

УДК 532.517.2: 536.25

Разработка и исследование сильнонеравновесной модели теплообмена в жидкости с учетом пространственно-временной нелокальности и диссипации энергии*

В.А. Кудинов, А.В. Еремин, И.В. Кудинов

Самарский государственный технический университет

E-mail: totig@yandex.ru

Путем релаксации теплового потока и градиента температуры в формуле закона Фурье для теплового потока при использовании уравнения теплового баланса получено дифференциальное уравнение теплообмена с учетом диссипации энергии и пространственно-временной нелокальности. Исследование численного решения задачи теплообмена при ламинарном течении жидкости в плоском канале показало невозможность мгновенного принятия граничного условия первого рода — процесс его установления при малых значениях коэффициентов релаксации занимает некоторый конечный отрезок времени, продолжительность которого определяется теплофизическими и релаксационными свойствами жидкости. При больших значениях коэффициентов релаксации принятие граничного условия первого рода возможно лишь при $Fo \rightarrow \infty$. Учет теплоты трения приводит к изменению температурных профилей, связанному с возникновением участков повышенных температур в зоне максимальных градиентов скорости. С увеличением коэффициентов релаксации происходит сглаживание профилей температур, и при некоторых больших их значениях охлаждение жидкости происходит при безградиентном по поперечной пространственной переменной изменении температуры и, следовательно, температура оказывается зависящей лишь от времени и от продольной координаты.

Ключевые слова: локально-неравновесное уравнение энергии, пространственно-временная нелокальность, коэффициенты релаксации, ламинарное течение в плоском канале, диссипация энергии.

В основе классической теории процессов переноса лежат принцип локального термодинамического равновесия и гипотеза сплошной среды. Исходя из указанного принципа, в любом малом элементе среды предполагается наличие состояния локального равновесия, тогда как в системе в целом могут наблюдаться градиенты температур, концентраций и т.д. Такое состояние возможно в случае, когда скорость нарушения равновесия, вызванного граничными условиями, значительно меньше скорости релаксации системы к локальному равновесию. Следовательно, принцип локального равновесия может быть принят лишь для моментов времени и величин макромасштаба, значительно превышающих время релаксации (время свободного пробега молекул) и характерный микромасштаб системы (длина их свободного пробега). Однако любой процесс переноса является нелокальным, так как перенос энергии (массы, импульса и проч.) из одной точки среды в другую происходит не мгновенно, а за некоторый конечный отрезок времени.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части гос. задания ФГБОУ ВО «СамГТУ» (код проекта: 1.5551.2017/8.9).

Таким образом, принимая принцип локального равновесия, конечной скоростью протекания процесса можно пренебречь [1–15].

Рассмотрим вывод дифференциального уравнения, в котором учитывается пространственно-временная нелокальность применительно к нестационарному теплообмену при ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости в плоскопараллельном канале с учетом теплоты трения. При выводе классического уравнения (без учета пространственно-временной нелокальности) формулы для теплового потока имеют вид [16]

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \rho \omega_x i, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho \omega_y i, \quad (1)$$

где q_x, q_y — компоненты теплового потока по осям x и y ; ω_x, ω_y — компоненты скорости течения жидкости в направлениях продольной (x) и поперечной (y) осей плоскопараллельного канала, i — теплосодержание (энтальпия жидкости), λ, ρ — коэффициент теплопроводности и плотность жидкости соответственно, T — температура, x, y — координаты.

Подставляя соотношения (1) в уравнение теплового баланса

$$\rho \partial i / \partial t = -(\partial q_x / \partial x + \partial q_y / \partial y) + \mu (\partial \omega_x / \partial y)^2, \quad (2)$$

находим

$$\rho \frac{\partial i}{\partial t} + \rho \omega_x \frac{\partial i}{\partial x} + \rho \omega_y \frac{\partial i}{\partial y} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right)^2, \quad (3)$$

где t — время, μ — динамическая вязкость, c — теплоемкость.

Пренебрегая конвективным переносом теплоты в поперечном направлении ($\rho \omega_y \partial i / \partial y = 0$) и теплопроводностью — в продольном ($\lambda \partial^2 T / \partial x^2 = 0$), с учетом того, что $\partial i = c \partial T$, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \omega_x \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{c \rho} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right)^2, \quad (4)$$

где $a = \lambda / (c \rho)$ — коэффициент температуропроводности. Уравнение (4) представляет собой классическое уравнение теплообмена (уравнение энергии) в жидкости, движущейся в плоскопараллельном канале, с учетом диссипации энергии. Оно является параболическим и, следовательно, описывает бесконечную скорость распространения теплоты. Это связано с тем, что в формулах (1) тепловые потоки q_x, q_y и градиенты температур (движущие силы) $\partial T / \partial x$ и $\partial T / \partial y$ не разделены во времени. Соответственно любое изменение движущих сил приводит к мгновенному изменению тепловых потоков. Кроме того, из формул (1) следует, что применительно к решению краевых задач при граничных условиях первого рода тепловые потоки на границах в начальный момент времени имеют бесконечно большие величины [13–15]. Однако отметим, что в любом реальном процессе не могут наблюдаться как бесконечные скорости распространения каких угодно величин, так и бесконечные значения каких-либо параметров. Рассмотрим вывод уравнения теплообмена, свободного от указанных недостатков. Для этого формулы (1) представим, следуя [12], в виде

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_1 \frac{\partial q_x}{\partial t} - \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + \rho \omega_x i, \quad (5)$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \tau_1 \frac{\partial q_y}{\partial t} - \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial t} + \rho \omega_y i, \quad (6)$$

где τ_1, τ_2 — постоянные времени. Подставляя (5) и (6) в (2), получим

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial i}{\partial t} + \rho \omega_x \frac{\partial i}{\partial x} + \rho \omega_y \frac{\partial i}{\partial y} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \\ + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) + \lambda \tau_2 \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 T}{\partial y^2 \partial t} \right) + \mu \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Пренебрегая конвективным переносом теплоты в поперечном направлении ($\rho \omega_y \partial i / \partial y = 0$) и теплопроводностью — в продольном ($\lambda \partial^2 T / \partial x^2 = 0$), учитывая (2) и равенство $\partial i = c \partial T$, находим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \omega_x \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + a \tau_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\mu}{c \rho} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right)^2. \quad (8)$$

Очевидно, что при $\tau_1 = \tau_2 = 0$ уравнение (8) приводится к виду (4).

Найдем решение уравнения (8) при следующих краевых условиях:

$$T(x, y, 0) = T_n, \quad (9)$$

$$\partial T(x, y, 0) / \partial t = 0, \quad (10)$$

$$T(0, y, t) = T_0, \quad (11)$$

$$\partial T(0, y, t) / \partial x = 0, \quad (12)$$

$$\partial T(x, 0, t) / \partial y = 0, \quad (13)$$

$$T(x, \delta, t) = T_{ct}, \quad (14)$$

где T_n — начальная температура жидкости, T_0 — температура жидкости на входе в канал, T_{ct} — температура жидкости на стенке (теплопроводностью стенки пренебрегается), δ — ширина плоского канала.

При ламинарном установившемся течении жидкости в плоском канале распределение скорости по координате y (в любой точке координаты x) определяется по соотношению $\omega_x = 3\omega_{cp}(1 - y^2 / \delta^2) / 2$, где ω_{cp} — средняя скорость течения жидкости [17], см. рис. 1.

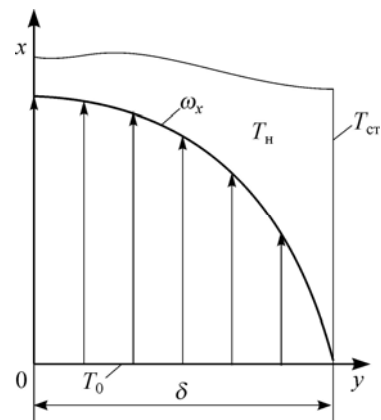
Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = \frac{T - T_{ct}}{\mu \omega_{cp}^2 / \lambda}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}, \quad \text{Fo} = \frac{at}{\delta^2}, \quad \text{Fo}_1 = \frac{a \tau_1}{\delta^2}, \quad \text{Fo}_2 = \frac{a \tau_2}{\delta^2},$$

$$\xi = \frac{2}{3} \cdot \frac{ax}{\delta^2 \omega_{cp}}, \quad \text{Pe} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{\delta \omega_{cp}} \right)^2,$$

где Θ — безразмерная температура, η, ξ — безразмерные поперечная и продольная координаты, Fo — число Фурье (безразмерное время), Fo_1, Fo_2 — безразмерные коэффициенты релаксации соответственно теплового потока и скалярной величины градиента температуры, Pe — число Пекле (безразмерный комплекс).

Рис. 1. Схема теплообмена при ламинарном течении жидкости в плоскопараллельном канале.



С учетом принятых обозначений задача (8)–(14) приводится к виду

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} + \text{Fo}_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \text{Fo}^2} + (1 - \eta^2) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + \text{Fo}_2 \frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} \text{Pe} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} \right) + 9\eta^2, \quad (15)$$

$$(\text{Fo} > 0, \quad \xi > 0, \quad 0 < \eta < 1),$$

$$\Theta(\xi, \eta, 0) = \frac{T_{\text{H}} - T_{\text{ст}}}{\mu \omega_{\text{cp}}^2 / \lambda}, \quad (16)$$

$$\partial \Theta(\xi, \eta, 0) / \partial \text{Fo} = 0, \quad (17)$$

$$\Theta(0, \eta, \text{Fo}) = \frac{T_0 - T_{\text{ст}}}{\mu \omega_{\text{cp}}^2 / \lambda}, \quad (18)$$

$$\partial \Theta(0, \eta, \text{Fo}) / \partial \xi = 0, \quad (19)$$

$$\partial \Theta(\xi, 0, \text{Fo}) / \partial \eta = 0, \quad (20)$$

$$\Theta(\xi, 1, \text{Fo}) = 0. \quad (21)$$

Для решения задачи (15)–(21) методом конечных разностей в рассматриваемой области введем пространственно-временную сетку с шагами $\Delta \xi$, $\Delta \eta$, ΔFo по переменным ξ , η , Fo соответственно так, что

$$\xi_i = i \Delta \xi, \quad i = \overline{0, I}; \quad \eta_j = j \Delta \eta, \quad j = \overline{0, J}; \quad \text{Fo}_k = k \Delta \text{Fo}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (22)$$

где I, J, K — число шагов по координатам ξ, η, Fo . На сетке (22) введем сеточные функции $\Theta_{i,j}^k = \Theta(\xi_i, \eta_j, \text{Fo}_k)$. С использованием принятой схемы аппроксимации дифференциальных операторов задача (15)–(21) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta_{i,j}^k - \Theta_{i,j}^{k-1}}{\Delta \text{Fo}} + \text{Fo}_1 \frac{\Theta_{i,j}^{k-1} - 2\Theta_{i,j}^k + \Theta_{i,j}^{k+1}}{\Delta \text{Fo}^2} + (1 - \eta_j^2) \frac{\Theta_{i+1,j}^k - \Theta_{i,j}^k}{\Delta \xi} = \\ & = \frac{\Theta_{i,j-1}^k - 2\Theta_{i,j}^k + \Theta_{i,j+1}^k}{\Delta \eta^2} + \text{Fo}_2 \left(\text{Pe} \frac{\Theta_{i-1,j}^k - 2\Theta_{i,j}^k + \Theta_{i+1,j}^k - \Theta_{i-1,j}^{k-1} + 2\Theta_{i,j}^{k-1} - \Theta_{i+1,j}^{k-1}}{\Delta \text{Fo} \Delta \xi^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\Theta_{i,j-1}^k - 2\Theta_{i,j}^k + \Theta_{i,j+1}^k - \Theta_{i,j-1}^{k-1} + 2\Theta_{i,j}^{k-1} - \Theta_{i,j+1}^{k-1}}{\Delta \text{Fo} \Delta \eta^2} \right) + 9\eta_j^2, \quad (23) \end{aligned}$$

$$\Theta_{i,j}^0 = \Theta_{\text{H}}, \quad (24)$$

$$\Theta_{i,j}^0 = \Theta_{i,j}^1, \quad (25)$$

$$\Theta_{0,j}^k = \Theta_0, \quad (26)$$

$$\Theta_{0,j}^k = \Theta_{1,j}^k, \quad (27)$$

$$\Theta_{i,0}^k = \Theta_{i,1}^k, \quad (28)$$

$$\Theta_{i,J}^k = 0. \quad (29)$$

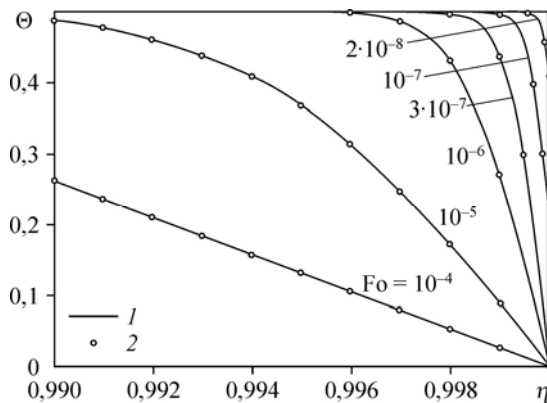


Рис. 2. Распределение температуры по ширине канала без учета диссипации энергии. $\xi = 5 \cdot 10^{-5}$, $Fo_1 = Fo_2 = 10^{-7}$, $Pe = 10^{-7}$, $\Theta_H = 0,5$; 1 — метод конечных разностей, 2 — точное решение [12, 13].

Выполним анализ результатов расчетов изложенным численным методом. На рис. 2 изображено распределение температур в жидкости при малых значениях поперечной координаты ($0,99 \leq \eta \leq 1,0$) для отдельных величин числа Фурье при $\xi = 5 \cdot 10^{-5}$ без учета диссипации энергии. Анализ полученных результатов позволяет отметить интересную особенность теплообмена при задании граничных условий первого рода (тепловой удар) на стенке в случае, когда учитываются релаксационные свойства среды. Так, несмотря на выполнение граничного условия первого рода ($\Theta(\xi, 1, Fo) = 0$), непосредственно в точке $\eta = 1$ и в бесконечно малой окрестности этой точки, например, при $\eta = 0,9999$, температура стенки не принимает температуру $\Theta(\xi, 1, Fo) = 0$ мгновенно, то есть непосредственно при $Fo = 0$. В частности, для того чтобы температура стенки приняла температуру $\Theta(\xi, 1, Fo) = 0$, требуется некоторый промежуток времени, равный $Fo = 10^{-4}$ (при $Fo_1 = Fo_2 = 10^{-7}$). Полученные данные полностью согласуются с результатами точного аналитического решения, приведенного в работах [13, 14]. Таким образом, при решении уравнений теплообмена, учитывающих релаксационные свойства жидкости, исследуемая среда не принимает граничное условие теплового удара мгновенно, а лишь в течение некоторого конечного интервала времени. Следовательно, в реальных условиях теплообмена величина коэффициента теплоотдачи при теплообмене текущей жидкости с окружающей средой не может превышать некоторого верхнего предела, определяемого физическими свойствами жидкости, вне зависимости от интенсивности внешнего теплообмена [14, 15, 18].

При увеличении чисел Fo_1 и Fo_2 (без учета диссипации энергии) температурные кривые становятся более пологими, и при $Fo_1 = Fo_2 > 5$ они располагаются практически параллельно оси η (см. рис. 3). Скачок температуры в окрестности точки $\eta = 1$ в этом случае имеет место практически для всех чисел Fo вплоть до наступления стационарного состояния.

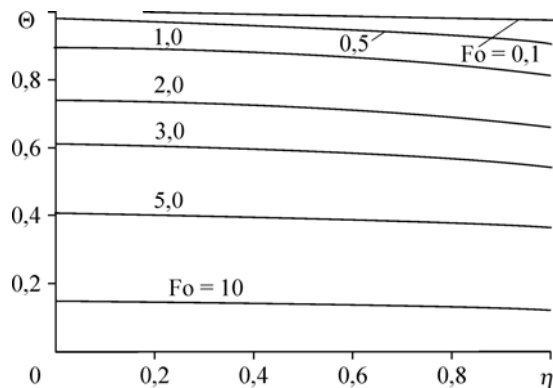


Рис. 3. Распределение температуры по ширине канала без учета диссипации энергии. $Fo_1 = Fo_2 = 5$, $\Theta_H = 1$, $\xi = \rightarrow \infty$.

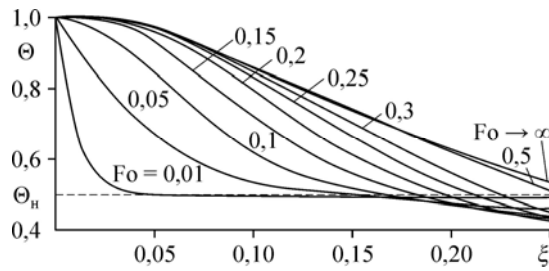


Рис. 4. Распределение температуры по длине канала с учетом диссипации энергии и релаксационных свойств жидкости.

$$\Theta_n = 0,5, \eta = 0, Fo_1 = Fo_2 = 10^{-4}, Pe = 10^{-7}.$$

На рис. 4 приводятся результаты расчетов распределения температуры в диапазоне продольной координаты $0 \leq \xi \leq 0,25$ для центра канала ($\eta = 0$) при $Fo_1 = Fo_2 = 10^{-4}$, $Pe = 10^{-7}$, то есть с учетом релаксационных свойств жидкости и диссипации энергии. Их анализ позволяет заключить, что для значений $\xi \leq 0,17$ граничное условие первого рода, заданное в точке $\eta = 1,0$, до $Fo = 0,05$ практически не влияет на температуру в центральной части канала. Аналогичные результаты для этого же диапазона продольной координаты ξ приведены на рис. 5 для $\eta = 0,9$. Их анализ приводит к заключению, что в интервале времени $0 < Fo \leq 0,05$ граничное условие первого рода оказывает существенное влияние на распределение температуры (ввиду близости координаты $\eta = 0,9$ к точке $\eta = 1$, где задано граничное условие первого рода).

Если начальная температура жидкости, температура на стенке и на входе в канал равны ($T_n = T_{ст} = T_0$), то процесс нагрева будет происходить лишь вследствие диссипации энергии (рис. 6). Температура будет изменяться до тех пор, пока количество теплоты, отводимое через стенку канала, не будет равно количеству теплоты, выделяющемуся в потоке. В этом случае, начиная с некоторого значения безразмерного времени $Fo = 5$, температура жидкости перестанет изменяться, то есть наступит стабилизация температурного состояния.

При учете диссипации энергии при малых значениях коэффициентов релаксации участки повышенных температур жидкости наблюдаются в диапазоне поперечной координаты $0,6 \leq \eta \leq 0,8$. С увеличением коэффициентов релаксации происходит сглаживание

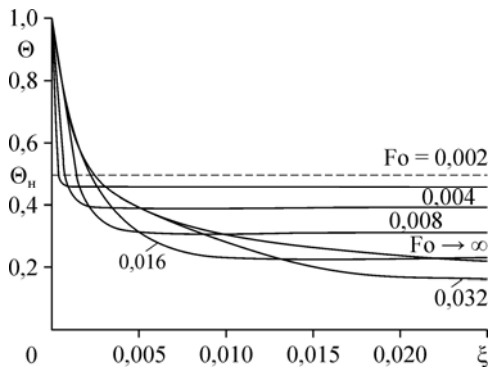


Рис. 5. Распределение температуры по длине канала с учетом диссипации энергии и релаксационных свойств жидкости.

$$\Theta_n = 0,5, \eta = 0,9, Fo_1 = Fo_2 = 10^{-4}, Pe = 10^{-7}.$$

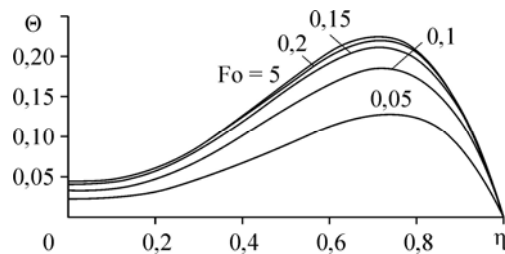


Рис. 6. Распределение температуры по ширине канала с учетом диссипации энергии и релаксационных свойств жидкости.

$$\xi = 0,05, Fo_1 = Fo_2 = 10^{-4}, Pe = 10^{-7}, T_n = T_{ст} = T_0 = 0.$$

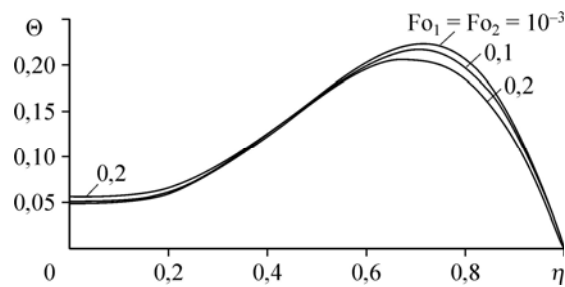


Рис. 7. Распределение температуры по ширине канала с учетом диссипации энергии при различных значениях коэффициентов релаксации.

$$Fo_1 = Fo_2, \xi = 0,05, Pe = 10^{-7}, T_n = T_{ct} = T_0 = 0.$$

профиля температуры с уменьшением ее максимальной величины. В частности, из графиков рис. 7 следует, что для $\xi = 0,05$ и $Fo = 0,5$ с увеличением коэффициентов релаксации $Fo_1 = Fo_2$ происходит выпрямление кривых профиля температуры.

Список литературы

1. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
2. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974. 303 с.
3. Соболев С.Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // Успехи физических наук. 1991. Т. 161, № 3. С. 5–29.
4. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса // Успехи физических наук. 1997. Т. 167, № 10. С. 1096–1106.
5. Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»: Институт компьютерных исследований, 2006. 528 с.
6. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: системно-структурный подход. Изд. 2-ое, доп. М.: Едиториал УРСС, 2004. 296 с.
7. Sobolev S.L. Nonlocal diffusion models: Application to rapid solidification of binary mixtures // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2014. No. 71. P. 295–302.
8. Тёмкин А.Г. Обратные методы теплопроводности. М.: Энергия, 1973. 464 с.
9. Cattaneo G. Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantanee // Comptes Rendus. 1958. Vol. 247, No. 4. P. 431–433.
10. Бубнов В.А. Замечания к волновым уравнениям теории теплопроводности // Инженерно-физический журнал. 1975. Т. 28. С. 670–676.
11. Vernott P. Les paradoxe de la theorie continue de l'equation de la chaleur // Comptes Rendus. 1958. Vol. 246, No. 22. P. 3154–3155.
12. Еремин А.В., Кудинов В.А., Кудинов И.В. Математическая модель теплообмена в жидкости с учетом ее релаксационных свойств // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 1. С. 33–44.
13. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50, № 1. С. 118–125.
14. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Исследование теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 4. С. 301–310.
15. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Получение точных аналитических решений гиперболических уравнений движения при разгонном течении Куэтта // Известия РАН Энергетика. 2012. № 1. С. 119–133.
16. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. М.: Энергия, 1969. 440 с.
17. Цой П.В. Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса. М.: Изд-во МЭИ, 2005. 568 с.
18. Баумейстер К., Хамилл Т. Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи в полубесконечном теле // Теплопередача. 1969. № 4. С. 112–119.

Статья поступила в редакцию 27 февраля 2017 г.