

Рассмотрим более подробно взрыв заряда массой 1 кг на высоте $H''=138$ км. Начальный радиус ударной волны на этой высоте $R=5,8 \cdot 10^3 r_0=330$ км. В момент образования ударной волны энергия воздуха во фронте ударной волны составляет около $0,9E_0$, остальная энергия сосредоточена в кинетической энергии продуктов взрыва. Масса газа во фронте ударной волны равна 740 г из них примерно 600 г вытеснено во фронт ударной волны продуктами взрыва.

6. Представляет интерес сравнить результаты, полученные на основе рассматриваемой физической модели, с результатами экспериментальных исследований явления формирования ударной волны, возникающей при взаимодействии мощного лазерного импульса с твердым веществом в разреженном газе [14, 15]. В условиях эксперимента [14] $E_0=3$ Дж, $u=1,4$ км/с. Полагая $\gamma=1,25$, из выражения (9) получим $p''=0,1$ торр, что соответствует давлению воздуха ($0,1 \div 0,2$ торр), при котором в опытах [14] обнаружено резкое уменьшение яркости свечения воздуха за фронтом ударной волны. Быстрое снижение скорости формирующейся ударной волны при $p \leq p''$ совместно с уменьшением плотности газа приводит к резкому уменьшению яркости свечения воздуха, обнаруженному в работах [14, 15].

Поступила в редакцию
3/VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. G. W. Stuart. Phys. Fluids, 1965, 8, 603.
2. M. N. Klein. Phys. Fluids, 1968, 11, 964.
3. L. N. Holway, Jr. Phys. Fluids, 1969, 12, 2506.
4. G. W. Stuart. Phys. Fluids, 1971, 14, 199.
5. L. N. Holway, Jr. Phys. Fluids, 1971, 14, 200.
6. H. L. Brode, J. E. Enstrom. Phys. Fluids, 1972, 15, 1913.
7. G. Bienkowski. Phys. Fluids, 1964, 7, 382.
8. G. V. Groves. J. Geophys. Res., 1963, 68, 3033.
9. Ю. А. Медведев, В. Д. Хохлов. ПМТФ, 1973, 5, 48.
10. H. M. Mott-Smith. Phys. Rev., 1951, 82, 885.
11. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
12. К. Е. Губкин. — В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. М., «Наука», 1970.
13. П. Чедвик, А. Кокс, Г. Голсинс. Механика глубоких подземных взрывов. М., «Мир», 1966.
14. Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, Г. В. Склизков. Квантовая радиофизика. Тр. Физ. ин-та АН СССР, т. 52, 1970.
15. J. L. Robin, Y. A. Durand et al. J. Appl. Phys., 1968, 39, 4184.

О ВРАЩАЮЩИХСЯ УДАРНЫХ И ДЕТОНАЦИОННЫХ ВОЛНАХ

Э. И. Андрианкин, А. И. Малкин

(Москва)

Одномерные автомодельные движения ударных и детонационных волн в настоящее время достаточно хорошо изучены [1—4]. Анализировать двумерные автомодельные течения с ударными волнами трудно из-за сложности системы уравнений, зависящих от нескольких автомодельных переменных. Некоторые случаи сокращения числа автомодельных переменных приведены в [2]. Представляет интерес получить полное решение задачи типа [2] и на ее примере отметить особенности

течения, характерные для ряда двумерных задач. Точное решение может служить также тестом для некоторых схем численного счета.

Рассмотренная ниже задача может быть полезной для качественного анализа явлений, происходящих при повороте ударной волны в неоднородной среде, в частности, для выяснения влияния сил инерции, а также в ряде прикладных вопросов конструирования ампул ударно-волнового сжатия.

Автомодельные уравнения

Рассмотрим задачу о течении газа за вращающейся вокруг оси плоской ударной волной в нейтральной или детонирующей среде с переменной плотностью и калорийностью. Такое движение может поддерживаться, например, плоским, вращающимся вокруг оси поршнем. На рис. 1

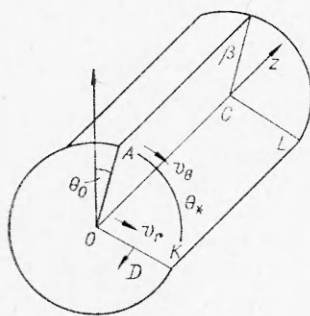


Рис. 1.

изображена схема такого течения: v_r и v_θ — компоненты массовой скорости, D — скорость фронта, представляющего собой вращающуюся вокруг оси z с угловой скоростью ω плоскость $OKLC$, $OABC$ — плоскость поршня, вращающегося с некоторой переменной скоростью, θ_* — угол поворота плоской ударной или детонационной волны, θ_0 — угол поворота поршня.

Будем считать, что начальная плотность среды меняется по степенному закону ($\rho_0 = Ar^\alpha$), скорость вращения волны ω постоянная, волна сильная. В случае детонации предположим, что калорийность единицы массы вещества меняется по закону $Q = Q_0 r^2$ и что за фронтом волны вещество превращается в газ с показателем адиабаты γ . Из размерных постоянных $[A] = \text{г/см}^3 \cdot \text{с}^{-\alpha}$, $[\omega] = \text{с}^{-1}$ и $[Q_0] = \text{с}^{-2}$ нельзя образовать константы с размерностью длины, поэтому решение такой задачи в цилиндрических координатах должно зависеть только от безразмерных переменных ωt , полярного угла θ и параметров α , γ , $\lambda_0 = Q_0/\omega^2$. По аналогии с одномерными стационарными плоскими волнами рассмотрим движение, также зависящее от одной переменной $\xi = \omega t - \theta$,

$$v_r = \omega r \cdot u(\xi), \quad v_\theta = \omega r \cdot v(\xi), \quad a = \omega r \cdot c(\xi), \quad \rho = Ar^\alpha g(\xi),$$

где a — скорость звука. Тогда уравнение газодинамики в безразмерном виде можно записать так:

$$\begin{aligned} (1-v) \cdot du/d\xi + u^2 - v^2 + (\alpha+2)/\gamma \cdot c^2 &= 0, \\ (1-v) \cdot dv/d\xi - 1/\gamma \cdot (dc^2/d\xi + c^2 \cdot d \ln g/d\xi) + 2uv &= 0, \\ (1-v) \cdot d \ln g/d\xi - dv/d\xi + (\alpha+2)u &= 0, \\ (1-v) \cdot d \ln c/d\xi - (\gamma-1)/2 \cdot (1-v) \cdot d \ln g/d\xi + \\ + [1-\alpha(\gamma-1)/2]u &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Граничными условиями для (1) служат законы сохранения на фронте ударной или детонационной волны при $\theta_* = \omega t$, т. е. при $\xi = 0$, и условия равенства угловой составляющей скорости v_θ при $\theta = \theta_0(t)$ скорости поршня $v_0(t)$. В безразмерном виде эти условия запишутся для ударной волны

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 2/(\gamma+1), \quad g(0) = (\gamma+1)/(\gamma-1), \quad c^2(0) = 2\gamma(\gamma-1)/(\gamma+1)^2, \quad (2)$$

$$v(\xi_0) = v_0, \quad \xi_0 = \omega t - \theta_0(t);$$

для детонационной волны, соответствующей точке Жуге на фронте

$$u(0)=0, v(0)=1/(\gamma+1), g(0)=(\gamma+1)/\gamma, \quad (3)$$

$$c^2(0)=\gamma^2/(\gamma+1)^2, v(\xi_0)=v_0.$$

Исключая u из последних двух уравнений системы (1), найдем интеграл адиабатичности [3]

$$g^\gamma(1-v)/c^{\alpha+2}=\text{const}, \quad \mu=1-\alpha(\gamma-1)/2. \quad (4)$$

Исключая при помощи этого интеграла g из первых трех уравнений (1) и разрешая их относительно производных, найдем

$$\begin{aligned} (1-v) \cdot du/d\xi &= v^2 - u^2 - (\alpha+2)/\gamma \cdot c^2, \quad \Delta = -1/2 + (1-v)^2/2c^2, \\ dv/d\xi &= -u/\Delta \{ [\alpha+2(\gamma+1)]/2\gamma + v \cdot (1-v)/c^2 \}, \\ dc^2/d\xi &= u/\Delta \{ v - \gamma + [2 - \alpha(\gamma-1)]/2\gamma \cdot c^2/(1-v) \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Разделив третье уравнение этой системы на второе, после замены переменных ($x=1-v$, $y=c^2/(1-v)$) найдем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{x[1-x+y(\alpha+2+2\gamma)/2\gamma]}{y[\gamma+(1+\alpha/2)y]}, \quad \mu = 1 + \frac{2}{2+\alpha}, \\ \frac{1}{x} &= |y|^{1/\gamma} \left| 1 + \frac{2+\alpha}{2\gamma} y \right|^{\frac{2}{2+\alpha}} \left[C + \frac{1}{\gamma} \int \frac{dy}{y^{1+1/\gamma} \left| 1 + \frac{2+\alpha}{2\gamma} y \right|^\mu} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь перед интегралом надо сохранять знак плюс при $1 + \frac{2+\alpha}{2\gamma} y < 0$ и минус, если $1 + \frac{2+\alpha}{2\gamma} y > 0$. Уравнение (6) допускает также частные решения: 1) $x=0$, 2) $y=0$, 3) $y=-2\gamma/(2+\alpha)$. Из системы (5) видно, что линия $x=y$ особая, так как при этом $\Delta=0$. Согласно (2) и (3), точка, соответствующая фронту волны, всегда лежит между особой линией и осью y .

Переходя в первом уравнении (5) к переменным u^2 и y , представляя производную $du^2/d\xi = du^2/dy \cdot dy/dx \cdot dx/d\xi$ и выражая $dx/d\xi = -dv/d\xi$ из (5), получим уравнение, линейное относительно u^2 ,

$$\frac{\gamma+(1+\alpha/2)y}{1-x/y} \frac{du^2}{dy} + u^2 = (1-x)^2 + \frac{\alpha+2}{\gamma} xy. \quad (7)$$

Поскольку $x=x(y)$, уравнение (7) интегрируется в квадратурах, а зависимость $y(\xi)$ определяется после квадратуры уравнения $dy/d\xi = 1/x(dc^2/d\xi) + y/x(dv/d\xi)$, первая часть которого после подстановки $dc^2/d\xi$ и $dv/d\xi$ из (5) является функцией только y .

Анализ решения

Выясним знак радиальной составляющей скорости на фронте волны. При $\xi=0$ $u(0)=0$, а $1-v(0)>0$, поэтому из первого уравнения (5) видно, что знак производной $du/d\xi$, а с ростом ξ и знак самого u зависит от знака выражения $v^2 - (2+\alpha)/\gamma \cdot c^2$. Подставляя в это выражение $v(0)$ и $c(0)$ из (2), для области вблизи фронта ударной волны получим, что $u>0$, если $\alpha < 2(2-\gamma)/(\gamma-1)$, и $u<0$, если $\alpha > 2(2-\gamma)/(\gamma-1)$. При условиях Жуге на фронте $u>0$, если $\alpha < 1/\gamma-2$, и $u<0$,

если $\alpha > 1/\gamma - 2$. В случае $\alpha = 2(2-\gamma)/(\gamma-1)$ для ударной волны (или при $\alpha = 1/\gamma - 2$ — для детонационной волны) за фронтом волны $u \equiv 0$, а угловая скорость и скорость звука также должны быть постоянными и равными своим значениям на фронте.

Полученные равенства выражают собой тот факт, что движение частицы происходит под воздействием суммы инерционных сил и давления. В зависимости от соотношения между этими силами частица газа движется к оси вращения или от нее. Влияние сил инерции — характерная особенность движения таких волн. Движение газа всегда дозвуковое на фронте может стать сверхзвуковым за счет радиального растекания.

Рассматриваемое движение не может быть ограничено неподвижной стенкой даже в случае детонации, так как при $\theta = 0$ $\xi = \omega t$ и угловая компонента скорости должна зависеть от времени. Автомодельное движение, которое можно было бы сопрячь со стенкой, должно иметь вблизи стенки условие $v \equiv 0$, т. е. $x = 1$. Такое решение возможно лишь в случае $\alpha + 2(\gamma + 1) = 0$. Но тогда из (6) заключаем, что общее решение, которое должно сопрягаться с особым ($x \equiv 1$), имеет вид $x = [1 + Cy^{1/\gamma}(1-y)^{-1/\gamma}]^{-1}$, $C = \text{const}$. Такое решение при $x = 1$ дает $y \rightarrow 0$, что физически бессмысленно, так как это соответствует равенству нулю скорости звука на подвижной границе сопряжения. Ясно также, что решение не может описывать разлет вещества или движение поршня в сторону уменьшения θ в начальные моменты времени, так как при этом ξ_0 невелико и $v(\xi_0)$ мало отличается от $v(0) > 0$.

Таким образом, при заданных α , γ и λ_0 задача соответствует вполне определенному закону движения поршня. Докажем существование устойчивой детонационной волны, вращающейся с постоянной угловой скоростью и движущимся за ней поршнем. При условиях Жуге на фронте $\Delta = -1/2 + [1 - v(0)]^2/2c^2(0)$. Поэтому производные v и c при $\xi \rightarrow 0$ будут ограничены только, если $u/\Delta \rightarrow \text{const}$. Решая уравнение (7) при условиях (3), найдем

$$u^2 = e^{-\Phi} \left[\int_{y_*}^y \frac{(1-x/y)[(1-x)^2 + (2+\alpha)xy/\gamma]}{\gamma + (1+\alpha/2)y} e^{\Phi(y)} dy \right], \quad (8)$$

$$\Phi = \int_{y_*}^y \frac{1-x/y}{\gamma + (1+\alpha/2)y} dy, \quad y_* = y(0).$$

Пусть $\gamma + (1+\alpha/2)y_* \neq 0$. Тогда, разлагая $x = x(y_*) + a_1(y-y_*) + \dots$, $a_1 = (dx/dy)_* = 1/\gamma(\gamma+1)$ и подынтегральное выражение (8) в ряд по степеням $y-y_*$, найдем, что $u \sim y-y_*$, $\Delta \sim y-y_*$ и, следовательно, $dc^2/d\xi \rightarrow \text{const}$, $dv/d\xi \rightarrow \text{const}$ при $\xi \rightarrow 0$. Если $\gamma + (1+\alpha/2)y_* = 0$, то условием на фронте детонационной волны удовлетворяет особое решение $y = y_*$. Разлагая тогда решение по x точно так же, можно убедиться в возможности существования волны с условиями Жуге.

Существование вращающейся детонационной волны с условиями Жуге на фронте не является тривиальным, так как силы инерции в некоторых случаях могли бы вызвать пересжатый режим. Общий характер течения выясним из рассмотрения простейших частных задач.

Интеграл (6) в общем случае в элементарных функциях не берется. Простыми случаями интегрируемости (6) будут: 1) $\alpha = -4$, γ — произвольно, 2) $1/\gamma + (1+\alpha/2)^{-1} > 0$ и целое, 3) $1 + (1+\alpha/2)^{-1} < 0$ и целое, γ — произвольно.

Пусть $\alpha = -4$, тогда интеграл (6), удовлетворяющий условиям на фронте волны (2), дает

$$1/x = \gamma/(\gamma-y), \quad \alpha = -4. \quad (9)$$

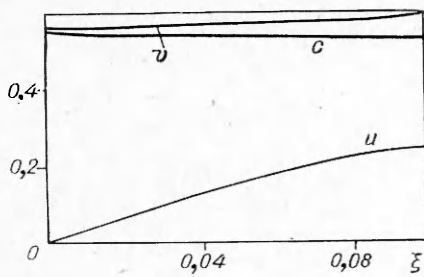


Рис. 2.

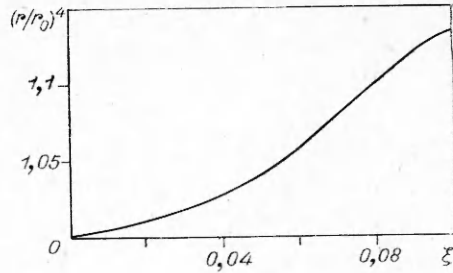


Рис. 3.

Уравнение для u^2 при $\alpha = -4$ интегрируется при любом γ . Пусть $\gamma = 2$, тогда

$$u^2 = y(z-1)/2, \quad c^2 = 2(z+1)(2-z)/9, \quad z = 3/2(y-1), \quad (10)$$

$$\alpha = -4, \quad \gamma = 2.$$

Уравнение для $y(\xi)$ принимает вид $dy/d\xi = 4uy/z$, $y(0) = 4/3$ и легко интегрируется

$$\xi = \sqrt{3}/4 \cdot [\ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) - \sqrt{(z-1)/(z+1)}]. \quad (11)$$

На рис. 2 для случая $\alpha = -4$, $\gamma = 2$ изображены зависимости безразмерных скоростей от автомобильной переменной ξ . Из (10) следует, что за фронтом волны теплосодержание убывает, так как $dc^2/dz < 0$, а плотность растет. Это связано с истечением из центральных областей более холодных и плотных частиц газа, дополнительно охлаждаемых за счет расширения.

Линии тока находятся из уравнения

$$\partial F / \partial t + \omega r u \cdot \partial F / \partial r + \omega v \cdot \partial F / \partial \theta,$$

решение которого в силу автомодельности находим в виде

$$F = \ln r - \varphi(\xi), \quad d\varphi/d\xi = u/(1-v). \quad (12)$$

В случае $\alpha = -4$, $\gamma = 2$ из (11) найдем

$$r^4 = \frac{2r_0^4}{(2-z)^2(z+1)}, \quad (13)$$

где r_0 — начальный радиус лагранжевой частицы в момент прохождения фронта волны. Безразмерный график функции $R = (r/r_0)^4$ в зависимости от ξ изображен на рис. 3. Из (13) следует, что при $z \rightarrow 2$ частица уходит на бесконечность ($r \rightarrow \infty$). Однако это не успевает произойти, так как волна совершает полный оборот за конечное время и ξ всегда ограничено ($0 \leq \xi \leq 2\pi$), но $z \rightarrow 2$ только при $\xi \rightarrow \infty$.

Определим теперь закон движения поршня: $v_0(r, \xi_0) = r\omega v(\xi_0) = rd\theta[\xi_0(t)]/dt$, поэтому

$$d\xi_0/dz_0 \cdot dz_0/d\omega t = d\xi_0/d\omega t = 1 - v(z_0), \quad z_0 = z(\xi_0), \quad (14)$$

$d\xi_0/dz_0$ и $v(z_0)$ известны из (9) и (11). После интегрирования (14) найдем

$$\frac{d\omega t}{dz_0} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 - 1}(z_0 + 1)(2 - z_0)}, \quad (15)$$

$$\omega t = \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1} - 2 + \sqrt{3}}{z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1} - 2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3}) \right\}.$$

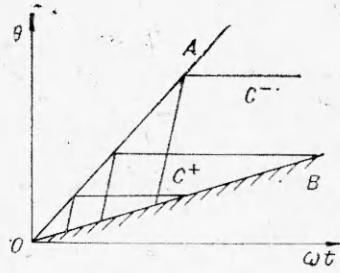


Рис. 4.

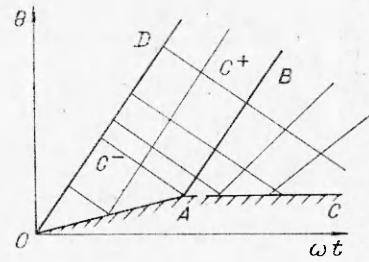


Рис. 5.

Из (15) видно, что $z_0 \rightarrow 2$ только при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, это значение z_0 не достигается, так как $\omega t \leq 2\pi$.

Огибающие $\Phi_0(r, \theta, t) = \text{const}$ решений характеристического уравнения удовлетворяют уравнению

$$\partial \Phi_0 / \partial \omega t + (1-v) \cdot \partial \Phi_0 / \partial \xi = \pm c \cdot \partial \Phi_0 / \partial \xi,$$

решением которого будет

$$\Phi = \omega t - h(\xi), \quad h = \int \frac{d\xi}{1-v \mp c}. \quad (16)$$

Характеристики легко выражаются в случае $\alpha = 2(2-\gamma)/(\gamma-1)$, тогда $h = -(\gamma+1)\xi/[\gamma-1 \mp \sqrt{2\gamma(\gamma-1)}]$. Поэтому уравнения c^+ - и c^- -характеристик при $Q_0 = 0$ соответственно будут

$$\theta_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}{\gamma+1} \omega t + \text{const}. \quad (17)$$

Поле характеристик для случая $\gamma=2$, $\alpha=0$ изображено на рис. 4, где OA — фронт ударной волны $\theta = \omega t$, OB — поршень ($\theta = v(\xi_0)\omega t$), $\theta = 4/3\omega t + \text{const}$ — c^+ -характеристика, $\theta = \text{const}$ — c^- -характеристика. Уравнение для характеристик за детонационными волнами ($Q_0 > 0$) просто интегрируется, если $\alpha = -2 + 1/\gamma$ и, следовательно, $v = 1/(\gamma+1)$, $c = \gamma/(\gamma+1)$. В этом случае c^+ -характеристики определяются уравнением $\theta = \omega t + \text{const}$, а c^- -характеристики уравнением

$$\theta = -(\gamma-1)/(\gamma+1) \cdot \omega t + \text{const}.$$

Поле характеристик в этом случае качественно изображено на рис. 5. Допустим, что в какой-то момент времени поршень, движущийся за детонационной волной, остановился. На рис. 5 видно, что это не влияет на течение вблизи фронта. Однако теперь к этому течению будет примыкать область ABC неавтомодельного решения. Характер течения при этом напоминает плоскую одномерную детонационную волну. Это и не удивительно, так как при $\alpha = -2 + 1/\gamma$ силы инерции уравновешиваются градиентом давления вдоль радиуса.

Изэнтропическое течение за фронтом ударной волны при $\alpha = 2/(\gamma-1)$ с автомодельностью рассмотренного типа может быть потенциальным, но течение за фронтом детонационной волны потенциальным не будет.

Действительно, как следствие $\text{rot } \vec{v} = 0$, запишем в приведенных переменных интеграл Бернулли

$$(u^2 + v^2)/2 + c^2/(\gamma-1) - v = 0. \quad (18)$$

Из (2) видно, что (18) удовлетворяется при условиях на фронте ударной волны и противоречит соотношениям (3) на фронте детонации. Интеграл Бернулли в общем виде можно использовать, например, для решения частных задач о двумерном разлете изэнтропического газа. Аналогично изложенному выше можно найти класс решений с ударными вращающимися волнами, зависящими от одной безразмерной переменной $\eta = \beta \ln \omega(t + \tau) - \theta$, где β и τ — параметры. Однако решения в этом классе задач оказываются более сложными.

На основании изложенного можно сделать следующие выводы. Некоторые двумерные автомодельные решения с ударными и детонационными волнами могут быть выражены в квадратурах. Простые аналитические зависимости, полученные в частных случаях, могут использоваться для опробирования, например, методов численного счета двумерных задач. На характер двумерного течения с ударными и детонационными волнами существенно влияют силы инерции.

Поступила в редакцию
28/VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
2. И. П. Станюкович. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., «Наука», 1971.
3. Л. И. Седов. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1965.
4. Э. И. Андрианкин. ПММ, 1966, 30, 6, 1133.

СВАРКА ВЗРЫВОМ И ЗАДАЧА СТЕФАНА

М. С. Качан, В. Н. Штерн

(Новосибирск)

При сварке взрывом металлических деталей в области шва возникает зона расплава [1, 2]. Тепловой режим сварного шва, имеющий большое практическое значение, анализировался в работах [2—6]. Однако динамика фронтов фазового перехода детально не изучена. Настоящая работа посвящена решению задач типа Стефана [7], связанных с мгновенным локальным выделением тепла, как это бывает, например, при взрыве или высокоскоростном соударении. Рассчитана динамика образования расплавленной зоны и ее затвердевания.

Рассмотрено три случая: выделение тепла на плоскости, на линии и в точке безграничной среды. Первый из них имеет прямое отношение к сварке взрывом. Опытные данные [3] свидетельствуют, что теплота, затрачиваемая на расплавление, выделяется практически на поверхности, по которой происходит соударение двух пластин. Поскольку ширина оплавленной зоны обычно на несколько порядков меньше толщины пластин, простейшая модель соответствующей тепловой задачи может быть сформулирована так: в безграничной среде с равномерной начальной температурой T_0 в момент времени $t=0$ на плоскости $x=0$ происходит выделение тепла с постоянной поверхностной плотностью Q . Теплофизические свойства среды здесь принимаются независимыми от темпера-