

УДК 536.3+536.42

## **Расчетное исследование нестационарного теплового состояния слоя льда с учетом рассеяния излучения\***

**С.Д. Слепцов<sup>1</sup>, Н.А. Саввинова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Северо-восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск*

E-mail: sleptsov@itp.nsc.ru

Проведено численное исследование формирования температурного поля, скорости таяния вертикально расположенного на непрозрачной подложке слоя рассеивающего излучение льда при радиационном нагреве. Для решения части задачи, касающейся радиационного теплообмена, использован модифицированный метод средних потоков, учитывающий объемное поглощение и рассеяние излучения в среде, а также селективный характер источника излучения. Показано влияние спектральных объемных свойств льда на таяние и рост температуры необлучаемой стороны. Сравнение результатов расчетов с опытными данными показывает удовлетворительное согласование.

**Ключевые слова:** лед, однофазная задача Стефана, рассеяние излучения, температурное поле, скорость таяния.

### **Введение**

Лед, а также толща снега представляют собой полупрозрачные среды, в которых тепло переносится совместно излучением и теплопроводностью. В монографии [1] описаны ранние исследования теплофизических процессов в снежном и ледяном покрове. В работах [2] и [3] представлено современное состояние теоретического и численного моделирования изменений в снежно-ледяной толще при солнечном облучении, когда снег и лед рассматриваются как поглощающие и рассеивающие среды.

Моделирование таяния льда основано на задаче Стефана для полупрозрачной среды. Валидацию решения однофазной задачи Стефана в полупрозрачной среде авторы [4–6] провели на примере таяния чистого, нерассеивающего льда, используя экспериментальные данные [7]. В указанной расчетно-экспериментальной работе эксперимент проводился в климатической камере при постоянной температуре 0 °С под действием излучения ламп двух видов: галогеновой и с нихромовой нитью. Слой льда находился на вертикальной непрозрачной подложке. Таким образом, моделировалось радиационное таяние чистого (нерассеивающего) льда и рассеивающего излучение льда в условиях падающего коротковолнового и длинноволнового потоков излучения. В математической модели процесса авторы пренебрегли наличием образующейся на поверхности льда пленки

---

\* Исследование таяния льда выполнено в рамках государственного задания ИТ СО РАН (проект АААА-А17-117022850029-9), исследование РКТ во льду выполнено на средства РФФИ (проект № 18-48-140011 p\_a).

воды и расчет проводили в однофазной постановке задачи Стефана. Сравнение скорости таяния слоя льда и нагрева необлучаемой поверхности льда показало удовлетворительные согласование экспериментальных и численных результатов. При расчете радиационного теплообмена в [7] использовались подгоночные параметры и прямое интегрирование по закону Бугера. Однако для рассеивающего льда авторы, к сожалению, не указали характер рассеяния излучения, альbedo и индикатриссу рассеяния.

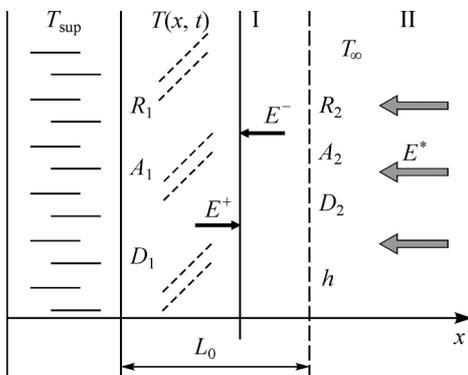
Для решения задач с учетом анизотропного рассеяния излучения в слое льда можно использовать разложение индикатриссы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра [8] или, например, наиболее простое транспортное приближение [9–11]. При использовании транспортного приближения индикатрисса рассеяния представляется в виде суммы изотропного слагаемого и слагаемого, соответствующего малоугловому рассеянию света. Транспортное приближение для индикатриссы рассеяния хорошо работает при многократном рассеянии излучения в среде. При этом математическая формулировка задачи переноса излучения в точности совпадает со случаем изотропного рассеяния, достаточно лишь заменить обычный коэффициент рассеяния на транспортный коэффициент рассеяния.

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие методики исследований [4–6] с учетом объемных оптических свойств полупрозрачной среды. При этом используются математическая модель и вычислительный алгоритм, описанные в этих работах, также учитываются селективность источника излучения, селективное объемное поглощение и рассеяние излучения. Для краткости транспортный коэффициент рассеяния будем называть далее коэффициентом рассеяния. Проводится сравнение результатов численного расчета с экспериментальными данными [7].

### Постановка задачи

На рис. 1 приведена геометрическая схема задачи, в которой слой рассеивающего льда толщиной  $L_0$  расположен на вертикальной непрозрачной подложке и находится в среде с постоянной температурой  $T_\infty$ . Правая поверхность плоского слоя льда освещается лампой с температурой накаливания нити 3200 К с постоянным падающим потоком излучения  $E_v^* = 4648,88 \text{ Вт/м}^2$ . Спектральный состав источника излучения аналогичен [6]. Авторы [3, 7] указывают, что в диапазоне длин волн излучения от 0,3 до 1,2 мкм (далее — коротковолновый диапазон) рассеяние излучения значительно превалирует над поглощением, а в диапазоне длин волн от 1,2 мкм и выше (длинноволновый диапазон), наоборот, поглощение излучения во льду значительно превалирует над рассеянием.

Предполагается, что граничные поверхности слоя льда диффузно поглощают, отражают и пропускают излучение таким образом, что  $A_i + R_i + D_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ , где  $A_i$ ,  $R_i$ ,  $D_i$  — поглощательная, отражательная и пропускательная полусферические способности поверхности льда, индекс 1 соответствует левой стороне поверхности, 2 — облучаемой правой стороне. Предполагается также справедливость закона Кирхгофа:  $A_i = \varepsilon_i$ . Левая



поверхность подложки поддерживается при постоянной температуре  $T_{\text{sub}} = 260,15 \text{ К}$ , которая совпадает с начальной температурой плоского слоя льда  $T(x, 0)$ , температура внутри камеры  $T_\infty = 273,15 \text{ К}$  [7].

Решение задачи проводится в два этапа. На первом этапе рассматривается радиационно-кондуктивный теплообмен, продолжающийся до момента достижения температурой правой поверхности слоя льда  $T(L_0, t)$

Рис. 1. Геометрическая схема задачи.

температуры фазового перехода  $T_f$ . На втором этапе решается задача Стефана с фиксированным значением температуры правой границы  $T(L(t), t) = T_f$ , а на облучаемой поверхности предполагается появление пленки воды, стекающей под действием силы тяжести. Будем полагать, что температура пленки  $T_{\text{fil}}$  выше температуры фазового перехода льда и, таким образом, граничное условие на облучаемой поверхности учитывает собственное излучение и конвективный теплообмен с учетом пленки воды.

Нестационарное уравнение энергии в плоском слое льда с температурой  $T(x, t)$  с учетом переноса энергии излучением имеет вид:

$$c_p \rho \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} - E(x, t) \right), \quad 0 < x < L(t), \quad (1)$$

здесь  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении,  $\rho$  — плотность,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $E(x, t) = E^+(x, t) - E^-(x, t)$  — плотность потока результирующего излучения.

Граничные условия для уравнения (1) на первом этапе процесса записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \partial T / \partial x = (1 - R_1) E(x, t) & \text{при } x = 0, \\ \lambda \partial T / \partial x - h(T_\infty - T) - |E_{\text{res}, 2}| = 0 & \text{при } x = L_0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $|E_{\text{res}, 2}| = A_2 (E^+(x, t) + E_v^*) - \varepsilon_2 \sigma_0 T^4(x, t)$ .

Согласно [7], левая поверхность подложки поддерживается при постоянной температуре  $T_{\text{sub}}$ . На ее правой поверхности, на границе со льдом, перенос тепла осуществляется теплопроводностью и излучением: правая граница льда подвергается облучению от источника излучения, а также на неё влияет охлаждение, связанное с конвекцией. Уравнения (1) и (2) дополняются начальным условием  $T(x, 0) = T_{\text{sub}}$ .

На втором этапе процесса температура поверхности правой границы фиксирована при  $x = L(t)$ :  $T(x, t) = T_f$ . Граничное условие (2) преобразуется в условие Стефана с учетом образующейся на поверхности тонкой пленки воды. Предполагаем, что пленка воды является изотермической и перепад температуры по ее толщине пренебрежимо мал:

$$\lambda \partial T / \partial x + h(T_{\text{fil}} - T_\infty) - |E_{\text{res}, \text{fil}}| = \rho \gamma \partial L / \partial t, \quad (3)$$

где

$$|E_{\text{res}, \text{fil}}| = A_2 (E^+(x, t) + E_v^*) - \varepsilon_2 \sigma_0 (T^4(x, t) - T_{\text{fil}}^4), \quad x = L(t), \quad (4)$$

$T_{\text{fil}}$  — температура пленки воды,  $\gamma$  — скрытая теплота фазового перехода. В условии (3) учтена теплоотдача с внешней поверхности пленки воды, в (4) — собственное излучение пленки и правой поверхности. Предположение о наличии тонкой пленки воды на поверхности льда не противоречит однофазному приближению задачи Стефана, поскольку в самой пленке излучение не поглощается и она учитывается лишь в дополнительном граничном условии на межфазной поверхности. Тепловая задача решается только в толще льда на вертикальной подложке.

В безразмерном виде уравнения (1), (2) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{N} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \quad \text{при } 0 < \xi < 1, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = (1 - R_1) \frac{\Phi}{N} \text{ при } \xi = 0, \\ \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \text{Bi}(\theta_\infty - \theta) - \frac{\varepsilon_2}{N} \left[ \Phi^+(\xi, \eta) + \Phi_v^* - \frac{\theta^4}{4} \right] = 0 \text{ при } \xi = 1 \end{cases} \quad (6)$$

Система уравнений (5) и (6) дополняется начальным условием  $\theta(\xi, 0) = \theta_{\text{sub}}$ . Здесь  $\xi = x/L_0$  — безразмерная координата по толщине слоя льда;  $\theta_i = T_i/T_f$ , где  $i = \infty, \text{sub}, \text{fil}$  — безразмерные температуры окружающей среды, подложки и пленки воды соответственно,  $\eta = (a \cdot t)/L(t)^2$  — безразмерное время,  $a = \lambda/(c_p \rho)$  — коэффициент температуропроводности,  $\text{Bi} = L_0 h/\lambda$  — число Био,  $N = \lambda/(4\sigma_0 T_f^3 L_0)$  — радиационно-кондуктивный параметр,  $\Phi^\pm = E^\pm/(4\sigma_0 T_f^4)$  — безразмерная плотность потока результирующего излучения,  $\Phi_v^* = E_v^*/(4\sigma_0 T_f^4)$  — безразмерная селективная плотность потока падающего излучения.

Преобразование краевой задачи (1), (3), (4) на этапе таяния льда удобно представить в виде лагранжевых преобразований:  $\xi = x/L(t)$  [4 – 6, 8]. Такой подход называется методом выпрямления фронтов и позволяет фиксировать координату фронта фазового перехода в границах  $0 \leq \xi \leq 1$ , при этом границы раздела становятся плоскопараллельными друг другу. Уравнение энергии (1) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \xi \frac{\dot{s}}{s} \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{sN} \frac{\partial \Phi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad \text{при } 0 < \xi < 1. \quad (7)$$

Граничное условие и условие Стефана (3), с учетом (4), принимают вид:

$$\begin{aligned} \theta_2(\xi, \eta) &= 1, \\ \frac{1}{s} \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \text{Bi}(\theta_{\text{fil}} - \theta_\infty) - \frac{\varepsilon_2}{N} \left[ \Phi^+(\xi, \eta) + \Phi_v^* + \frac{\theta_{\text{fil}}^4}{4} - \frac{\theta^4}{4} \right] &= \frac{\dot{s}}{\text{St}} \quad \text{при } \xi = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Граничные условия (7) и (8) дополняются начальными условиями:  $\theta(\xi, 0) = f(\xi)$ ,  $s(0) = 1$ . В уравнениях (7) и (8)  $s(\eta) = L(t)/L_0$ ,  $\dot{s} = ds/d\eta$  — скорость распространения фронта таяния,  $\text{St} = T_f c_p/\gamma$  — число Стефана. Входящие в уравнения (6)–(8) безразмерные плотности потоков излучения  $\Phi^\pm$ ,  $\Phi_v = \sum_j (\Phi_j^+ - \Phi_j^-)$  определяются из решения уравнения переноса излучения в плоском слое излучающей, поглощающей и рассеивающей среды с известным распределением температур по слою,  $j$  — номер спектральной полосы [2, 4].

Как и в прежних работах авторов, расчет переноса излучения проводится с использованием простого и достаточно точного модифицированного метода средних потоков [2, 6, 8]. Согласно этому подходу, интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений для плоского слоя полупрозрачной поглощающей среды. Дифференциальный аналог уравнения переноса для полусферических потоков  $\Phi_j^\pm$  с учетом рассеяния излучения представляется в виде [2, 6]:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau_j}(\Phi_j^+ - \Phi_j^-) + (1 - \omega_j)(m_j^+ \Phi_j^+ - m_j^- \Phi_j^-) = n^2 \Phi_0, \\ \frac{d}{d\tau_j}(m_j^+ l_j^+ \Phi_j^+ - m_j^- l_j^- \Phi_j^-) + (1 - \omega_j)(\Phi_j^+ - \Phi_j^-) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Граничные условия для системы уравнений (9) в безразмерных переменных записываются следующим образом [2]:

$$\begin{cases} \tau_{j,I} = 0: \Phi_j^- = (1 - R_2) \Phi_j^* + \left(1 - \frac{n^{*2}}{n^2}\right) \Phi_j^- + R_2 \frac{n^{*2}}{n^2} \Phi_j^+, \\ \tau_{j,I} = \alpha_j L(t): \Phi_j^+ = \varepsilon_1 \frac{\Phi_{0j}}{4} + R_1 \Phi_j^-, \\ \tau_{j,II} = \alpha_j L(t) + \infty: \Phi_{j,II}^- = \Phi_j^*. \end{cases} \quad (10)$$

В граничных условиях (10) учтен селективный источник падающего излучения  $\Phi_{\nu}^*$ . Здесь

$$\Phi_j^{\pm}(\tau, \eta) = 2\pi \int_{0(-1)}^{1(0)} I_{\nu}(\tau, \mu) \mu d\mu \left/ 4\sigma_0 T_f^4, \quad m^{\pm}(\tau) = \int_{0(-1)}^{1(0)} I_{\nu}(\tau, \mu) d\mu \left/ \int_{0(-1)}^{1(0)} I_{\nu}(\tau, \mu) \mu d\mu, \right.$$

$$l^{\pm}(\tau) = \int_{0(-1)}^{1(0)} I_{\nu}(\tau, \mu) \mu^2 d\mu \left/ \int_{0(-1)}^{1(0)} I_{\nu}(\tau, \mu) \mu d\mu, \quad \Phi_{0\nu} = n^2 B_{\nu} / (4\sigma_0 T_f^4) — \text{безразмерная плот-}$$

ность потока равновесного излучения,  $B_{\nu}$  — функция Планка,  $n$  — показатель преломления льда,  $n^*$  — показатель преломления внешней среды,  $I_{\nu}$  — интенсивность излучения,  $\mu$  — косинус угла между направлением распространения излучения и осью  $x$ ,  $\tau_j = \alpha_j L(t) / (1 - \omega_j)$  — спектральная оптическая толщина слоя в момент времени  $t$ ,  $\omega_j = \beta_j / (\beta_j + \alpha_j)$  — спектральное альbedo однократного рассеяния,  $\beta_j$  — спектральный коэффициент рассеяния. Значения коэффициентов  $m^{\pm}$ ,  $l^{\pm}$  определяются из рекуррентного соотношения, полученного с помощью формального решения уравнения переноса излучения,  $j$  — номер спектральной полосы. Слой I относится ко льду, слой II — к внешнему пространству (рис. 1) [2, 4 – 6].

Решение краевой задачи сводится к определению температур  $\theta(\xi, \eta)$  и плотностей потоков результирующего излучения  $\Phi_{\nu}(\xi, \eta)$  в области  $G = \{0 \leq \xi \leq 1; 0 \leq \eta \leq \eta_1\}$ , представляющей собой плоский слой селективно поглощающего, излучающего и рассеивающего льда. Положение фронта фазового перехода  $s(\eta)$  меняется от 1 до 0. Краевая задача (5) – (8) решается конечно-разностным методом, нелинейная система неявных разностных уравнений — методом прогонки и итераций. При решении радиационной задачи используются итерации, на каждом шаге которых краевая задача (9) и (10) решается методом матричной факторизации. Быстрая сходимость такого метода решения позволяет получать достаточно точные результаты.

### Результаты и анализ

Ниже представлен анализ результатов численного моделирования вертикально расположенного слоя рассеивающего излучение льда со следующими физическими параметрами: начальная толщина льда  $L_0 = 0,045$  м, температура левой границы подложки и начальная температура подложки и льда  $T_{\text{sub}} = 260,15$  К, температура атмосферы внут-

ри камеры поддерживается при постоянном значении  $T_\infty = 273,15$  К, равном температуре таяния льда  $T_f$ ; температура пленки воды  $T_{fil} = 277,15$  К, постоянная плотность падающего потока излучения  $E_v^* = 4648,88$  Вт/м<sup>2</sup>. Приняты следующие теплофизические свойства льда, рассеивающего излучение: теплопроводность  $\lambda = 1,87$  Вт/(м·К); температуропроводность  $a = 1,31 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, скрытая теплота фазового перехода  $\gamma = 335$  кДж/кг. Оптические параметры: показатель преломления льда  $n = 1,31$ , воздуха  $n^* = 1$ ; коэффициенты отражения  $R_1 = 0,97$  и  $R_2 = 0,063$ ; степень черноты левой границы  $\varepsilon_1 = 1 - R_1$ . Спектральные характеристики льда и источника излучения представлены в таблице. В расчетах варьировались три параметра: коэффициент теплоотдачи  $h$ , степень черноты  $\varepsilon_2$  облучаемой поверхности льда и альbedo в длинноволновой части спектра  $\omega_2$ . На первом этапе  $h = 17,17$  Вт/(м<sup>2</sup> К),  $\varepsilon_2 = 0,97$ . На втором этапе  $h = 80$  Вт/(м<sup>2</sup> К), что приблизительно соответствует условиям теплоотдачи в [7], степень черноты  $\varepsilon_2$  принята равной 0,5. Приведенные выше значения параметров получены в ходе численных экспериментов и соответствуют условиям на сильно шероховатых поверхностях [7]. Значения  $\omega_2$  приведены в таблице.

На рис. 2 представлено расчетное поле температуры льда на этапах нагрева и последующего таяния при альbedo  $\omega_1 = 0,999$  и  $\omega_2 = 0,1$  — наиболее характерных значениях для рассеивающего излучения льда. Здесь и далее кривые между 1 и 2 относятся к первому этапу, 2 и 3 — ко второму. На этапе нагрева кривые температуры не монотонны, у границ заметно влияние оптических свойств поверхности, а также (справа) влияние излучения источника. На втором этапе температурные кривые становятся монотонными и в конце расчетов, с уменьшением толщины среды, оказываются линейными.

На рис. 3 представлено поле плотности потока результирующего излучения во льду при аналогичных значениях альbedo рассеяния. Положительное значение результирующего излучения свидетельствует о преобладании падающего излучения над собственным,

Таблица  
Спектральные характеристики льда и источника излучения

$j$	$\nu_j, 10^{14}$ Гц	$\lambda_j, \text{мкм}$	$\alpha_j, \text{м}^{-1}$	$\omega_j$	$E_j^*, \text{Вт/м}^2$
1	9,09 – 2,02	0,33 – 1,2	0,001	0,999	2073
2	2,02 – 1,18	1,2 – $\infty$	1	0,1/0,4/0,8	1883

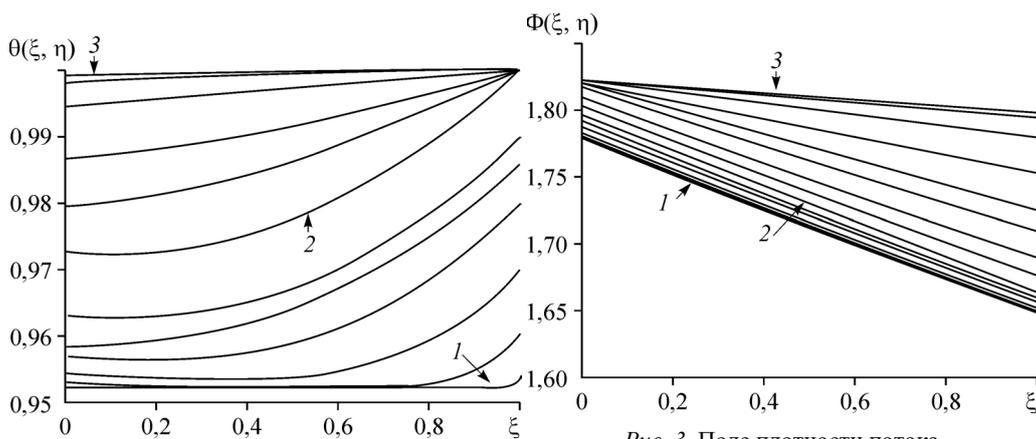


Рис. 2. Расчетное поле температуры слоя льда.

Кривые между 1 и 2 — этап нагрева, между 2 и 3 — этап таяния.

Рис. 3. Поле плотности потока результирующего излучения.

Кривые между 1 и 2 — этап нагрева, между 2 и 3 — этап таяния.

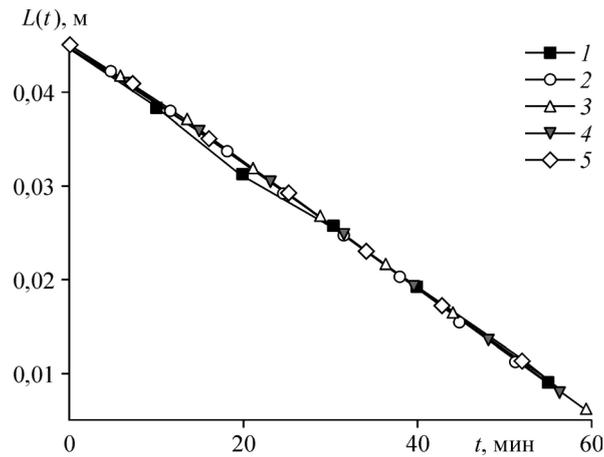


Рис. 4. Темп таяния льда при разных значениях альбедо  $\omega_2$  и сравнение полученных результатов с данными [7].

1 — данные эксперимента, расчет для  $\omega_2 = 0,1$  (2),  $0,4$  (3),  $0,8$  (4) и чистого льда (5).

что характерно для этого материала. На этапе нагрева и частично на этапе таяния кривые характеризуются постоянным градиентом. Со временем, с последующим уменьшением толщины льда, левая сторона практически фиксируется в одной точке, тогда как правая сторона продолжает рост, уменьшая тем самым градиент.

На рис. 4 и 5 показаны темпы таяния и роста температуры левой границы льда со временем и их сравнение с экспериментальными данными [7]. Моделирование проводилось при трех значениях альбедо:  $\omega_2 = 0,1$ ,  $0,4$  и  $0,8$ , а также для нерассеивающего излучения льда ( $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ). Значения альбедо  $0,4$  и  $0,8$ , принятые для численного эксперимента, в реальности в этом диапазоне спектра у льда не наблюдаются. Для нерассеивающего льда теплофизические параметры взяты такими же, как и у рассеивающего. На рис. 4 расчетные кривые лежат в пределах экспериментальных данных и не зависят от альбедо длинноволнового диапазона  $\omega_2$ . Это связано с тем, что на коротковолновом участке длин волн ( $j = 1$ ) приходится большая часть падающего излучения  $E_1^*$  и рассеяние в этой области  $\omega_1$  значительно преобладает над поглощением (см. табл.).

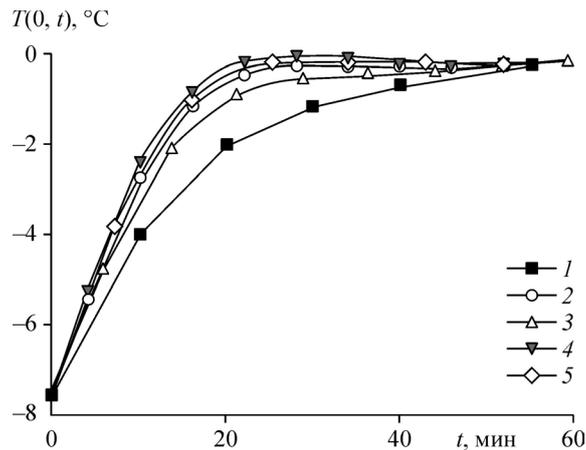


Рис. 5. Рост температуры необлучаемой поверхности льда при разных значениях альбедо  $\omega_2$  и сравнение полученных результатов с данными [7].

Обозначения см. на рис. 4.

Расчетные кривые роста температуры и соответствующие экспериментальные данные на рис. 5 более-менее согласуются друг с другом, но имеют разный характер. У расчетных линий явно выражен рост в момент времени  $t < 20$  мин, который затем останавливается, достигнув квазистационарного состояния. Экспериментальные точки показывают монотонный рост в течение всего процесса таяния. Более близкая к опытным данным кривая наблюдается при  $\omega_2 = 0,4$ , при других значениях альбеда расхождение кривых более заметно. В работе [7] авторы также не смогли достичь полного согласования расчетов с экспериментом, что указывает на необходимость корректного измерения параметров рассеяния излучения в образце льда и моделирования появления сильной шероховатости на облучаемой поверхности льда.

### Заключение

Представлена физико-математическая модель таяния льда с учетом рассеяния излучения. В вычислениях радиационной части использован модифицированный метод средних потоков, учитывающий объемное селективное поглощение и рассеяние, а также селективный характер источника излучения. Проанализированы температурное поле, поле результирующего излучения, темп таяния и роста температуры необлучаемой стороны льда. Показано, что скорость таяния в большей степени зависит от альбеда коротковолновой части спектрального диапазона, тогда как рост температуры необлучаемой стороны льда больше зависит от длинноволнового спектрального диапазона. Сравнение результатов с экспериментальными данными показывает удовлетворительное согласование с расчетами, однако модель требует доработки с учетом реальных характеристик анизотропного рассеяния излучения в среде.

### Список литературы

1. Краус М.С., Мерзликин В.Г. Радиационная теплофизика снега и льда. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 262 с.
2. Тимофеев А.М. Моделирование радиационного нагрева снежно-ледяного покрова // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 5. С. 797–804.
3. Dombrovsky L.A., Kokhanovsky A.A., Randrianalisoa J.H. On snowpack heating by solar radiation: a computational model // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 2019. Vol. 227. P. 72–85.
4. Слепцов С.Д., Рубцов Н.А., Саввинова Н.А. Моделирование нагрева и таяния льда в приближении задачи Стефана с учетом излучения // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 3. С. 439–446.
5. Sleptsov S.D., Savvinova N.A., Rubtsov N.A. Ice melting with allowance for selective absorption in the medium // J. Engng Thermophys. 2019. Vol. 28, No. 1. P. 114–122.
6. Слепцов С.Д., Саввинова Н.А. Таяние льда при облучении селективным источником теплового излучения // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 26, № 5. С. 813–820.
7. Seki N., Sugawara M., Fukusaki S. Radiative melting of ice layer adhering to a vertical surface // Wärme- und Stoffübertragung. 1979. Vol. 12, Iss. 2. P. 137–144.
8. Рубцов Н.А., Тимофеев А.М., Саввинова Н.А. Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003. 197 с.
9. Dombrovsky L.A., Baillis D. Thermal radiation in disperse systems: an engineering approach. N.Y.: Begell House, 2010. 689 p.
10. Dombrovsky L.A. The use of transport approximation and diffusion-based models in radiative transfer calculations // Computational Thermal Sci. 2012. Vol. 4, No. 4. P. 297–315.
11. Dombrovsky L.A. Scattering of radiation and simple approaches to radiative transfer in thermal engineering and bio-medical applications // Springer Series in Light Scattering, Chap. 2 / Ed. by A. Kokhanovsky. 2019. Vol. 4. P. 71–127.

*Статья поступила в редакцию 11 ноября 2019 г.,  
после доработки — 28 января 2020 г.,  
принята к публикации 10 февраля 2020 г.*