ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЙ РЯД ЦИЛИНДРОВ

А. М. Головин, В. А. Лопатин

(Москва)

Рассматривается поток жидкости в системе параллельных цилиндров, расположенных перпендикулярно потоку, при малых числах Рейнольдса.

Из сравнения точного решения для квадратной и гексагональной решеток с решением, полученным при помощи модели ячеек, установлено, что в случае редкой решетки метод ячеек, предложенный Кувабара [1], позволяет правильно рассчитать скорость натекающего потока на одиночный цилиндр, однако вид линий тока существенно зависит от геометрии решетки.

1. Модель ячеек и решение Осеена. В работах [1, 2] задача об обтекании жидкостью конечной системы пространственно однородно расположенных цилиндров рассматривается при помощи так называемой «модели ячеек». Если каждый из цилиндров радиуса a окружить воображаемым коаксиальным цилиндром, радиус которого b определяется соотношением $\pi b^2 n = 1$ (n — число цилиндров на единицу площади поперечного сечения), то предполагается, что выбор простейших, физически правдоподобных граничных условий на поверхности внешнего цилиндра существенно не изменит поля скоростей вблизи внутреннего цилиндра. Необоснованность подобного предположения очевидна уже при сравнении результатов работ [1,2].

По мнению Кувабара [1], на поверхности цилиндра радиуса b исчезает вихрь, а также радиальная компонента скорости движения жидкости в системе отсчета, где жидкость на бесконечности покоится. Последнее допущение означает, что линии тока вдали от цилиндра мало отличаются от окружностей. Относительно первого допущения следует заметить, что, например, для гексагональной решетки оно справедливо лишь в шести точках окружности радиуса, равного половине периода решетки. Это легко видеть из соображений симметрии.

Решение уравнений Стокса в безразмерных полярных координатах r, θ с началом координат на оси цилиндра (r — расстояние до оси цилиндра, θ — угол между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и $\mathbf{U}$) с граничными условиями для компонент скорости

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$
$$v_r = v_\theta = 0 \text{ при } r = a, \qquad v_r = U\cos\theta \text{ при } r = b \tag{1.1}$$
$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta} = 0 \quad \text{при } r = b$$

приводят к следующему выражению для функции тока:

$$\psi(r,\theta) = \frac{Ua\sin\theta}{2}\left(-\frac{\ln\varepsilon}{2} + \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{3}{4}\right)^{-1} \times$$
$$\times\left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{a}{r} - (1-\varepsilon)\frac{r}{a} + 2\frac{r}{a}\ln\frac{r}{a} - \frac{\varepsilon r^3}{2a^3}\right] \tag{1.2}$$

где $\varepsilon = a^2 / b^2$ — доля объема, занимаемого цилиндрами [1].

Хаппель [2] считает, что в системе отсчета, где жидкость на бесконечности покоится, на поверхности цилиндра радиуса b равны нулю радиальная компонента скорости и компонента тензора вязких напряжений. Таким образом, в системе отсчета, связанной с осью какого-либо цилиндра, должны выполняться граничные условия

$$v_r = v_\theta = 0 \quad \text{при } r = a, \quad v_r = U\cos\theta \text{ при } r = b \tag{1.3}$$

В этом случае функция тока равна

$$\psi(r,\theta) = \frac{Ua\sin\theta}{2}\left[-\frac{\ln\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2)} - \frac{1}{2}\right]^{-1} \times$$
$$\times\left[\frac{a}{(1+\varepsilon^2)r} - \frac{(1-\varepsilon^2)r}{(1+\varepsilon^2)a} + 2\frac{r}{a}\ln\frac{r}{a} - \frac{\varepsilon^2 r^3}{(1+\varepsilon^2)a^3}\right] \tag{1.4}$$

---

[1] Из-за опечатки формула (1.2) в работе [1] приведена в искаженном виде, что было исправлено в работе [3].

Лишь в предельном случае при $\varepsilon \to 0$ формулы (1.2), (1.4) и решение Осеена задачи об обтекании одиночного цилиндра [4]

$$\psi(r, \theta) = \frac{Ua \sin\theta}{2}\left(\ln\frac{\gamma}{2}ka - \frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{a}{r} - \frac{r}{a} + 2\frac{r}{a}\ln\frac{r}{a}\right) \qquad (1.5)$$

($\gamma = 1.78$; $k = U/2\nu$, ν — кинематическая вязкость) приводят к одинаковым линиям тока.

Таким образом, вопрос о выборе граничных условий в методе ячеек, претендующем на правильное описание поля скоростей вблизи поверхности цилиндра, хотя бы с точностью до членов порядка ε, остается открытым. В связи с этим интересно исследовать точное решение уравнений Стокса для двоякопериодической области. В работе Хасимото [5] рассматривается задача об обтекании вязким потоком двоякопериодической системы цилиндров, проходящих через узлы квадратной решетки с использованием рядов Фурье. Рассчитана сила, действующая на цилиндр при малых ε. Но в [5] не приводится выражение для поля скоростей в окрестности цилиндра, что необходимо, например, для вычисления диффузионного потока на его поверхность.

В настоящей работе задача о течении вязкой жидкости в двоякопериодической системе цилиндров решена при помощи теории эллиптических функций [6]. Оси цилиндров проходят через узлы двумерной решетки, периоды которой можно выразить числами комплексной плоскости $2\omega_1$ и $2\omega_2$, причем $\omega_1 = \overline{\omega}_1$, $\omega_2 = |\omega_2| e^{i\varphi}$ (черта означает операцию комплексного сопряжения). Проведено вычисление поля скоростей при $\omega_1 = |\omega_2|$ для двух частных случаев: $\varphi = {}^1/_2\,\pi$, $\varphi = {}^1/_3\,\pi$. При этом предполагалось, что усредненная по сечению скорость потока жидкости $\mathbf{U}$ параллельна одному из периодов решетки.

2. Уравнения Стокса и общий вид их решения. В плоскости, перпендикулярной осям цилиндров, выберем декартовы координаты (x, y) таким образом, чтобы начало координат совпало с центром какого-либо цилиндра, а действительная ось x — с направлением потока. Пусть v_x и v_y — x- и y-компоненты вектора скорости потока жидкости, μ — динамическая вязкость, p — давление.

Двумерные уравнения Стокса и уравнение неразрывности запишутся в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\Delta v_x, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu\Delta v_y, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \qquad (2.1)$$

На поверхности каждого цилиндра

$$v_x = v_y = 0 \qquad (2.2)$$

Предполагается заданным расход жидкости через ячейку

$$\int\limits_a^{|\omega_2|\sin\varphi} v_x(0,y)\,dy = U\,|\omega_2|\sin\varphi \qquad (2.3)$$

Исключая давление p из уравнений (2.1), получим

$$\Delta\omega_0 = 0, \quad \omega_0 = \partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y \qquad (2.4)$$

где ω_0 — вихрь скорости жидкости, являющийся в рассматриваемом случае действительной функцией координат (x, y), а также параметров U, ω_1, $|\omega_2|$. В соответствии с методом функций комплексного переменного (см., например, [7]), перейдем к новым переменным: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ и введем комплексную скорость $w = v_x - iv_y$. Тогда уравнения (2.4) запишутся в виде

$$\partial^2\omega_0/\partial z\,\partial\bar{z} = 0, \qquad \omega_0 = 2i\,\partial w/\partial\bar{z} \qquad (2.5)$$

Аналогичный метод был использован Мийяги [8] при рассмотрении задачи о вязком течении через бесконечный однопериодический ряд цилиндров, оси которых лежат в плоскости, перпендикулярной скорости натекающего потока $\mathbf{U}$. Из уравнения (2.5) следует: $\omega_0 = G(z) + F(\bar{z})$, где $G(z)$ и $F(\bar{z})$ — аналитические функции от z и $\bar{z}$ соответственно. Поскольку $\omega_0 = \overline{\omega}_0$, где $F(\bar{z}) = \overline{G}(\bar{z}) = \overline{\Omega}(\bar{z})$. Таким образом,

$$\omega_0 = \Omega(z) + \overline{\Omega}(\bar{z}) \qquad (2.6)$$

Поле скоростей симметрично относительно замены z, $\bar{z}$ на $-z$, $-\bar{z}$. Поэтому $\omega_0(z, \bar{z}) = -\omega_0(-z, -\bar{z})$ и, следовательно, $\Omega(z) = -\Omega(-z)$. Из формулы (1.5) можно видеть, что лорановское разложение для ω_0 при малых r начинается с членов порядка a / r. Тогда двоякопериодическую функцию ω_0 будем искать в виде ряда, содержащего ζ-функцию Вейерштрасса и ее производные четного порядка. Запишем $\Omega(z)$ в виде

$$\Omega(z) = \frac{U}{i}\left\{a_0\left[\zeta(z) - \frac{z(\eta_2 - \bar{\eta}_2)}{\omega_2 - \bar{\omega}_2}\right] + \sum_{k=1}^{\infty} a'_{2k}\zeta^{(2k)}(z)\right\} \tag{2.7}$$

где $\zeta(z;\ 2\omega_1,\ 2\omega_2)$ — ζ-функция с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\eta_i = \zeta(\omega_i)$, $(i = 1,2)$. В области малых $z \ll \max(\omega_1, |\omega_2|)$ ζ-функцию можно представить в виде ряда

$$\zeta(z;\ 2\omega_1,\ 2\omega_2) = 1/z - g_2 z^3 - g_3 z^5 - \ldots$$

$$g_2 = \sum_{m,\,n}{}' \Omega_{mn}^{-4}, \qquad g_3 = \sum_{m,\,n}{}' \Omega_{mn}^{-6}$$

Здесь $\Omega_{mn} = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$; суммирование распространяется на все целые значения m и n, за исключением $m = n = 0$).

В силу симметрии решетки относительно плоскости $y = 0$, величины g_2 и g_3 действительны и, следовательно, $\bar{\zeta}(z) = \zeta(z)$.
Кроме того, из тех же самых соображений следует действительность коэффициентов a_0, a_{2k}', поскольку

$$\omega_0(z, \bar{z}) = -\omega_0(\bar{z}, z),\ \Omega(z) = -\bar{\Omega}(z)$$

Итак,

$$\omega_0(z, \bar{z}) = \frac{U}{i}\left\{a_0\left[\zeta(z) - \zeta(\bar{z}) - \frac{\eta_2 - \bar{\eta}_2}{\omega_2 - \bar{\omega}_2}(z - \bar{z}) + \sum_{k=1}^{\infty} a'_{2k}\zeta^{(2k)}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} a'_{2k}\zeta^{(2k)}(\bar{z})\right\}\right. \tag{2.8}$$

Из (2.8), с учетом (2.5), получаем

$$\frac{2w}{U} = a_0\left\{\ln\sigma(z) - \bar{z}\zeta(z) - \frac{\eta_2 - \bar{\eta}_2}{\omega_2 - \bar{\omega}_2}\left(\frac{\bar{z}^2}{2} - z\bar{z}\right) - \right.$$
$$\left. - \bar{z}\sum_{k=1}^{\infty} a'_{2k}\zeta^{(2k)}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a'_{2k}\zeta^{(2k-1)}(\bar{z}) + \Phi(z)\right\} \tag{2.9}$$

где $\sigma(z;\ 2\omega_1,\ 2\omega_2)$ — сигма-функция Вейерштрасса с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$, определяемая уравнением $(d/dz)\ln\sigma(z) = \zeta(z)$, а $\Phi(z)$ — произвольная аналитическая функция от z. Однако на произвол в выборе $\Phi(z)$ необходимо наложить некоторые ограничения, связанные с двоякопериодичностью и ограниченностью поля скоростей. Для отыскания подходящей $\Phi(z)$ продифференцируем (2.9) по $\bar{z}$. Тогда

$$\chi(z, \bar{z}) = -\bar{z}\Delta(z) + \Phi'(z), \qquad \chi(z, \bar{z}) = \frac{2}{U}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$$

$$\Delta(z) = a_0\zeta'(z) - a_0\frac{\eta_2 - \bar{\eta}_2}{\omega_2 - \bar{\omega}_2} + f'(z), \qquad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{2k}\zeta^{(2k)}(z)$$

Так как

$$\chi(z + 2\omega_i,\ \bar{z} + 2\bar{\omega}_i) = \chi(z, \bar{z}) \qquad (i = 1,2)$$

то

$$\Phi'(z + 2\omega_1) - \Phi'(z) = 2\omega_1\Delta(z),\ \Phi'(z + 2\omega_2) - \Phi'(z) = 2\bar{\omega}_2\Delta(z)$$

Отсюда

$$\Phi'(z) = \left\{z + \frac{2}{\pi i}(\omega_2 - \bar{\omega}_2)\left[\omega_1\zeta(z) - \eta_1 z\right]\right\}\Delta(z) + \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k}\zeta^{(2k)}(z) \tag{2.10}$$

Здесь D_{2k} — некоторые постоянные. Легко показать, что выбранная таким образом $\Phi(z)$ — единственная, с точностью до произвольной нечетной эллиптической функции, обладающей единственным полюсом любого порядка выше второго в точках, сравнимых с $z = 0$.

Интегрируя (2.10), получаем

$$\Phi(z) = a_0[\ln\sigma(z) + \alpha\zeta^2(z) + \beta z\zeta(z) - \beta\gamma z^2] +$$
$$+ \beta z f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}\zeta^{(2k-1)}(z) + 2\alpha\int\zeta(z) f'(z)\,dz + K \qquad (2.11)$$

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\pi i}(\omega_2 - \bar\omega_2), \qquad \beta = 1 - \frac{2\eta_1}{\pi i}(\omega_2 - \bar\omega_2), \qquad \gamma = \frac{\eta_2 - \bar\eta_2}{2(\omega_2 - \bar\omega_2)}$$

Здесь b_{2k}, K — некоторые постоянные.

Таким образом, решение уравнений Стокса (2.1) можно искать в виде

$$\frac{2w}{U} = a_0\{\ln\sigma(\bar z) + \ln\sigma(z) + [\beta z - \bar z + \alpha\zeta(z)]\,\zeta(z) -$$
$$- \gamma(\beta z^2 - 2z\bar z + \bar z^2)\} + (\beta z - \bar z)\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}'\zeta^{(2k)}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}'\zeta^{(2k-1)}(\bar z) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}'\zeta^{(2k-1)}(z) + 2\alpha\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}'\zeta(z)\,\zeta^{(2k)}(z) + K$$

Коэффициенты a_{2k}', c_{2k}', K определяются из граничных условий (2.2), (2.3). Для случая, когда $\bar\omega_2 = -\omega_2$, можно получить асимптотическое выражение общего решения (2.12) при $\omega_1 \gg |\omega_2|$. Полученный результат соответствует общему виду решения для однопериодического ряда цилиндров, приведенному в работе [8].

3. **Квадратная и гексагональная решетки.** Пусть $|\omega_2| = \omega_1 = \omega$, т. е. $\omega_2 = \omega e^{i\varphi}$. Требование симметрии поля скоростей относительно действительной оси приводит к тому, что являются допустимыми лишь значения $\varphi = 1/2\,\pi$ и $\varphi = 1/3\,\pi$, соответствующие решеткам с элементарными ячейками либо в форме квадрата, либо ромба с углом в шестьдесят градусов. В этих случаях непосредственно из определения ζ-функции можно вывести соотношения

$$\eta_1 = \bar\eta_1, \qquad \eta_2 = \bar\eta_1 e^{-i\varphi} = \eta_1 e^{-i\varphi} \qquad (3.1)$$

а так как $\eta_1\omega e^{i\varphi} - \eta_2\omega = {}^1/_2\,\pi i$, то из (3.1) получаем

$$\eta_1 = \frac{\pi}{4\omega\sin\varphi}, \qquad \alpha = \frac{2\omega^2}{\pi}\sin\varphi, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = -\frac{\pi}{8\omega^2\sin\varphi} \qquad (3.2)$$

С учетом этого результата выражение (2.12) запишется следующим образом:

$$\frac{2w}{U} = a_0\left[\ln\sigma(\bar u) + \ln\sigma(u) + \frac{\sin\varphi}{2\pi}\zeta^2(u) - \bar u\zeta(u) + \frac{\pi}{2\sin\varphi}(\bar u - 2u)\,\bar u\right] -$$
$$- \bar u\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\zeta^{(2k)}(u) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\zeta^{(2k-1)}(\bar u) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}\zeta^{(2k-1)}(u) +$$
$$+ \frac{\sin\varphi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\,\zeta(u)\,\zeta^{(2k)}(u) + K \qquad (3.3)$$

В (3.3) входят эллиптические функции от новой переменной $u = z/2\omega$, позволяющей перейти от функций с периодами 2ω, $2\omega e^{i\varphi}$ к функциям с периодами 1, $e^{i\varphi}$

$$\zeta(z;\, 2\omega,\, 2\omega e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\omega}\zeta(u;\, 1,\, e^{i\varphi}), \qquad \ln\sigma(z;\, 2\omega,\, 2\omega e^{i\varphi}) = \ln\sigma(u;\, 1,\, e^{i\varphi})$$

Постоянные в формулах (2.12) и (3.3) связаны соотношениями

$$a_{2k} = a_{2k}'/2(\omega)^{2k}, \quad c_{2k} = c_{2k}'/(2\omega)^{2k}$$

Вследствие двоякопериодичиости поля скоростей граничные условия (2.2) достаточно задать на поверхности какого-либо одного цилиндра: $w = 0$ при $|z| = a$ или $z\bar{z} = a^2$, т. е. при $\bar{u} = t^2 / u$ $(t = a / 2\omega)$.

Подставляя известные лорановские разложения эллиптических функций в (3.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u, для a_0, a_{2k}, c_{2k}, K получаем бесконечную систему уравнений. В общем случае (2.12) вычисление коэффициентов представляет довольно трудоемкую задачу. Но для квадратной и гексагональной решеток вычисления существенно упрощаются, поскольку для первой $g_3 = 0$, а для второй $g_2 = 0$ (см. приложение 1). Для того чтобы удовлетворить граничным условиям с точностью до членов порядка $\varepsilon = \pi t^2$, в случае квадратной решетки необходимо определить следующие коэффициенты

$$\frac{a_2}{a_0} = -\frac{t^4 g_2}{2}\left(\frac{5}{\pi} - 8t^2\right), \qquad \frac{a_4}{a_0} = -\frac{t^8 g_2}{24}$$

$$\frac{c_2}{a_0} = \frac{1}{2\pi} - t^2 + \frac{\pi t^4}{2}, \qquad \frac{c_4}{a_0} = -\frac{t^4 g_2}{6\pi}\left(\frac{5}{\pi} - 13t^2\right)$$

$$\frac{c_6}{a_0} = -\frac{t^8 g_2}{120\pi}, \qquad \frac{K}{a_0} = -2\ln t + \pi t^2 \frac{5t^4 g_2}{\pi} - \left(\frac{5}{\pi} - 12t^2\right)$$

$$\left(g_2 = \sum_{m,\, n}{}' (m + in)^{-4}\right) \tag{3.4}$$

Из соотношений

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

определяющих функцию тока, нетрудно получить

$$\psi(u, \bar{u}) = \frac{\omega}{i}\int w(u, \bar{u})\, du + \Psi(\bar{u}) \tag{3.5}$$

Выбираем $\Psi(\bar{u})$ таким образом, чтобы $\Psi(u, \bar{u})$ была действительной

$$\psi = U a_0 \omega \operatorname{Im}\Big\{-\bar{u}\ln\sigma(u) + \int \ln\sigma(u)\, du + \frac{1}{2\pi}\int \zeta^2(u)\, du +$$

$$+ \frac{\pi}{2} u\bar{u}^2 - \bar{u}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k}}{a_0}\zeta^{(2k-1)}(u) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{2k}}{a_0}\zeta^{(2k-2)}(u) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k}}{a_0}\int \zeta(u)\,\zeta^{(2k-1)}(u)\, du + \frac{K}{a_0} u\Big\} \tag{3.6}$$

Постоянную a_0 можно определить из условия

$$\psi(^1/_2 i, -^1/_2 i) - \psi(it, -it) = \omega U \tag{3.7}$$

Отсюда следует, что с точностью до членов порядка ε (см. приложение 2)

$$\frac{1}{a_0} = -\frac{\ln\varepsilon}{2} + \varepsilon - \lambda$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}\ln\sigma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{16} - \frac{g_2}{24\pi} + \frac{g_2}{640} = 0.739 \tag{3.8}$$

Найдем выражение для функции тока вблизи поверхности цилиндра с точностью до членов порядка ε. Для этого ограничимся первыми членами рядов Лорана для входящих в (3.6) функций и подставим в полученное выражение $u = re^{i\theta}/2\omega$.

Таким образом, приходим к следующему результату:

$$\psi(r,\theta) = \frac{aU\sin\theta}{2(-^1/_2\ln\varepsilon + \varepsilon - \lambda)}\Big[2\frac{r}{a}\ln\frac{r}{a} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{a}{r} - (1 - \varepsilon)\frac{r}{a} -$$

$$- \frac{\varepsilon r^3}{2a^3} - \varepsilon\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\frac{5g_2}{6\pi^2}\left(2\frac{a^3}{r^3} - 3\frac{a}{r} + \frac{r^3}{a^3}\right) \tag{3.9}$$

Попытаемся выяснить, каким образом геометрия решетки влияет на скорость натекающего потока и на поле скоростей вблизи поверхности цилиндра. С этой целью проведем аналогичный расчет для гексагональной решетки. В уравнении (3.3) положим $\varphi = {}^1/_3\ \pi$ и вышеуказанным методом находим неизвестные коэффициенты a_{2k}, b_{2k}. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям с точностью до членов порядка ε^2, необходимо определить

$$\frac{K}{a_0} = \frac{2\pi t^2}{\sqrt{3}} - 2\ln t + o(t^8), \qquad \frac{c_2}{a_0} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} - t^2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}t^4 + o(t^8), \qquad a_2 = 0, \quad c_4 = 0$$

$$\frac{a_4}{a_0} = t^8 g_3\left(t^2 - \frac{7\sqrt{3}}{24\pi}\right), \qquad \frac{a_6}{a_0} = -\frac{t^{12}g_3}{6!} \tag{3.10}$$

$$\frac{c_6}{a_0} = \frac{t^8 g_3\sqrt{3}}{120\pi}\left(19t^2 - \frac{7\sqrt{3}}{2\pi}\right), \qquad \frac{c_8}{a_0} = -\frac{t^{12}g_3\sqrt{3}}{7!\,2\pi}$$

Для отыскания a_0 воспользуемся условием

$$\psi({}^1/_2 e^{i\varphi}, {}^1/_2 e^{-i\varphi}) - \psi(it, -it) = \omega U \sin\varphi \tag{3.11}$$

Причем в соответствии с (3.5), для ψ имеем выражение

$$\psi = Ua_0 \operatorname{Im}\left\{-\bar u \ln\sigma(u) + \int \ln\sigma(u)\,du + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\int \zeta^2(u)\,du + \frac{\pi}{\sqrt{3}}u\bar u^2 -\right.$$

$$\left. - \bar u\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k}}{a_0}\zeta^{(2k-1)}(u) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{2k}}{a_0}\zeta^{(2k-2)}(u) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k}}{a_0}\int\zeta(u)\zeta^{(2k)}(u)\,du + \frac{K}{a_0}u\right\} \tag{3.12}$$

Отсюда получаем (см. приложение 2)

$$1/a_0 = -{}^1/_2\ln\varepsilon + \varepsilon - {}^1/_8\sqrt{3}\,\varepsilon^2 - \lambda \tag{3.13}$$

$$\varepsilon = \frac{2\pi t^2}{\sqrt{3}}, \qquad \lambda = \frac{3}{4} + \frac{1}{8\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{g_3\sqrt{3}}{280\pi} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln\pi + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Im}\left\{e^{-{}^1/_3 i\pi}\ln\sigma\left(\frac{1}{2}e^{{}^1/_3 i\pi}\right)\right\} = 0.754$$

Таким образом,

$$\psi(r, \theta) = \frac{Ua\sin\theta}{2(-{}^1/_2\ln\varepsilon + \varepsilon - {}^1/_8\sqrt{3}\,\varepsilon^2 - \lambda)}\left\{2\frac{r}{a}\ln\frac{r}{a} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{a}{r} -\right.$$

$$\left. - (1-\varepsilon)\frac{r}{a} - \frac{\varepsilon r^3}{2a^3} - 0.128\varepsilon^2\left[\frac{4\sin 3\theta}{\sin\theta}\left(\frac{a^5}{r^5} - \frac{a^3}{r^3}\right) + \frac{3\sin 5\theta}{5\sin\theta}\left(\frac{r^5}{a_5} - \frac{a^3}{r^3}\right)\right]\right\} \tag{3.14}$$

Сравнивая (3.9) и (3.14) с (1.2), следует отметить, что метод Кувабара [1] позволяет определить скорость натекающего потока с точностью до членов порядка ε включительно. По-видимому, эта величина с указанной точностью слабо зависит от геометрии решетки, в чем легко убедиться, сопоставив формулы (3.9) и (3.14).

Что касается линий тока, то на основе полученных результатов нетрудно установить их существенную зависимость от взаимного расположения цилиндров. В связи с этим следует указать на заметное расхождение функции тока для квадратной решетки с формулой Кувабара, тогда как в случае гексагональной решетки имеет место вполне удовлетворительное совпадение с точностью до членов порядка ε.

Легко видеть, что как скорость натекающего потока, так и линии тока, найденные Хаппелем, значительно отличаются от полученных в настоящей работе. Это свидетельствует о неудачном выборе граничных условий в методе ячеек, предложенном Хаппелем, что также подтверждается экспериментальными данными, полученными А. А. Кирш и Н. А. Фуксом [3], которые приводят значение $\lambda = 0.75 \pm 0.02$.

Как известно, сила, действующая на цилиндр, определяется формулой [4]

$$F_x + iF_y = \oint (ip + \mu\omega_0)\,dz$$

где F_x, F_y — x- и y-компоненты силы, и интегрирование производится по поверхности цилиндра. В стоксовском приближении [8] имеем $ip + \mu\omega = 2\mu\ \Omega(z)$, следовательно,

$$F_x + iF_y = 4\pi\mu U a_0 \tag{3.15}$$

Подставляя значения a_0 из (3.8) и (3.13) в (3.15), получаем

$$F_x = \frac{4\pi\mu U}{-{}^1/_2 \ln \varepsilon + \varepsilon - \lambda} \tag{3.16}$$

где $\lambda = 0.739$ для квадратной решетки и $\lambda = 0.754$ — для гексагональной.

Выражение (3.16) для случая квадратной решетки совпадает с формулой Хасимото [5], а для гексагональной практически не отличается от результата Кувабара [1].

Приложение 1. Вычисление g_2 и g_3 для гексагональной и квадратной решеток. Воспользуемся известными соотношениями

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3 = -{}^1/_4\, g_2^0$$

$$e_1 e_2 e_3 = {}^1/_4\, g_3^0, \quad e_1 = \wp(\omega_1), \quad e_2 = \wp(\omega_2)$$

$$e_3 = \wp(-\omega_1 - \omega_2)$$

$$g_2^0 = 60 \sum_{m,n}{}' (2m\omega_1 + 2n\omega_2)^{-4} = 60 g_2 \qquad g_3^0 = 140 \sum_{m,n}{}' (2m\omega_1 + 2n\omega_2)^{-6} = 140 g_3$$

Непосредственно из определения $\wp(u)$ следует, что при

$$\varphi = {}^1/_2\pi, \; {}^1/_3\pi, \quad e_1 = \bar{e}_2 e^{-2i\varphi},$$

$$e_3 = -e_1 (1 + e^{-2i\varphi}), \quad {}^1/_4\, g_2 = e_1^2 (e^{-3i\varphi}\, 2\cos\varphi + 1), \; {}^1/_4\, g_3 = -e_1^3 e^{-3i\varphi}\, 2\cos\varphi$$

Таким образом, $g_3 = 0$, $g_2 = 4e_1^2$ при $\varphi = {}^1/_2\,\pi$; $g_2 = 0$, $g_3 = 4e_1^3$ при $\varphi = {}^1/_3\pi$.

Используя выражение e_1 через тэта-функции [9]

$$e_1 = {}^1/_{12}\, \pi^2 \omega^{-2} (\vartheta_4^4 + \vartheta_3^4)$$

получаем для случая квадратной решетки значение $e_1 = 0.697\pi^2$, для гексагональной решетки $e_1 = 0.598\,\pi^2$.

Следовательно, для квадратной решетки $g_2^0 = 1.944\,\pi^4$, для гексагональной решетки $g_3^0 = 0.854\,\pi^6$.

Приложение 2. Вычисление $\ln \sigma\,(i/2)$ и $\ln\sigma\,({}^1/_2\, e^{{}^1/_3 i\pi})$. Непосредственно из определения $\sigma(z;\, 2\omega_1,\, 2\omega_2)$ получаем

$$\ln\sigma({}^1/_2\, e^{i\varphi};\, 1,\, e^{i\varphi}) = i\varphi + \ln\sigma({}^1/_2)$$

Пользуясь выражением $\sigma(z)$ через тэта-функции [6], находим

$$\ln\sigma({}^1/_2;\, 1,\, i) = {}^1/_8\,\pi - \ln\pi + 0.008$$

$$\ln\sigma({}^1/_2;\, 1,\, e^{{}^1/_3 i\pi}) = {}^1/_8\,\pi - \ln\pi - 0.017$$

Поступила 30 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Kuwabara S. The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres in a viscous flow at small Reynolds number. J. Phys. Soc. Japan, 1959, vol. 11, No. 4.
2. Happel J. Viscous flow relative to arrays of cylinders. Amer. Instit. Chem. Engng J., 1959, vol. 15, No. 2.
3. Кирш А. А., Фукс Н. А. Течение жидкости в системе параллельных цилиндров, расположенных перпендикулярно потоку, при малых числах Рейнольдса. ПМТФ, 1966, № 6.
4. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехиздат, 1955.
5. Hasimoto H. On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, No. 2.
6. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, ч. 2. Физматгиз, 1963.
7. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 2. Изд-во иностр. лит., 1960.
8. Miyagi T. Viscous flow at low Reynolds number past an infinite row of equal circular cylinders. J. Phys. Soc. Japan, 1958, vol. 13, No. 5.
9. Magnus W., Oberhettinger F. Formeln und Sätze für die speziellen Functionen der mathematischen Physik. Berlin, 1948.