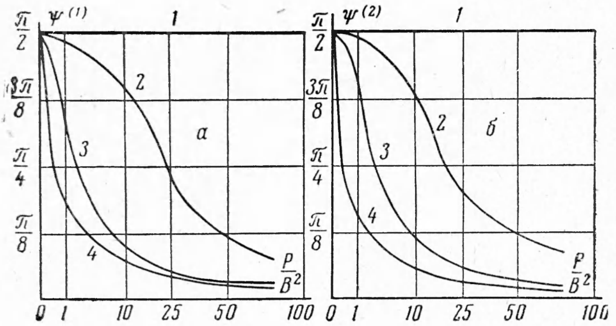
Из (12) и (13) видно, что как абсолютная величина $\Delta T^{(\nu)}$, так и ее знак зависят от сдвига фаз φ между колебаниями теплоотдачи и температуры среды. При этом величина ΔT пропорциональна произведению амплитуды колебаний температуры среды и относительной амплитуды колебаний теплоотдачи γ, а также зависит от критериев B_0 и P

$$\Delta T = \frac{1}{2} A\gamma F^{(\nu)}(B_0, P) \cos [\varphi + \psi (B_0, P)] \tag{14}$$

Графики функций F для цилиндра и шара представлены на фиг. 1, при этом на оси абсцисс отложены значения $P / B_0^2 = \lambda^2\omega / k\alpha_0^2$. Из анализа формул (12) и (13), а также рассмотрения графиков следует, что при заданной частоте пульсаций для данного материала термометра и условий теплоотдачи F имеет максимум при определенном значении радиуса термометра. С увеличением частоты положение максимума смещается в область малых B_0. Как следует из (12) и (13), функция F с увеличением P монотонно возрастает, асимптотически приближаясь к единице. Таким образом, отношение сдвига постоянной составляющей температуры термометра к амплитуде колебаний температуры среды $\Delta T / A$ не может превышать половины относительной амплитуды колебаний теплоотдачи. Величина ΔT равна нулю при $P = 0$ или $B_0 \to \infty$.



Фиг. 2: *а* — цилиндр, *б*—шар, *1*—$B_0 = 0$, *2*— $B_0 = 0.1$, *3* — $B_0 = 1.0$, *4* — $B_0 \to \infty$.

На фиг. 2 представлены графики, характеризующие зависимость угла ψ для цилиндра и шара от критерия P / B_0^2 при различных B. Максимум ΔT имеет место при $\varphi = -\psi$. Таким образом, так как $0 \leqslant \psi \leqslant \pi / 2$, то наибольшие положительные значения $\Delta T^{(\nu)}$ будут наблюдаться в тех случаях, когда колебания теплоотдачи опережают по фазе колебания температуры на угол, равный ψ.

Поступила 24 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордов А. Н. Температура неограниченного цилиндра в потоке с пульсирующей скоростью и температурой. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 2, стр. 240.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М. — Л., ГТТИ, 1954.

РАСЧЕТ ОДНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА

И. И. Межиров

(Москва)

В работе рассматриваются одномерные течения газа в канале переменного сечения при наличии сил трения и теплообмена с внешней средой. В частности, изучается влияние этих факторов на полное давление газа; приводится решение задачи об определении закона площадей канала, обеспечивающего заданное распределение чисел M при заданном законе теплообмена; решается задача об определении закона изменения температуры торможения газа, обеспечивающего заданное распределение чисел M в канале заданной формы; излагается численный метод расчета распределения чисел M по длине канала заданной формы при заданном законе теплообмена.

Предположение об одномерности течения широко используется в прикладной газовой динамике, так как оно существенно упрощает расчетные методы и позволяет учитывать достаточно сложные внешние воздействия на газовый поток. При этом обеспечивается удовлетворительное приближение расчетных данных к действительности при рассмотрении течений в трубопроводах, сверхзвуковых соплах, конфузорах, слабых безотрывных диффузорах. Поэтому результаты, полученные в работе, могут найти применение при решении различных практических задач газовой динамики и теплотехники.

1. Одномерное стационарное течение газа в канале с произвольным законом площадей при наличии сил трения подчиняется уравнениям движения и расхода

$$wdw = -\frac{dp}{\rho} - \zeta\frac{w^2}{2D}, \qquad \rho wf = \text{const} \tag{1.1}$$

Здесь w — скорость, ρ — плотность, p — давление, ζ — коэффициент сопротивления трения (считается известным), D — диаметр канала (в случае канала некруглого сечения D — гидравлический диаметр, равный отношению учетверенной площади сечения к периметру), x — продольная координата, f — площадь сечения канала. Пусть a — местная скорость звука. Первое уравнение (1.1) представим в виде

$$\frac{\rho a^2}{p}M^2\frac{dw}{w} = -\frac{dp}{p} - \zeta\frac{\rho a^2}{p}M^2\frac{dx}{2D} \qquad \left(M = \frac{w}{a}\right) \tag{1.2}$$

Если течение сопровождается теплообменом между газом и внешней средой, т. е. энтальпия торможения газа изменяется по длине канала, то имеем

$$\frac{dw}{w} = \frac{dW}{W} + \frac{d\vartheta}{\vartheta} \qquad \left(W = \frac{w}{w_m}, \ \vartheta = \frac{w_m}{w_{m_1}} = \sqrt{\frac{i_0}{i_{01}}}\right) \tag{1.3}$$

Здесь w_m — максимальная скорость газа, i_0 — энтальпия торможения, индекс 1 здесь и ниже относится к начальному сечению канала.

Интегрируя уравнение (1.2) с учетом (1.3), получим

$$\frac{p}{p_1}\exp\int\limits_{W_1}^{W}\frac{\rho a^2}{p}M^2\frac{dW}{W} = \exp\left(-\int\limits_{1}^{\vartheta}\frac{\rho a^2}{p}M^2\frac{d\vartheta}{\vartheta} - \int\limits_{x_1}^{x}\frac{\rho a^2}{p}\zeta M^2\frac{dx}{2D}\right) \tag{1.4}$$

Величина

$$p_0 = p\exp\int\limits_{0}^{W}\frac{\rho a^2}{p}M^2\frac{dW}{W}$$

при отсутствии трения и теплообмена есть полное давление газа, т. е. давление, которое получается при изэнтропическом торможении газа [1].

Если течение сопровождается теплообменом и силы трения играют заметную роль, то величина p_0 — полное давление газа, у которого зависимость параметра $\rho a^2M^2/p$ от W при изэнтропическом течении такая же, как и в действительном течении с трением и теплообменом. Поэтому левая часть формулы (1.4) представляет собой коэффициент восстановления полного давления $\nu = p_0/p_{01}$ в указанном выше смысле. Таким образом, имеем

$$\nu = \exp\left(-\int\limits_{1}^{\vartheta}\frac{\rho a^2}{p}M^2\frac{d\vartheta}{\vartheta} - \int\limits_{x_1}^{x}\frac{\rho a^2}{p}\zeta M^2\frac{dx}{2D}\right) \tag{1.5}$$

Это соотношение справедливо для произвольного несовершенного газа при равновесном течении.

Отметим, что в случае совершенного газа

$$W = \frac{M\sqrt{(\varkappa-1)/2}}{\sqrt{1+M^2(\varkappa-1)/2}}, \qquad \frac{\rho a^2}{p} = \varkappa = \text{const}, \qquad \vartheta = \sqrt{\frac{T_0}{T_{01}}}$$

Здесь $\varkappa$ — показатель адиабаты, T_0 — температура торможения. В этом случае отпадает необходимость в оговорках, сделанных выше при определении полного давления газа, и связь между полным и статическим давлением всегда определяется соотношением

$$p_0 = p\left(1 + \frac{\varkappa-1}{2}M^2\right)^{\varkappa/(\varkappa-1)}$$

Из (1.5) видно, что при наличии теплообмена полное давление уменьшается, если к газу подводится тепло ($\vartheta > 1$). Отвод тепла ($\vartheta < 1$) способствует росту полного давления, хотя под действием сил трения оно может уменьшаться и в этом случае.

2. При совместном действии теплообмена и трения их влияние может в известном смысле взаимно компенсироваться. В качестве примера рассмотрим течение, в котором, несмотря на наличие трения и теплообмена, распределение чисел M по длине канала такое же, как при изэнтропическом течении газа. Здесь и ниже будем считать, что газ совершенный. Уравнение (1.1) можно в этом случае представить в виде

$$Fq(M)\frac{\nu}{\vartheta} = q(M_1), \ F = \frac{f}{f_1}, \ q(M) = \left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{\frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}}M\left(1 + \frac{\varkappa-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}} \tag{2.1}$$

Здесь $q(M)$ — приведенный расход. Из (2.1) видно, что трение и теплообмен не влияют на распределение чисел M, если $\nu \equiv \vartheta$. Логарифмируя и дифференцируя это выражение и используя (1.5), имеем

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\frac{\varkappa M^2}{1+\varkappa M^2}\zeta\frac{dx}{2D}$$

Отсюда получаем после интегрирования

$$\vartheta = \exp\left(-\int_{x_1}^{x}\frac{\varkappa M^2}{1+\varkappa M^2}\zeta\frac{dx}{2D}\right) \tag{2.2}$$

Распределение чисел M по длине канала $M = \varphi(F, M_1)$ находится из уравнения

$$Fq(M) = q(M_1)$$

Это позволяет вычислить конкретные значения параметра ϑ, соответствующие каналу заданной формы. Из (2.2) видно, что в рассматриваемом случае $\vartheta = \nu < 1$, т. е. температура торможения газа по длине канала уменьшается, и имеют место потери полного давления.

При более сильном охлаждении газа может быть достигнуто состояние, при котором $\nu \equiv 1$. Соответствующий закон отвода тепла также может быть легко получен из (1.5). Полагая в этом соотношении $\nu = 1$, получим

$$\vartheta = \exp\left(-\int_{x_1}^{x}\zeta\frac{dx}{2D}\right) \tag{2.3}$$

(Эта формула справедлива и для несовершенного газа.)

При еще более интенсивном охлаждении газа полное давление газа по длине канала будет увеличиваться, несмотря на наличие сил трения.

3. Рассмотрим задачу об определении закона площадей канала, в котором при заданном законе изменения температуры торможения осуществляется течение с заданным распределением чисел M. Логарифмируя и дифференцируя уравнение (2.1), используя выражение (1,5) для ν, получим

$$\frac{F'}{F} - \varkappa M^2\frac{\zeta}{2\sqrt{F}} - \frac{\vartheta'}{\vartheta}(1+\varkappa M^2) + \frac{q'}{q} = 0 \tag{3.1}$$

Здесь предполагается, что поперечные сечения канала подобны, так что

$$D / D_1 = \sqrt{F}$$

штрихи обозначают дифференцирование по $X = x / D_1$.

Уравнение (3.1) подстановкой $y = \sqrt{F}$ приводится к линейному относительно y и легко интегрируется. Для определения закона площадей канала получим

$$F = F_0\left[1 + \frac{\varkappa}{4}\int_{X_1}^{X}\zeta M^2\frac{dX}{\sqrt{F_0}}\right]^2 \quad \left(F_0 = \frac{q(M_1)\,\vartheta}{q(M)}\exp\left[\varkappa\int_1^{\vartheta}M^2\frac{d\vartheta}{\vartheta}\right]\right) \tag{3.2}$$

Здесь F_0 — площадь канала, рассчитанная без учета сил трения.

Сравнивая (3.2) и (2.1), получаем формулу для определения коэффициента восстановления полного давления ν

$$\nu = \exp\left(-\varkappa\int_1^{\vartheta}M^2\frac{d\vartheta}{\vartheta}\right)\left[1 + \frac{\varkappa}{4}\int_{X_1}^{X}\zeta M^2\sqrt{\frac{q(M)}{q(M_1)\vartheta}}\exp\left(-\frac{\varkappa}{2}\int_1^{\vartheta}M^2\frac{d\vartheta}{\vartheta}\right)dX\right]^{-2} \tag{3.3}$$

Эта формула обладает преимуществом по сравнению с (1.5), так как она не содержит в явном виде площадь канала F.

Отметим, что полученный ранее закон изменения температуры торможения, обеспечивающий постоянство полного давления газа (2.3), может быть также представлен в виде соотношения, не содержащего площадь или диаметр канала. Для этого нужно составить уравнение, аналогичное (3.1), но учесть, что $\nu = 1$ и ϑ определяется формулой (2.3). Интегрирование полученного таким образом уравнения для определения температуры торможения газа дает

$$\vartheta = \left(1 - \frac{1}{4}\int_{X_1}^{X}\zeta\sqrt{\frac{q(M)}{q(M_1)}}\,dX\right)^2 \tag{3.4}$$

При помощи уравнения (3.1) может быть также решена задача об определении закона изменения температуры торможения газа, обеспечивающего заданное распределение чисел M в канале заданной формы. Считая в этом уравнении неизвестной функцию $\vartheta(X)$ и производя интегрирование, получим

$$\vartheta = \frac{z(\lambda_1)}{z(\lambda)} \exp\left[\int_1^F \frac{\tau(\lambda)}{1+\lambda^2}\frac{dF}{F} - \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\int_{X_1}^X \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\zeta\frac{dX}{\sqrt{F}}\right] \qquad (3.5)$$

Здесь (a_* — критическая скорость)

$$z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda}, \qquad \tau(\lambda) = 1 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\lambda^2, \qquad \lambda = \frac{w}{a_*}$$

В случае цилиндрического канала ($F = 1$) и при отсутствии сил трения ($\zeta = 0$) формула (3.5) непосредственно переходит в известное соотношение. При $F = \mathrm{const}$, но $\zeta \neq 0$ имеем полученную в [2] формулу, справедливую для течения газа в цилиндрической трубе при наличии трения и теплообмена.

4. Рассмотрим задачу об определении закона изменения приведенной скорости λ в канале заданной формы при заданном распределении температуры торможения газа по длине канала. В замкнутом виде получить такое решение не удается. Для расчетов может быть использован следующий численный метод, являющийся обобщением метода, изложенного в [2], на случай канала переменного сечения. Канал по длине разбивается на n участков. Применяя (3.5) к i-му и $i+1$-му сечениям, получим

$$\frac{\vartheta_{i+1}}{\vartheta_i} = \frac{z(\lambda_i)}{z(\lambda_{i+1})}\exp\left[\int_{f_i}^{f_{i+1}} \frac{\tau(\lambda)}{1+\lambda^2}\frac{df}{f} - \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\zeta\frac{dx}{D}\right] \qquad (4.1)$$

При достаточно близких сечениях i и $i+1$ подынтегральные функции пренебрежимо мало отличаются от линейных и интегралы в показателе степени вычисляются по формуле трапеций, что приводит к следующему конечно-разностному соотношению, позволяющему вычислить величину λ в начале $i+1$-го участка по его значению в начале i-го участка

$$\Psi(\lambda_{i+1}, \delta_{i+1}, \varepsilon_{i+1}) = \frac{\vartheta_i}{\vartheta_{i+1}}\Phi(\lambda_i, \delta_i, \varepsilon_i)$$

$$\Psi = z(\lambda)\exp\left[\delta\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} - \varepsilon\frac{\tau(\lambda)}{1+\lambda^2}\right] \qquad (4.2)$$

$$\Phi = z(\lambda)\exp\left[\varepsilon\frac{\tau(\lambda)}{1+\lambda^2} - \delta\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\right]$$

$$\delta_{i+1} = \frac{\varkappa}{2(\varkappa+1)}\zeta_{i+1}\frac{x_{i+1}-x_i}{D_{i+1}}, \qquad \varepsilon_{i+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{f_i}{f_{i+1}}\right)$$

$$\delta_i = \frac{\varkappa}{2(\varkappa+1)}\zeta_i\frac{x_{i+1}-x_i}{D_i}, \qquad \varepsilon_i = \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i+1}}{f_i} - 1\right)$$

При проведении расчетов удобно пользоваться графиками функций $\Psi(\lambda, \delta, \varepsilon)$, $\Phi(\lambda, \delta, \varepsilon)$. При достаточно малых δ и ε можно пренебрегать разницей между i-ми и $i+1$-ми значениями этих величин. Кроме того, можно ограничиться линейными членами в разложениях экспоненциальных членов в выражениях для Ψ и Φ:

$$\Psi = z(\lambda) + \delta\lambda - \varepsilon\frac{\tau(\lambda)}{\lambda}, \qquad \Phi = z(\lambda) - \delta\lambda + \varepsilon\frac{\tau(\lambda)}{\lambda}$$

При таких упрощениях величина приведенной скорости λ_{i+1} может быть вычислена по значению Ψ_{i+1} аналитически, в результате решения квадратного уравнения

$$\lambda = \frac{\Psi \pm \sqrt{\Psi^2 - 4[1+\delta-2\varepsilon/(\varkappa+1)]}}{2[1+\delta+\varepsilon(\varkappa-1)/(\varkappa+1)]} \qquad (4.3)$$

Два корня уравнения соответствуют дозвуковому и сверхзвуковому значениям λ.

Поступила 13 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Межиров И. И. О течении несовершенного газа при наличии теплообмена. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3.
2. Межиров И. И. О течении газа в цилиндрической трубе при наличии трения и теплообмена. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 9.