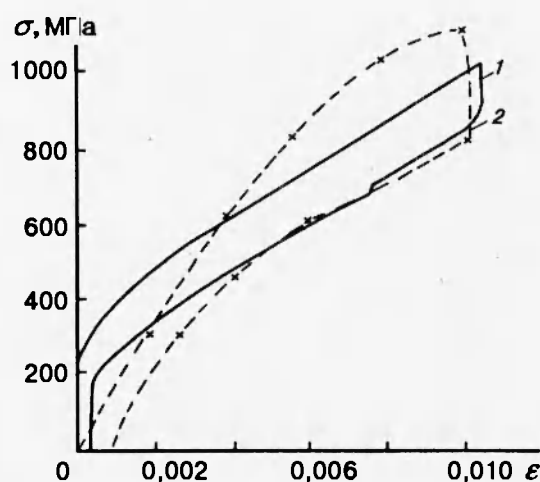


Рис. 6

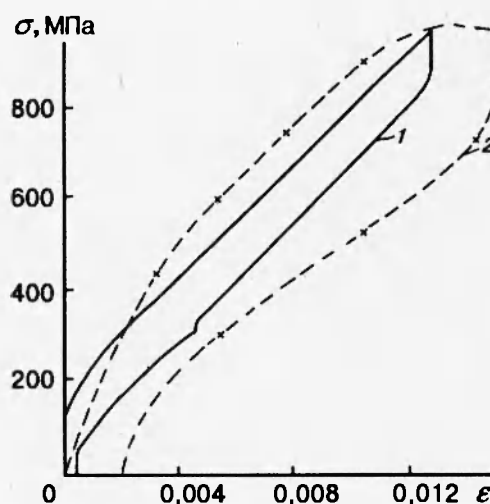


Рис. 7

мации поликристаллов, имеющей различную природу.

Среди подходов, сформулированных в русле положений концепции скольжения, синтезный подход представляется одним из наиболее эффективных и математически обоснованных.

Предлагаемая синтезная модель фазовой деформации использована для описания обратимой изотермической мартенситной реакции. Описан процесс накопления и возврата деформации при нагружении и разгрузке. Учет микроструктурных особенностей мартенситных преобразований ведет к отображению макрозакономерностей деформационного поведения поликристаллических материалов. Применение изложенного выше способа усреднения позволяет аналитически описать обратимое формоизменение материала для различных видов напряженного состояния. Строится универсальная зависимость между интенсивностью касательных напряжений и интенсивностью деформаций сдвига, определяющие соотношения модели приводятся к виду, аналогичному соотношениям деформационной теории пластичности. Получено хорошее количественное соответствие данным эксперимента.

Помимо рассмотренного перехода, в рамках данной модели могут быть описаны фазовые реакции первого рода, которые осуществляются в иных термосиловых условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Русинко К. Н. Современные проблемы теории пластичности и ползучести // Техн. новости. 1994. № 1(2, 3). С. 69–72.
2. Андрусик Я. Ф., Русинко К. Н. Пластическое деформирование упрочняющихся материалов при нагружении в трехмерном подпространстве пятимерного пространства девиаторов // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 92–101.
3. Лихачев В. А., Малинин В. Г. Структурно-аналитическая теория прочности. С.-Петербург: Наука, 1993.
4. Perkins J. Shape memory effects associated with strain reversible martensitic deformation: correlation of structural features and mechanical behaviour // Мартенситные превращения. Киев: Наук. думка, 1978. С. 160–165.

5. Лихачев В. А., Кузьмин С. Л., Каменцева З. П. Эффект памяти формы. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987.
6. Бойко В. С., Гарбер Р. И., Косевич А. М. Обратимая пластичность кристаллов. М.: Наука, 1991.
7. Эффект памяти формы в сплавах. М.: Metallurgia, 1979.
8. Хандрос Л. Г. О природе эффектов сверхупругости и памяти формы // Мартенситные превращения. Киев: Наук. думка, 1978. С. 146–150.
9. Батдорф С. Б., Будянский Б. В. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // Механика. 1962. № 1. С. 135–155.
10. Ильюшин А. А. Теория пластичности. М.: Наука, 1963.
11. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
12. Кокорин В. В. Термоупругий мартенсит в сплавах на Fe–Ni основе // Фазовые превращения мартенситного типа. Киев: Наук. думка, 1993. С. 179–187.

Поступила в редакцию 24/IV 1995 г.
