

УДК 532.5.032, 533.6.011.5

Численное исследование развития неустойчивостей в сверхзвуковых струях прямоугольного сечения*

Д.В. Хотяновский, А.А. Шершнёв, А.Н. Кудрявцев

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: khotyanovsky@itam.nsc.ru

На основе численного решения уравнений Навье–Стокса исследуется развитие неустойчивостей в сверхзвуковых изобарических струях, истекающих из сопел квадратного и прямоугольного сечений в спутный поток. Моделирование проводится при различных значениях чисел Маха струи и спутного потока. Результаты численных расчетов позволяют выявить качественные и количественные различия в развитии неустойчивости в случаях со сверхзвуковым и дозвуковым спутным потоком, а также характерные особенности течения для прямоугольных струй.

Ключевые слова: сверхзвуковые струи прямоугольного сечения, численное моделирование, неустойчивость, переключение осей.

Введение

В настоящее время в мире накоплен большой объем данных экспериментальных и расчетно-теоретических исследований сжимаемых струйных течений. В последние десятилетия достигнут также значительный прогресс в использовании численного моделирования с разрешением вихревой структуры течения для прогнозирования характеристик и поиска путей управления струйными течениями. Важными прикладными задачами для современных численных методов и комплексов расчетных программ являются предсказание уровня шума струй двигателей летательных аппаратов, проверка способов снижения уровня шума с помощью различных методов пассивного и активного управления течением. Ключевая роль в решении этих проблем при больших числах Рейнольдса, соответствующих реальным полетным условиям, принадлежит численным подходам, основанным на методе крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) [1, 2]. В этой области накоплен большой опыт эффективного применения численного моделирования, особенно для осесимметричных струй.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-11-00246-П); численное моделирование проводилось на гибридном вычислительном кластере Helion ИТПМ СО РАН, гибридном вычислительном кластере Аеро ЦКП «Механика» ИТПМ СО РАН, а также на кластере Информационно-вычислительного центра Новосибирского государственного университета.

Интересным объектом исследования являются неосесимметричные трехмерные струйные течения. Начиная с пионерной работы [3], растет понимание того, что неосесимметричные конфигурации струй имеют существенные преимущества по сравнению с их круглыми аналогами в определенных отношениях. В частности, они могут увеличить перемешивание с окружающей жидкостью. Из-за наличия режимов неустойчивости более высокого порядка неосесимметричные струи более неустойчивы, чем круглые конфигурации. Таким образом, неосесимметричные сопла могут быть эффективным средством пассивного управления потоком для улучшения крупно- и мелкомасштабного перемешивания. Они также могут снизить уровень шума по сравнению с круглыми соплами, что справедливо для дозвуковых и сверхзвуковых течений. Неазимутальная кривизна вихревых колец приводит к важному явлению переключения осей. Это означает, что поперечное сечение развивающейся струи принимает форму, аналогичную форме струйного сопла, но с осями, повернутыми относительно исходного сопла. Обзор накопленных данных и результатов для сопел различной формы дан в [4–6]. В расчетно-экспериментальной работе [7] было проведено исследование истечения квадратных струй, в работах [8, 9] численно исследованы струи прямоугольного сечения.

Задачей настоящей работы является исследование динамики сверхзвуковых струй, истекающих в спутный поток из сопел квадратного и прямоугольного сечений при небольших числах Рейнольдса на начальном участке развития струи.

1. Постановка задачи

С помощью численного решения нестационарных уравнений Навье – Стокса проводится трехмерное моделирование истечения струи из сопла прямоугольной формы в спутный поток с разрешением вихревой структуры течения. Статические давления в струе p_j и во внешнем спутном потоке p_a предполагаются равными ($p_j = p_a$), что соответствует случаю идеально расширенной струи. Статические температуры потоков также полагались равными: $T_j = T_a$. Для струи квадратного сечения на входной границе $x = 0$ расчетной области задается кусочно-постоянный «ударный» профиль основного течения для продольной компоненты скорости:

$$u_0(y, z) = U_j, |y|, |z| \leq h/2, \quad (1)$$

$$u_0(y, z) = U_a, |y|, |z| > h/2, \quad (2)$$

где U_j , U_a — скорости струи и спутного потока соответственно, h — сторона квадратного сечения струи.

На основное течение накладывается нестационарное возмущение нормальных компонент скорости в виде волны, распространяющейся по продольной координате x :

$$\tilde{v}(x, y, z, t) = A \hat{v}(y, z) \cos(\alpha x - \omega t + \varphi), \quad (3)$$

$$\tilde{w}(x, y, z, t) = A \hat{w}(y, z) \cos(\alpha x - \omega t + \varphi). \quad (4)$$

Здесь A — амплитуда возмущения, $\hat{v}(y, z)$, $\hat{w}(y, z)$ — функции формы возмущения, ω — круговая частота возмущения, $\alpha = \omega/c$ — волновое число возмущения, имеющего фазовую скорость c , φ — сдвиг фазы.

Рассматривались возмущения различной формы. Так, например, для возбуждения изолированного возмущения одной из компонент скорости возмущение задавалось в виде

$$\hat{v}(y, z) = 1/\cosh(2y), \quad |z| \leq h/2, \quad (5)$$

$$\hat{v}(y, z) = 0, \quad |z| > h/2. \quad (6)$$

При одновременном возбуждении двух нормальных компонент скорости использовалась осесимметричная форма возмущений:

$$\hat{v}(y, z) = \hat{w}(y, z) = 1/(\cosh(2y) \cosh(2z)), \quad (7)$$

Волновые параметры используемых возмущений выбирались следующим образом. Длина волны основного возмущения $\lambda = 2\pi/\alpha$ полагалась равной калибру струи $\lambda = h$, фазовая скорость — полусумме скоростей потоков $c = 0,5 (U_j + U_a)$. Рассматривались случаи с нулевым сдвигом фаз $\varphi = 0$, а также со сдвигом фазы трансверсальной компоненты скорости w на $\varphi = \pi/2$. В ряде расчетов в дополнение к возмущению на основной частоте ω задавались его первая гармоника с частотой 2ω и субгармоника с частотой $\omega/2$. В расчетах использовались достаточно большие начальные амплитуды возмущений $A = 0,01$.

При моделировании струи прямоугольного сечения формулы (1)–(7) меняются очевидным образом с учетом того, что размер поперечного сечения струи по координате z равен половине размера по координате y , т.е. $h_z = 0,5 h_y$.

Численное моделирование проводилось для одноатомного газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$ при двух различных комбинациях чисел Маха струи и внешнего потока: $M_j = 2,5$, $M_a = 1,5$ и $M_j = 1,5$, $M_a = 0,5$. Оба рассмотренных случая соответствуют дозвуковому конвективному числу Маха для слоя смешения струи $M_c = 0,5$. Расчеты проводились для числа Рейнольдса $Re = U_j h/\nu = 5000$.

Используемая расчетная область имела форму параллелепипеда длиной $L_x = 40h$ и размерами $L_y = 10h$, $L_z = 10h$ по нормальным осям. Расчетная сетка сгущалась в области ядра и ближнего поля струи. Большинство тестовых расчетов проводилось на сетке $N_x = 768$, $N_y = 220$, $N_z = 220$. В основных расчетах использовалась сетка $N_x = 1152$, $N_y = 330$, $N_z = 330$ (125 млн ячеек во всей расчетной области).

2. Численная методика

Численное моделирование проводится с помощью расчетного кода HyCFS [10], разработанного в лаборатории вычислительной аэродинамики ИТПМ СО РАН. Вычислительный код HyCFS предназначен для проведения численного моделирования на основе решения полных нестационарных уравнений Навье – Стокса сжимаемого теплопроводного газа с помощью современных WENO- (Weighted Essentially Non-Oscillatory) схем сквозного счета на гибридных вычислительных кластерах с графическими сопроцессорами (GPU). В HyCFS используется многоуровневая стратегия распараллеливания: полная вычислительная задача разбивается на достаточно крупные блоки, которые запускаются на различных вычислительных узлах, связанных сетью. Обмены между узлами производятся с помощью средств MPI (Message Passing Interface) [11]. На каждом вычислительном узле используются нитевая параллелизация средствами OpenMP [12], центральные процессорные ядра (CPU) и общая память узла. Параллелизация на каждом GPU осуществляется средствами программной платформы CUDA с использованием процессора и памяти GPU. Использование такого подхода позволяет добиться высоких показателей параллельной эффективности и масштабируемости параллельной вычисли-

тельной задачи и в полной мере применить возможности современных вычислительных кластеров гибридной архитектуры.

Для пространственной дискретизации конвективных членов используется конечно-разностная WENO-схема 5-го порядка точности [13]. Диффузионные члены уравнений Навье – Стокса аппроксимируются с помощью центрально-разностных формул 2-го порядка. Численный алгоритм является явным, для интегрирования численного решения по времени используется алгоритм Рунге – Кутты – Гилла 4-го порядка точности [14]. Шаг по времени автоматически выбирается в процессе численного расчета из условия устойчивости интегрирования по времени. Численный код ранее с успехом использовался при моделировании развития неустойчивости и перехода к турбулентности в сверхзвуковом пограничном слое [15].

Большая часть расчетов проводилась на гибридном вычислительном сервере Helion ИТПМ СО РАН, оснащенный восемью графическими картами Nvidia GeForce 1080. Численные расчеты проводились также на гибридном вычислительном кластере Аеро ЦКП «Механика» ИТПМ СО РАН и на кластере Информационно-вычислительного центра Новосибирского государственного университета.

3. Результаты численного моделирования

На первом этапе исследований было проведено численное моделирование струи квадратного сечения для двух различных комбинаций числа Маха струи и спутного потока. На рис. 1 приведены визуализации мгновенного трехмерного поля течения поверхностью Q-критерия для $M_j = 2,5$, $M_a = 1,5$ (рис. 1a) и $M_j = 1,5$, $M_a = 0,5$ (рис. 1b) при числе Рейнольдса $Re = 5000$. Оба рассмотренных случая соответствуют дозвуковому конвективному числу Маха для слоя смешения струи $M_c = 0,5$. Визуализации градиента плотности в центральной плоскости $z = 0$ представлены на рис. 2a, 2b. В обоих случаях на входной границе возбуждались две нормальные компоненты скорости на основной частоте со сдвигом фазы $\varphi = \pi/2$. Как видно из визуализаций поля течения (см. рис. 1, 2) в рассмотренных случаях неустойчивость быстро развивается на границе струи и затем распространяется на всю струю. На рис. 2 из полей градиента плотности видно, что на начальном этапе вблизи входной границы расчетной области неустойчивость развивается в виде характерной дорожки вихрей Кельвина – Гельмгольца. Такое развитие неустойчивости вполне ожидаемо при значении конвективного числа Маха $M_c = 0,5$.

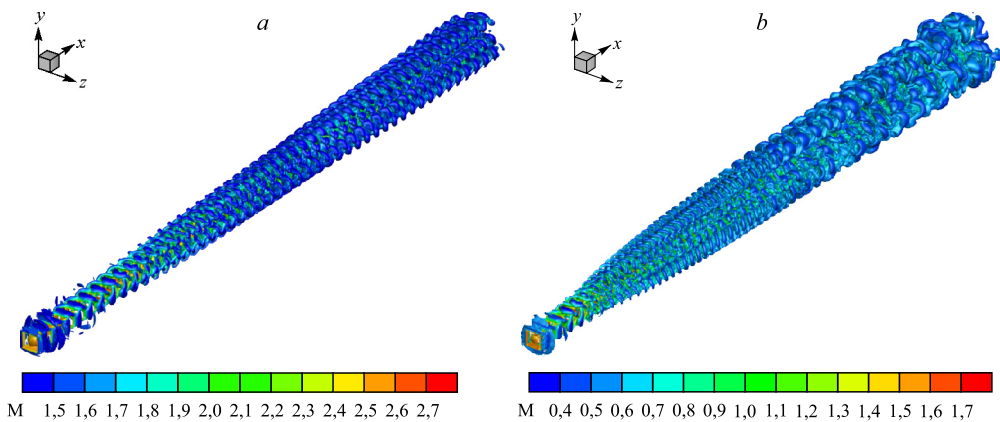


Рис. 1. Визуализация поверхностью Q-критерия с раскраской по уровням числа Маха для квадратной струи при $M_j = 2,5$, $M_a = 1,5$ (a) и $M_j = 1,5$, $M_a = 0,5$ (b).

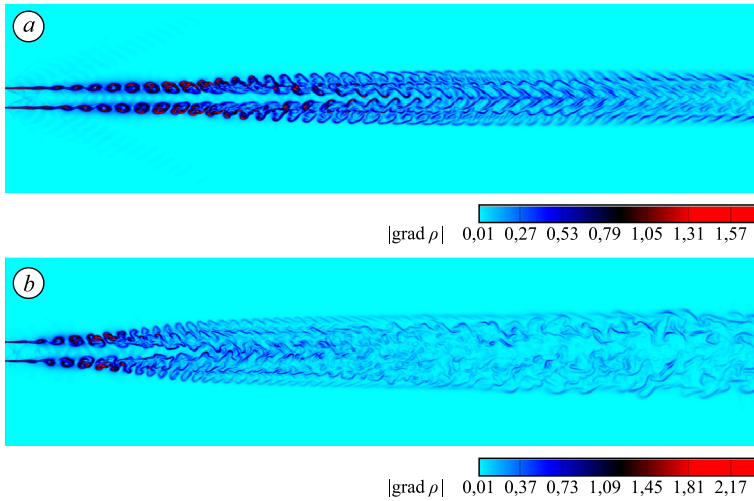


Рис. 2. Градиент плотности в плоскости $z = 0$ для квадратной струи при $M_j = 2,5$, $M_a = 1,5$ (a) и $M_j = 1,5$, $M_a = 0,5$ (b).

Ниже по потоку вихревое движение захватывает все ядро струи. Отметим, что при начальной амплитуде $A = 0,01$ начальный этап развития неустойчивости происходит достаточно интенсивно и имеет небольшую протяженность по продольной координате. Дальнейшее развитие вихревой структуры струи существенно различается в двух рассмотренных случаях. В случае со сверхзвуковым спутным потоком ($M_j = 2,5$, $M_a = 1,5$) развивающиеся в струе вихри имеют довольно упорядоченный, регулярный вид вплоть до выходной границы расчетной области, в то время как в случае с дозвуковым спутным потоком ($M_j = 1,5$, $M_a = 0,5$) в струе достаточно быстро начинается интенсивное вихреобразование и перемешивание потока по всему поперечному сечению, что приводит к потере регулярной вихревой структуры. Такое различие в динамике вихреобразования, по-видимому, объясняется действием механизма обратной связи, который отсутствует в первом случае и присутствует во втором.

Количественная информация об интенсивности перемешивания струи в обоих случаях может быть получена из анализа профилей усредненной продольной компоненты

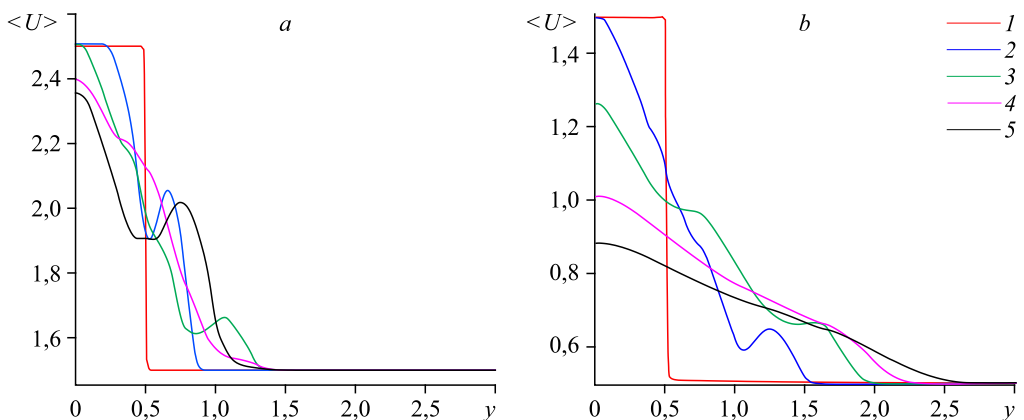


Рис. 3. Профили усредненной продольной компоненты скорости для квадратной струи при $M_j = 2,5$, $M_a = 1,5$ (a) и $M_j = 1,5$, $M_a = 0,5$ (b). $x = 0$ (1), 10 (2), 20 (3), 30 (4), 40 (5).

скорости (рис. 3). Скорость потока здесь и далее обезразмерена на скорость звука в невозмущенном потоке, которая имеет одинаковое значение в струе и спутном потоке. Усреднение скорости проводилось по времени в течение достаточно большого периода, а также по пространству – с учетом симметрии по четырем квадрантам: $y > 0, z > 0$; $y < 0, z > 0$; $y > 0, z < 0$ и $y < 0, z < 0$. В начальном сечении $x = 0$ профили скорости соответствуют невозмущенному ударному профилю, а значения скорости в струе и спутном потоке с использованием принятого обезразмеривания совпадают с соответствующими значениями числа Маха. В случае сверхзвукового спутного потока (см. рис. 3a) скорость в ядре струи сохраняет свое начальное значение 2,5 на достаточно большом расстоянии вниз по потоку, что видно на профилях в сечениях $x = 10$ и 20. Скорость на центральной линии струи снижается до значений 2,4 и 2,35 лишь в сечениях $x = 30$ и 40 вблизи выходной границы расчетной области. В случае дозвукового спутного потока (см. рис. 3b) скорость в ядре струи сохраняет свое начальное значение 1,5 лишь в сечении $x = 10$, а ниже по потоку быстро снижается до значений 1,27 (при $x = 20$), 1,1 (при $x = 30$) и 0,88 (при $x = 40$). При этом расширение струи по нормальной координате в случае сверхзвукового спутного потока не превышает $y = 1,4$ даже в сечении $x = 40$ на выходной границе расчетной области. В то же время для струи с дозвуковым спутным потоком расширение ее происходит намного интенсивнее: струя расширяется до $y = 1,6$ в сечении $x = 10$, $y = 1,95$ в сечении $x = 20$, $y = 2,25$ в сечении $x = 30$ и $y = 2,6$ в сечении $x = 40$. Интересным представляется появление седловидных профилей средней скорости (см. рис. 3a, линии 2, 3, 5; рис. 3b, линии 2, 3). Образование таких седловидных профилей скорости отмечалось и ранее [9, 16].

На рис. 4 представлены распределения вдоль центральной линии струи $y = 0, z = 0$ усредненной по времени продольной компоненты скорости с наложенными на них распределениями мгновенной скорости для двух рассматриваемых случаев. В случае сверхзвукового спутного потока (см. рис. 4a) заметные пульсации скорости на центральной линии струи появляются при значении продольной координаты $x \approx 17$. Развитие пульсаций ниже по потоку имеет знакопеременный характер, что, по-видимому, объясняется влиянием значительных градиентов среднего течения. При этом развитие пульсаций имеет практически моногармонический вид — пульсации скорости относительно среднего значения происходят на частоте начального возмущения во всей расчетной области. В случае дозвукового спутного потока (см. рис. 4b) пульсации скорости на центральной

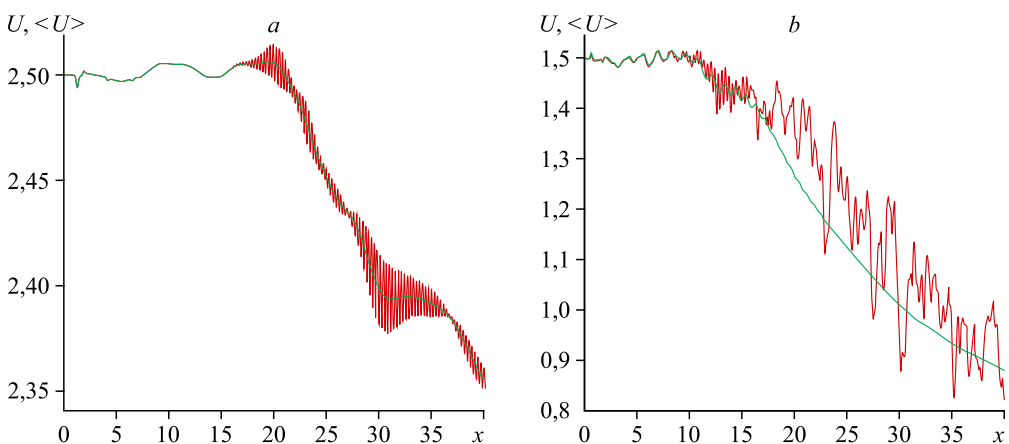


Рис. 4. Распределения усредненной и мгновенной продольной компоненты скорости вдоль центральной линии квадратной струи при $M_j = 2,5, M_a = 1,5$ (a) и $M_j = 1,5, M_a = 0,5$ (b).

линии заметны уже при $x \approx 10$. Ниже по потоку, вплоть до $x \approx 17$, пульсации, так же как и в предыдущем случае, происходят на частоте начального возмущения. Далее вниз по потоку распределение пульсаций скорости приобретает качественно иную форму, характерную для нелинейного взаимодействия возмущений различной частоты.

На втором этапе исследования проведено моделирование истечения прямоугольной струи в спутный поток. Размер поперечного сечения струи по координате z равен половине размера по координате y : $h_z = 0,5 h_y$. На рис. 5 приведены визуализации трехмерного поля течения для случаев со сверхзвуковым спутным потоком $M_j = 2,5$, $M_a = 1,5$ (рис. 5а) и дозвуковым спутным потоком $M_j = 1,5$, $M_a = 0,5$ (рис. 5б). Определенное по размеру h_y число Рейнольдса $Re = 5000$. Возбуждение возмущений на входной границе, так же как и в случае квадратной струи, производилось для двух нормальных компонент скорости на основной частоте со сдвигом фазы $\varphi = \pi/2$. Начальная амплитуда возмущения на входной границе $A = 0,01$. В обоих рассмотренных случаях неустойчивость быстро развивается на границе струи и затем распространяется на всю струю. В целом визуальная картина развития возмущений аналогична случаю квадратной струи. В случае со сверхзвуковым спутным потоком ($M_j = 2,5$, $M_a = 1,5$) развивающиеся в струе вихри также имеют довольно упорядоченный, регулярный вид во всей расчетной области, в то время как в случае с дозвуковым спутным потоком ($M_j = 1,5$, $M_a = 0,5$) в струе достаточно быстро начинается интенсивное вихреобразование и перемешивание потока по всему поперечному сечению.

Из анализа профилей усредненной продольной компоненты скорости для случая сверхзвукового спутного потока ($M_j = 2,5$, $M_a = 1,5$), построенных вдоль двух нормальных осей (рис. 6), следует, что снижение скорости в ядре струи быстрее по сравнению с аналогичным случаем для квадратной струи (см. рис. 3а). В этом случае уже в сечении $x = 10$ скорость на центральной линии снижается до 2,38 и продолжает снижаться до 1,97 в сечении $x = 40$ вблизи выходной границы расчетной области, что существенно ниже значения 2,35 для того же сечения в случае квадратной струи. Аналогично случаю квадратной струи здесь в некоторых сечениях наблюдаются характерные седловидные профили скорости. Также обращает на себя внимание бóльшая наполненность профилей по координатному направлению z по сравнению с профилями по направлению y на значительном удалении от центральной линии струи.

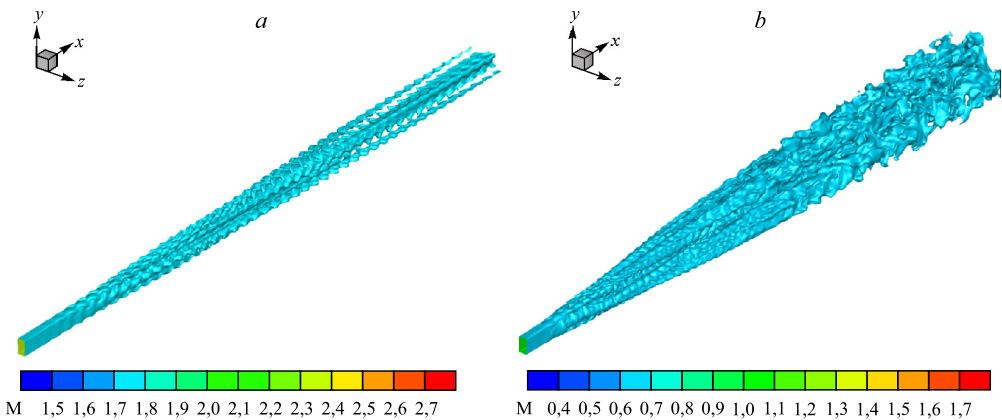


Рис. 5. Визуализация поверхностями числа Маха для прямоугольной струи при $M_j = 2,5$, $M_a = 1,5$ (а) и $M_j = 1,5$, $M_a = 0,5$ (б).

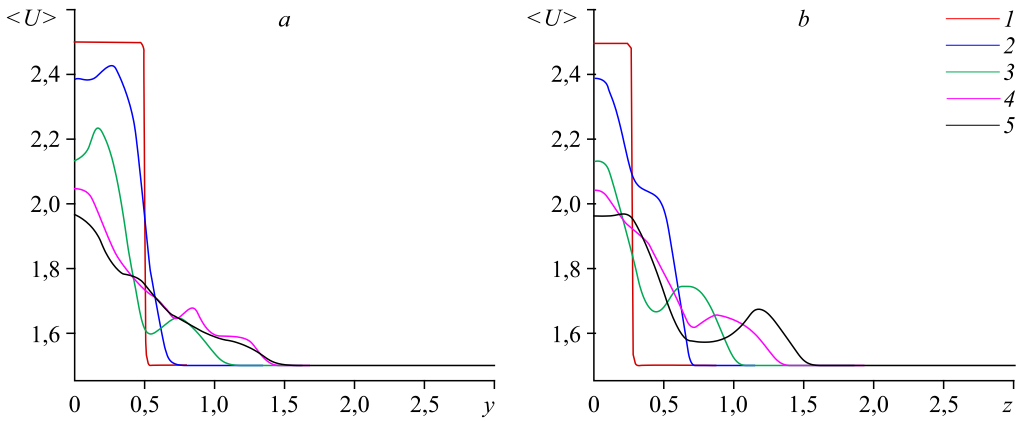


Рис. 6. Профили усредненной продольной компоненты скорости вдоль осей y (a) и z (b) для прямоугольной струи при $M_j = 2,5$, $M_a = 1,5$.
 $x = 0$ (1), 10 (2), 20 (3), 30 (4), 40 (5).

Анализ аналогичных профилей усредненной скорости для случая дозвукового спутного потока ($M_j = 1,5$, $M_a = 0,5$), построенных на рис. 7, также позволяет говорить о более быстром снижении скорости в ядре струи по сравнению с аналогичным случаем для квадратной струи (см. рис. 3b). В сечении $x = 40$ вблизи выходной границы расчетной области средняя скорость составляет 0,65, что значительно ниже значения 0,88 для квадратной струи. Профили скорости по координате z также являются более наполненными по сравнению с профилями по y на значительном удалении от центральной линии струи. В этом случае можно с уверенностью говорить, что расширение струи происходит на значительно большее расстояние по координате z : в сечении $x = 40$ выход профиля скорости струи на значение, соответствующее скорости спутного потока, происходит при $y \approx 2,2$ и $z \approx 3$. Таким образом, в расчетах наблюдается более быстрое расширение струи по направлению, в котором начальная ширина струи имеет в два раза меньшее значение. На рис. 8 приведены визуализации усредненной скорости течения в различных поперечных сечениях вдоль продольной координаты для случая дозвукового спутного потока $M_j = 1,5$, $M_a = 0,5$, которые подтверждают описанное поведение прямоугольной струи.

На рис. 9 приведены изолинии срединного значения скорости $0,5 \langle U \rangle(x, 0, 0) + U_a$ в различных сечениях по продольной координате при $M_j = 2,5$, $M_a = 1,5$ (рис. 9a) и при $M_j = 1,5$,

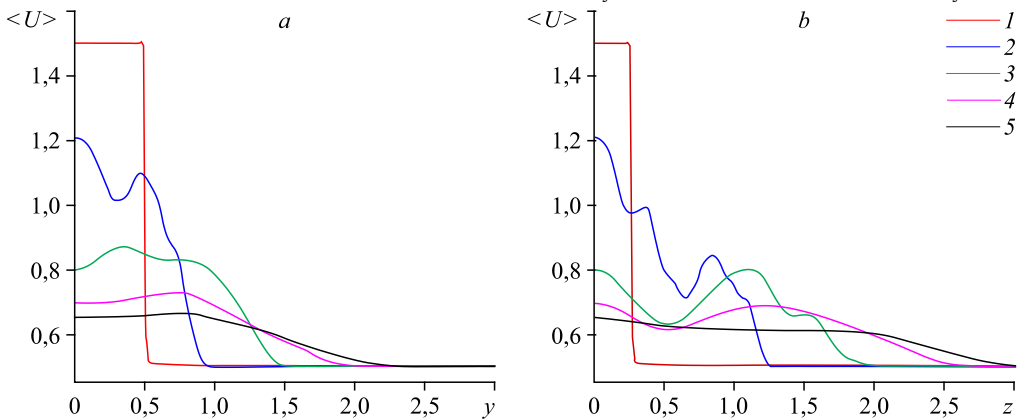


Рис. 7. Профили усредненной продольной компоненты скорости вдоль осей y (a) и z (b) для прямоугольной струи при $M_j = 1,5$, $M_a = 0,5$.
 $x = 0$ (1), 10 (2), 20 (3), 30 (4), 40 (5).

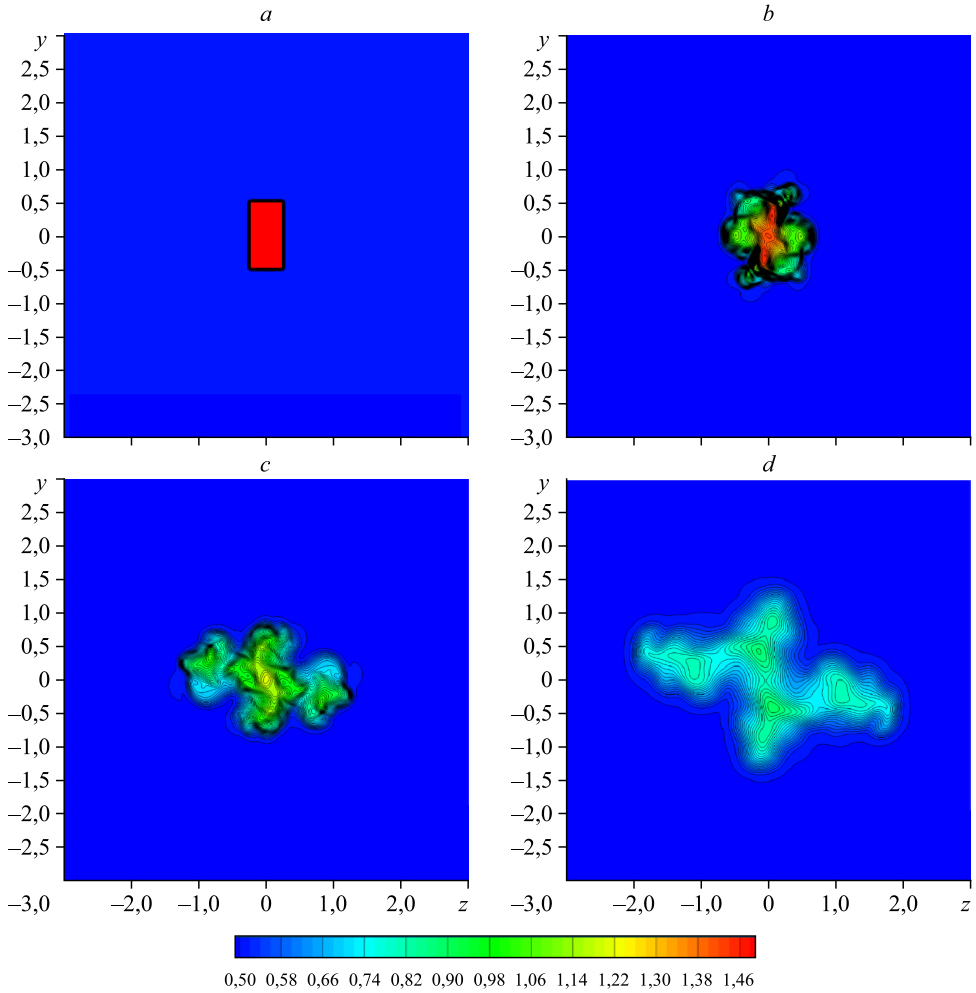


Рис. 8. Усредненная продольная компонента скорости для прямоугольной струи при $M_j = 1,5$, $Ma = 0,5$ в различных сечениях по продольной координате: $x = 0$ (a), 5 (b), 10 (c) и 20 (d).

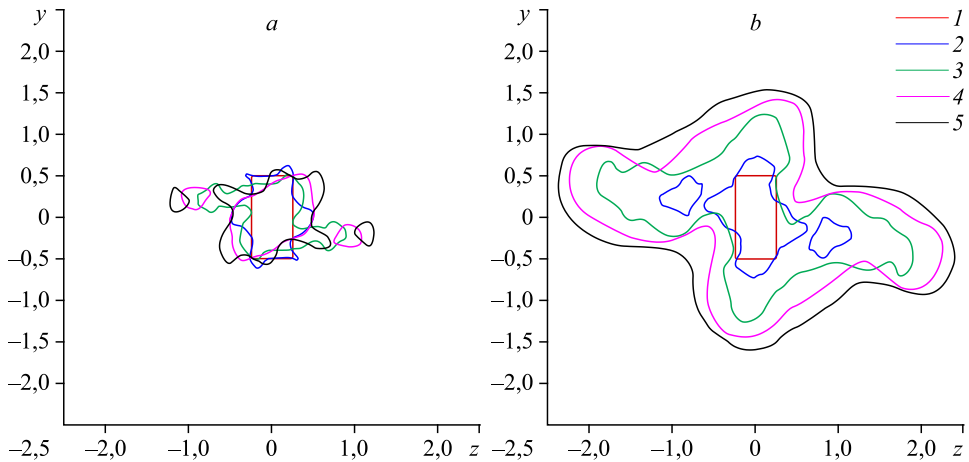


Рис. 9. Изолинии среднего значения скорости $0,5 (\langle U \rangle(x, 0, 0) + U_a)$ при $M_j = 2,5$, $Ma = 1,5$ (a) и $M_j = 1,5$, $Ma = 0,5$ (b) в различных сечениях по продольной координате: $x = 0$ (1), 10 (2), 20 (3), 30 (4), 40 (5).

$M_a = 0,5$ (рис. 9b). На рис. 9 видно, что во-первых, предпочтительным направлением расширения струи в обоих случаях является координата z , а во-вторых, расширение струи в случае дозвукового спутного потока происходит на значительно большее расстояние. Выбор такого направления расширения струи, наблюдаемый в наших численных расчетах, является, по-видимому, следствием известного эффекта переключения осей для прямоугольных струй.

Выводы

На основе численного решения нестационарных трехмерных уравнений Навье–Стокса с разрешением вихревой структуры течения проведено исследование развития неустойчивостей в сверхзвуковых изобарических струях одноатомного теплопроводного газа, истекающих из сопел квадратного и прямоугольного сечений в спутный поток. Во входном сечении задается кусочно-постоянный ударный профиль струи. Моделирование проводится при различных значениях чисел Маха струи и спутного потока. На основное течение во входном сечении накладываются нестационарные возмущения нормальной и трансверсальной компонент скорости в виде бегущих волн. Результаты численных расчетов показывают, что во всех рассмотренных случаях неустойчивость быстро развивается на границе струи и затем распространяется на всю струю. В численном моделировании выявлены качественные и количественные различия в развитии неустойчивости в случаях со сверхзвуковым и дозвуковым спутными потоками. Для прямоугольных струй с соотношением сторон поперечного сечения 1:2 в расчетах наблюдается предпочтительное расширение струи в направлении, в котором ее начальная ширина имеет меньшее значение, что, по-видимому, является отражением эффекта переключения осей прямоугольной струи.

Список литературы

1. Шур М.Л., Спаларт Ф.Р., Стрелец М.Х. Расчет шума сложных струй на основе “первых принципов” // Матем. моделирование. 2007. Т. 19, № 7. С. 5–26.
2. Любимов Д.А. Разработка и применение метода высокого разрешения для расчета струйных течений методом крупных вихрей // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50, № 3. С. 450–466.
3. Sforza P.M., Steiger M.H., Trentacoste N. Studies on three-dimensional viscous jets // AIAA J. 1966. Vol. 4, No. 5. P. 800–805.
4. Gutmark E.J., Schadow K.C., Yu K.H. Mixing enhancement in supersonic free shear flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 1995. Vol. 27. P. 375–417.
5. Gutmark E.J., Grinstein F.F. Flow control with noncircular jets // Annu. Rev. Fluid Mech. 1999. Vol. 31. P. 239–272.
6. Zaman K.B.M.Q. Spreading characteristics of compressible jets from nozzles of various geometries // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 383. P. 197–228.
7. Grinstein F.F., Gutmark E., Parr T. Near field dynamics of subsonic free square jets. A computational and experimental study // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7, No. 6. P. 1483–1497.
8. Grinstein F.F. Vortex dynamics and entrainment in rectangular free jets // J. Fluid Mech. 2001. Vol. 437. P. 69–101.
9. Rembold B. Direct and large-eddy simulation of compressible rectangular Jet flow: Dissertation ETH, 2003. No. 15081. 106 p.
10. Shershnev A.A., Kudryavtsev A.N., Kashkovsky A.V., Khotyanovsky D.V. HyCFS, a high-resolution shock capturing code for numerical simulation on hybrid computational clusters // AIP Conf. Proc. 2016. Vol. 1770. Art. 030076. 11 p.
11. MPI [Электронный ресурс]: A Message-Passing Interface Standard, Version 3.0. (High Performance Computing Center, Stuttgart. 2012. 868 p. <http://www.mpi-forum.org/docs/mpi-3.1/mpi31-report.pdf>.
12. OpenMP Application Programming Interface Specification Version 5.2. OpenMP Architecture Review Board (author); Bronis de Supinski, Michael Klemm (eds.), 2021. 669 p. <https://www.amazon.com/Application-Programming-Interface-Specification-Version/dp/BO91LJLTE>.

13. **Jiang G.S., Shu C.-W.** Efficient implementation of weighted ENO schemes // *J. Comput. Phys.* 1996. Vol. 126. P. 202–228.
14. **Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
15. **Khotyanovsky D., Kudryavtsev A., Shershnev A.** Numerical simulation of the transitional supersonic boundary layer on a compression ramp // *AIP Conf. Proc.* 2019. Vol. 2125. Art. 030031. 4 p.
16. **Tsuchiya Y., Horikoshi C., Sato T.** On the spread of rectangular jets // *Experiments in Fluids.* 1986. Vol. 4. P. 197–204.

*Статья поступила в редакцию 20 октября 2022 г.,
после доработки — 20 октября 2022 г.,
принята к публикации 8 декабря 2022 г.*