УДК 541.64:539.3

# СТРУКТУРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ И ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ

В. В. Шевелев

Московская государственная академия тонкой химической технологии
им. М. В. Ломоносова, 119571 Москва
E-mail: valeshevelev@yandex.ru

Развит структурно-кинетический вероятностный подход к исследованию процесса хрупкого разрушения материалов. В рамках указанного подхода определены условия пассивного (скрытого) и активного развития процесса хрупкого разрушения материалов. Получено асимптотическое выражение для средней долговечности хрупких материалов в области малых напряжений, в которой происходит пассивное развитие процесса разрушения.

Ключевые слова: структурно-кинетическая вероятностная модель, хрупкий материал, разрушение, долговечность.

**Введение.** Установлено, что разрушение нагруженных материалов является случайным процессом, стохастичность которого обусловлена двумя факторами: случайным характером распределения дефектов структуры материала по степени опасности, на которых под действием внешнего механического поля формируются трещины, и термофлуктуационным характером их развития в материале [1–4]. Как правило, разрушение материалов не является хрупким: ему предшествуют процессы структурной релаксации.

Тем не менее исследование закономерностей хрупкого разрушения материалов представляет значительный интерес. Это обусловлено тем, что оно является предельным сценарием разрушения материалов в реальных условиях их эксплуатации, а также тем, что элементарные акты, в результате которых происходит хрупкое разрушение (разрыв и восстановление связей между кинетическими единицами (атомами, молекулами), ответственными за разрушение), являются частью тех элементарных актов, которые вызывают разрушение материалов, осложненное происходящими при этом релаксационными процессами. Заключительным элементарным актом разделения материала на части является разрыв связей между кинетическими единицами, ответственными за разрушение, как при наличии предшествующих разрушению необратимых изменений структуры, так и в их отсутствие.

При моделировании процесса разрушения необходимо учитывать следующие факторы: 1) изменение энергетических барьеров при переходе системы из данного состояния в соседнее (в результате отмеченных выше элементарных актов разрушения), что требует расчета полей напряжений в материале с учетом наличия в нем трещин; 2) распределение имеющихся в материале трещин по степени опасности разрушения ими материала и случайный характер этого распределения; 3) стохастический характер развития имеющихся в материале опасных трещин, обусловленный случайным характером появления тепловых флуктуаций, приводящих к элементарным актам разрушения. Подход, учитывающий указанные факторы, был развит в работах [1, 4–7].

Большинство результатов экспериментальных [1, 2] и теоретических [4, 5] исследований долговечности материалов получены для той области растягивающих напряжений, в которой справедлива формула С. Н. Журкова (см. [4, 5]). Эти результаты позволили, с одной стороны, доказать термофлуктуационный характер разрушения материалов, а с другой — найти такие характеристики процесса разрушения, как энергия активации элементарного акта разрыва связей $U$, структурно-чувствительный коэффициент $\gamma$, флуктуационный объем $V_a$ и другие предельные характеристики разрушения материала [4, 5].

В указанной области растягивающих напряжений долговечность материала незначительна по сравнению со временем его эксплуатации (см. работы [1, 2], где представлены основные результаты исследований прочности и долговечности материалов). Однако большинство изделий, по-видимому, должны иметь среднюю долговечность, достаточную для их длительной эксплуатации. Следовательно, все изделия, как правило, эксплуатируются в той области внешних нагрузок, где не выполняется зависимость средней долговечности $\tau$ от растягивающего напряжения $\sigma$, определяемая по формуле С. Н. Журкова [3].

В указанной области внешних нагрузок (далее — область малых для данного материала напряжений) средняя долговечность материалов велика, вследствие чего экспериментальное исследование ее зависимости от растягивающего напряжения $\sigma$ практически невозможно (по-видимому, это является причиной дискуссий о существовании "безопасного" растягивающего напряжения, ниже которого материал не разрушается). В силу указанных обстоятельств теоретическое изучение зависимости средней долговечности $\tau$ от напряжения $\sigma$ в области его малых значений особенно важно.

Исследование долговечности хрупких материалов в области малых напряжений, по-видимому, впервые выполнено в работах [6, 7]. В рамках развитого в [6, 7] подхода получено выражение для функции и плотности распределения вероятности значений долговечности как функции среднего числа трещин исходной (начальной) длины $l$ в единице объема материала в сочетании с соответствующей функцией распределения времен достижения трещиной разрушения, имеющей начальную длину $l$, критической длины $l_{cr}$, начиная с которой трещина увеличивается атермически. При этом показано, что гриффитсов порог хрупкого разрушения материала $\sigma_G$ разделяет для данной характерной для материала трещины разрушения область напряжений $\sigma$ на две: область $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_G$ пассивного развития трещины, в которой средняя скорость ее продвижения $\langle v \rangle \leqslant 0$, и область $\sigma > \sigma_G$ активного развития трещины, в которой $\langle v \rangle > 0$. В [6, 7] установлена асимптотика средней долговечности $\tau$ в области постоянных растягивающих напряжений $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_G$, согласно которой величина $\tau$ пропорциональна величине $\exp{(a/\sigma^2)}$, где $a > 0$ — величина, не зависящая от $\sigma$.

Результаты, представленные в [6, 7], получены для тонких пластин, т. е. фактически в двумерном (плоском) случае с одномерными трещинами. В связи с этим необходимо определить характер асимптотики средней долговечности в области малых напряжений в случае хрупкого разрушения реальных трехмерных изделий, трещины в которых неодномерны. В данной работе рассмотрена эволюция круговой дискообразной трещины разрушения с характерным для данного материала начальным радиусом $R_0$, расположенной наиболее благоприятно для его увеличения, т. е. перпендикулярно направлению действия внешнего растягивающего напряжения $\sigma$, и получена асимптотика средней долговечности и среднеквадратичного отклонения в области малых напряжений.

**Постановка задачи и ее решение.** Рассматривается образец, в котором трещинами разрушения являются круговые дискообразные трещины, расположенные в плоскости, перпендикулярной направлению действия внешнего растягивающего напряжения $\sigma$. Диаметр образца значительно больше диаметра любой трещины разрушения. Трещины такой ориентации являются наиболее опасными, так как напряжения в их окрестности наибольшие по сравнению с аналогичными трещинами другой ориентации. Так как в области малых напряжений вероятность стать трещиной разрушения наиболее велика для начальной трещины с максимальным характерным размером из числа имеющихся наиболее опасных, то согласно [1, 6, 7] плотность вероятностей значений долговечности хрупких материалов $\varphi(t)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(t)=\sum_{\mu=s,v}\sum_{i=1}^{n_\mu}P_{i,\mu}\varphi_{i,\mu}(t). \tag{1}$$

Здесь

$$P_{i,\mu}=(1-\exp{(-\bar N_{i,\mu})})\exp\Big(-\sum_{\lambda=s,v}\sum_{\mu=i_\lambda}^{n_\lambda}\bar N_{\mu,\lambda}\Big)\ — \tag{2}$$

вероятность того, что наибольшими трещинами в образце являются трещины типов $(i,s)$ и $(i,v)$ (индексы $s$, $v$ обозначают тип трещины: $s$ — поверхностные, $v$ — объемные трещины; индекс $i$ указывает на характерный размер трещины разрушения $R_i$); $n_\mu$ — число возможных размеров трещин $\mu$-типа в материале ($\mu=s,v$); $i_\lambda=i+1$ при $\lambda=\mu$, $i_\lambda=1$ при $\lambda\neq\mu$;

$$\varphi_{i,\mu}(t)=\begin{cases} P_i(R_{k-1,\mu},t-t_{i,\mu}^{(a)})w^+(R_{k-1,\mu}), & t\geqslant t_{i,\mu}^{(a)},\\ 0, & 0\leqslant t\leqslant t_{i,\mu}^{(a)},\end{cases} \tag{3}$$

$P_i(R_{k-1,\mu},t-t_{i,\mu}^{(a)})$ — вероятность найти трещину типа $(i,\mu)$ в момент времени $t\geqslant t_{i,\mu}^{(a)}$ в состоянии с характерным размером (радиусом) $R_{k-1,\mu}$, которая за время $dt$ с вероятностью $w^+(R_{k-1,\mu})$ перейдет в состояние $R_{k,\mu}$ (состояние $R_{k,\mu}$ в пространстве размеров $R$ дискообразных трещин соответствует критическому размеру (радиусу) трещины, начиная с которого трещина растет атермически со скоростью, близкой к скорости звука $c$ в материале [1, 4, 5]); $t_{i,\mu}^{(a)}=(L-R_{k,\mu})/c$ — время роста трещины типа $(i,\mu)$ на атермической стадии; $L$ — характерный размер образца в направлении роста трещины; $w^+(R_{k-1,\mu})$ — частота перехода (вероятность перехода в единицу времени) дискообразной трещины из состояния с радиусом $R_{k-1,\mu}$ в состояние с радиусом $R_{k,\mu}$; $\bar N_{i,\mu}$ — среднее число объемных ($\mu=v$) или поверхностных ($\mu=s$) трещин, находящихся в образце объемом $V$ с площадью поверхности $S$.

Функции $P_i(R_{m,\mu},t-t_{i,\mu}^{(a)})$ являются решением кинетических уравнений [1, 6, 7]

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}P_i(R_{m,\mu},t-t_{i,\mu}^{(a)})=w^+(R_{m-1,\mu})P_i(R_{m-1,\mu},t-t_{i,\mu}^{(a)})+\\ +w^-(R_{m+1,\mu})P_i(R_{m+1,\mu},t-t_{i,\mu}^{(a)})-(w^+(R_{m,\mu})+w^-(R_{m,\mu}))P_i(R_{m,\mu},t-t_{i,\mu}^{(a)}),\\ m=i+1,i+2,\dots,k-1,\quad t>t_{i,\mu}^{(a)};\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}P_i(R_{i,\mu},t-t_{i,\mu}^{(a)})=w^-(R_{i+1,\mu})P_i(R_{i+1,\mu},t-t_{i,\mu}^{(a)})-w^+(R_{i,\mu})P_i(R_{i,\mu},t-t_{i,\mu}^{(a)}),\\ t>t_{i,\mu}^{(a)};\end{gathered} \tag{5}$$

$$P_i(R_{k,\mu},t-t_{i,\mu}^{(a)})=0,\qquad t>t_{i,\mu}^{(a)}; \tag{6}$$

$$P_i(R_{m,\mu},0)=\delta_{mi}, \tag{7}$$

где $\delta_{mi}$ — символ Кронекера ($\delta_{mi}=1$, если $m=i$, и $\delta_{mi}=0$, если $m\neq i$); $P_i(R_{m,\mu},t-t_{i,\mu}^{(a)})$ —

вероятность найти трещину типа $(i,\mu)$ (т. е. имеющую начальный радиус $R_{i,\mu}$) в момент времени $t > t_{i,\mu}^{(a)}$ в состоянии с радиусом $R_{m,\mu}$; $w^+(R_{m,\mu})$ — частота перехода трещины из состояния с радиусом $R_{m,\mu}$ в состояние с радиусом $R_{m+1,\mu}$ в результате разрыва всех связей на ее фронте; $w^-(R_{m,\mu})$ — частота перехода трещины из состояния с радиусом $R_{m,\mu}$ в состояние с радиусом $R_{m-1,\mu}$ в результате восстановления всех связей на ее фронте.

Уравнения (4)–(7) записаны без учета влияния остальных трещин на развитие данной трещины. Это правомерно в рассматриваемой области малых напряжений, так как: 1) основное влияние на время достижения трещиной типа $(i,\mu)$ поглощающего состояния $R_{k,\mu}$ оказывает время нахождения трещины в начальном состоянии $R_{i,\mu}$, в течение которого ее радиус флуктуирует вблизи состояния $R_{i,\mu}$; 2) влияние упругих полей напряжений, создаваемых трещинами, незначительно, так как среднее расстояние между трещинами на начальном этапе их развития обычно намного больше их характерного размера [2], при котором происходит взаимодействие указанных упругих полей.

Для решения задачи (4)–(7) необходимо задать частоты $w^+(R_{m,\mu})$ и $w^-(R_{m,\mu})$. Проведенный анализ поведения возмущения формы круговой дискообразной трещины характерного размера $\lambda_0$ ($\lambda_0$ — среднее расстояние между частицами в материале) [8] показывает, что в макроскопической теории упругости частоты $w^+(R_{m,\mu})$ и $w^-(R_{m,\mu})$ не зависят от числа ранее разорванных или восстановленных по периметру трещины связей, так как эти микроскопические возмущения формы трещины не оказывают существенного влияния на напряжение $\sigma_* = \sigma(R_{m,\mu},\sigma)$ вдоль периметра трещины в рамках континуального подхода к его определению в теории упругости. Вклад возмущения размера $\lambda_0$ в величину $\sigma_*$ имеет порядок $\sigma\lambda_0/R_{m,\mu}$, т. е. значительно меньше величины $\sigma$. Поэтому, как и в [1, 5, 7], напряжение вдоль периметра трещины определяется независимо от числа разорванных на этом периметре связей по формуле

$$\sigma_*(R_{m,\mu},\sigma) = \sigma_* = \frac{2\sigma}{\pi}\sqrt{\frac{R_{m,\mu}}{2\lambda_0}} + \sigma. \tag{8}$$

Так как далее рассматриваются только объемные трещины разрушения т. е. $\mu = v$, индекс $\mu$ в соответствующих обозначениях опускается.

В рамках теории флуктуаций исходя из принципа детального равновесия отношение частоты восстановления разорванной связи $w^-(n,R_m)$, если на фронте трещины имеется $n$ разорванных связей, к частоте ее разрыва $w^+(n-1,R_m)$, если на фронте круговой дискообразной трещины радиусом $R_m$ разорвано $n-1$ связей, равно

$$q = \frac{w^-(n,R_m)}{w^+(n-1,R_m)} = \exp\Big(\frac{\delta\Delta\Phi(n)}{kT}\Big). \tag{9}$$

Здесь $\delta\Delta\Phi(n)$ — изменение термодинамического потенциала системы при увеличении числа разорванных связей на фронте трещины на единицу; $k$ — постоянная Больцмана; $T$ — температура. Величина $\Delta\Phi(n)$ определяется следующим образом. Изменение термодинамического потенциала системы при изменении радиуса круговой дискообразной трещины от начального радиуса $R_i$ до $R_m$ в результате нагружения определяется выражением [8]

$$\Delta\Phi(R_m) = -\frac{8\sigma^2(1-\nu^2)}{3E}\,(R_m^3 - R_i^3) + 2\pi(R_m^2 - R_i^2)\alpha_s, \tag{10}$$

где $E$ — модуль Юнга; $\nu$ — коэффициент Пуассона; $\alpha_s$ — удельная свободная поверхностная энергия; $R_i$ — начальный размер дискообразной трещины. С учетом (10) изменение величины $\Delta\Phi$ при разрыве $n_m = 2\pi R_m/\lambda_0$ связей на фронте трещины с точностью до линейных по $\lambda_0$ членов равно

$$\Delta\Phi(R_m+\lambda_0) - \Delta\Phi(R_m) = -\frac{8\sigma^2(1-\nu^2)R_m^2\lambda_0}{E} + 4\pi R_m\lambda_0\alpha_s.$$

Разделив это выражение на $n_m$, получаем $\delta\Delta\Phi(n)$.

Таким образом,

$$\delta\Delta\Phi = -\frac{4\sigma^2(1-\nu^2)R_m\lambda_0^2}{\pi E} + 2\lambda_0^2\alpha_s.$$

Полученное выражение можно представить в виде производной $d\Delta\Phi/dR_m$ с учетом выражения (10):

$$\delta\Delta\Phi(n) = \frac{\lambda_0^2}{2\pi R_m}\,\frac{d\Delta\Phi(R_m)}{dR_m}. \tag{11}$$

Среднее время $\tau_m^+$, за которое на фронте трещины радиусом $R_m$ разорвутся все связи, найдем, решая аналогичную (4)–(6) задачу для функции $P_m(n,t)$ (вероятности того, что в момент времени $t$ на фронте трещины радиусом $R_m$ будет разорвано $n$ связей):

$$\begin{aligned}\frac{dP_m(n,t)}{dt} &= w^+(n-1,R_m)P_m(n-1,t) + w^-(n+1,R_m)P_m(n+1,t) - \\ &\quad - (w^+(n,R_m)+w^-(n,R_m))P_m(n,t), \qquad 1\leqslant n\leqslant n_m, \quad t>0,\\ \frac{dP_m(0,t)}{dt} &= w^-(1,R_m)P_m(1,t) - (w^+(0,R_m)+w^-(0,R_m))P_m(0,t), \qquad t>0, \\ \frac{dP_m(n_m,t)}{dt} &= w^+(n_m-1,R_m)P_m(n_m-1,t) - w^-(n_m,R_m)P_m(n_m,t), \qquad t>0.\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $P_m(n,0) = \delta_{n0}$. Для нахождения среднего времени $\tau_m^+$ умножим уравнения (12) на $t\,dt$ и проинтегрируем по $t$ от нуля до бесконечности. В результате несложных, но громоздких преобразований, которые подробно изложены в [1, 5, 6], получаем выражение

$$\tau_m^+ = \sum_{k=0}^{n_m-1}\frac{1}{w^+(k,R_m)}\Big(1+\sum_{j=k+1}^{n_m-1}\prod_{i=k+1}^{j}\frac{w^-(i+1,R_m)}{w^+(i,R_m)}\Big). \tag{13}$$

Учитывая, что величина $q$, определенная по формуле (9), не зависит от значения $n$, и выполняя суммирование в формуле (13), получаем

$$\tau_m^+ = \frac{n_m}{w_0^+(R_m)(1-q)} - \frac{q}{(1-q)^2w_0^+(R_m)}(1-q^{n_m}), \tag{14}$$

где $w_0^+(R_m)$ — частота элементарных актов разрыва связи вдоль фронта трещины, определяемая в рамках термодинамической теории хрупкого разрушения [4] выражением

$$w_0^+(R_m) = \nu_0\exp\Big(-\frac{U - V_a\sigma_*(R_m,\sigma)}{kT}\Big), \tag{15}$$

$\nu_0$ — частота колебаний кинетических единиц (атомов, молекул) при преодолении энергетического барьера, препятствующего разрыву связей.

Учитывая, что в области малых напряжений радиус трещины разрушения $R < R_*$, где $R_* = \pi\alpha_sE/[2(1-\nu^2)\sigma^2]$ — гриффитсов радиус трещины, определяемый условием стационарности термодинамического потенциала $d\Delta\Phi/dR = 0$ и как следствие $d\Delta\Phi/dR > 0$, $q \gg 1$, получаем $\tau_m^+ \approx q^{n_m-1}/w_0^+(R_m)$. Подставляя в эту формулу величины $w_0^+(R_m)$ из (15), $q$ из (9), с учетом (11) получаем следующее выражение для частоты $w^+(R_m) = 1/\tau_m^+$:

$$w^+(R_m) \simeq \nu_0\exp\Big(-\frac{U - V_a\sigma_*(R_m,\sigma)}{kT}\Big)\exp\Big(-\frac{\lambda_0}{kT}\,\frac{d\Delta\Phi(R_m)}{dR_m}\Big). \tag{16}$$

Частоту перехода $R_{m+1} = R_m + \lambda_0 \to R_m$, т. е. $w^-(R_m)$, найдем так же, как частоту $w^+(R_m)$. Для этого необходимо заменить частоту $w^+(n, R_m)$ на частоту $w^-(n, R_m)$, а частоту $w^-(n, R_m)$ — на частоту $w^+(n, R_m)$. С учетом (14) получаем

$$\tau_m^- = \frac{n_m}{w_0^-(R_m)(1-1/q)} - \frac{1}{q(1-1/q)^2 w_0^-(R_m)}\Big(1 - \frac{1}{q^{n_m}}\Big). \tag{17}$$

Здесь $w_0^-(R_m)$ — частота элементарных актов восстановления разорванной связи вдоль фронта трещины, связанная с частотой $w_0^+(R_m)$ соотношением (9).

Поскольку $q \gg 1$, из формулы (17) с достаточной точностью получаем

$$\tau_m^- \approx \frac{n_m}{w_0^-(R_m)} = \frac{n_m}{w_0^+(R_m)q}. \tag{18}$$

С учетом того, что $w^-(R_m + \lambda_0) = w^-(R_{m+1}) = 1/\tau_m^-$, подставляя (9), (11), (15) и выражение $n_m = 2\pi R_{m+1}/\lambda_0$ в (18), имеем

$$w^-(R_{m+1}) \simeq \frac{\lambda_0\nu_0}{2\pi R_{m+1}} \exp\Big(-\frac{U - V_a\sigma_*(R_{m+1},\sigma)}{kT}\Big)\exp\Big(\frac{\lambda_0^2}{2\pi R_{m+1}kT}\,\frac{d\Delta\Phi(R_{m+1})}{dR_{m+1}}\Big).$$

Зная частоты $w^+(R_m)$ и $w^-(R_m)$, с помощью кинетических уравнений (4)–(7) можно найти среднюю долговечность материала $\tau$. Для этого подставим выражение (3) для функции $\varphi_{i,\mu}(t)$ в формулу (1), после чего умножим обе ее части на $t\,dt$ и проинтегрируем по $t$ от $t_{i,\mu}^{(a)}$ до $\infty$. В результате получаем выражение для средней долговечности $\tau$

$$\tau = \sum_{\mu=s,v}\sum_{i=1}^{n_\mu} P_{i,\mu}(t_{i,\mu}^{(a)} + \tau_{i,\mu}), \tag{19}$$

где $\tau_{i,\mu}$ — "парциальные" долговечности, определяемые выражением

$$\tau_{i,\mu} = w^+(R_{k-1,\mu})\int_0^\infty P_i(R_{k-1,\mu},\eta)\eta\,d\eta. \tag{20}$$

Интегрирование по $\eta$ проводится от 0 до $\infty$ после введения переменной интегрирования $\eta = t - t_{i,\mu}^{(a)}$. Из (20) следует, что для нахождения $\tau_{i,\mu}$ уравнения (4), (5) необходимо умножить на $(t - t_{i,\mu}^{(a)})\,dt$ и проинтегрировать по $t$ от $t_{i,\mu}^{(a)}$ до $\infty$. В результате получаем разностное уравнение, решение которого согласно [1, 6, 7] определяется аналогичной (13) формулой

$$\tau_{i,\mu} = \sum_{m=i}^{k-1}\frac{1}{w^+(R_{m,\mu})}\Big[1 + \sum_{j=m+1}^{k-1}\prod_{n=m+1}^{j}\frac{w^-(R_{m+1,\mu})}{w^+(R_{m,\mu})}\Big]. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (19), в общем случае имеем

$$\tau = \sum_{\mu=s,v}\sum_{i=1}^{n_\mu} P_{i,\mu}\Big(\sum_{m=i}^{k-1}\frac{1}{w^+(R_{m,\mu})} + t_{i,\mu}^{(a)}\Big) + \\ + \sum_{\mu=s,v}\sum_{i=1}^{n_\mu} P_{i,\mu}\sum_{m=i}^{k-1}\frac{1}{w^+(R_{m,\mu})}\sum_{j=m+1}^{k-1}\prod_{n=m+1}^{j}\frac{w^-(R_{m+1,\mu})}{w^+(R_{m,\mu})}. \tag{22}$$

**Анализ полученных результатов**. Структура формулы (22) для средней долговечности свидетельствует о том, что в силу экспоненциального характера выражения (2) для величины $P_{i,\mu}$ и резкого роста $\bar{N}_{m,\lambda}$ при уменьшении характерного размера трещины основной вклад в величину $\tau$ вносят трещины, имеющие наибольший характерный размер $R_0$ (в данном случае это радиус дискообразной трещины). Величину $R_0$ можно оценить, зная предельную (теоретическую) $\sigma_t = U/V_a$ и разрывную $\sigma_b(V)$ прочности материала данного объема $V$. Полагая в (8) $\sigma_* = \sigma_t$, $\sigma = \sigma_b$, получаем $R_0 = \lambda_0((\sigma_t - \sigma_b)/(\sigma_b\chi))^2$, где $\chi = \sqrt{2}/\pi$ — коэффициент, зависящий от формы трещины разрушения. Тогда для материала данного объема $V$ гриффитсов порог разрушения будет равен гриффитсову порогу разрушения для внутренней дискообразной трещины разрушения радиусом $R_0$, т. е. $\sigma_G = \sqrt{\pi\alpha_s E/(2(1-\nu^2)R_0)}$. С учетом выражения для величины $R_0$ получаем

$$\sigma_G = \frac{\sigma_b\chi}{\sigma_t - \sigma_b}\sqrt{\frac{\pi\alpha_s E}{2\lambda_0(1-\nu^2)}}.$$

Таким образом, область малых напряжений определяется условием

$$0 < \sigma < \frac{\sigma_b\chi}{\sigma_t - \sigma_b}\sqrt{\frac{\pi\alpha_s E}{2\lambda_0(1-\nu^2)}}.$$

Если условия нагружения постоянным напряжением $\sigma$ таковы, что $\sigma > \sigma_G$, то основной вклад в долговечность дает первое слагаемое, соответствующее наибольшему характерному размеру начальной трещины. В результате получаем формулу

$$\tau \approx \sum_{m=i}^{k-1} \frac{1}{w^+(R_m)} + t_i^{(a)}, \qquad R_i = R_0,$$

из которой с учетом представления частот $w^+(R_m)$ в формуле (16) следует выражение для средней долговечности типа формулы С. Н. Журкова, аналогичной теоретической формуле средней долговечности Г. М. Бартенева и Э. М. Карташова [4, 5].

Однако в тот момент, когда начнет выполняться условие $0 < \sigma < \sigma_G$ (область малых напряжений), основной вклад в среднюю долговечность будет давать второе слагаемое, так как в этом случае

$$\prod_{n=m+1}^{j} \frac{w^-(R_{m+1,\mu})}{w^+(R_{m,\mu})} \gg 1.$$

Таким образом, в области малых напряжений

$$\tau \approx \sum_{\mu=s,v} \sum_{i=1}^{n_\mu} P_{i,\mu} \sum_{m=i}^{k-1} \frac{1}{w^+(R_{m,\mu})} \sum_{j=m+1}^{k-1} \prod_{n=m+1}^{j} \frac{w^-(R_{m+1,\mu})}{w^+(R_{m,\mu})}. \tag{23}$$

Оценка $\tau$ по формуле (23), полученная в [1, 6, 7], имеет вид

$$\tau \approx \frac{kT}{\lambda_0^2 w^+(R_*)\Delta\Phi'(R_0)}\sqrt{\frac{2\pi kT}{|\Delta\Phi''(R_*)|}}\exp\Big(\frac{\Delta\Phi(R_*)}{kT}\Big). \tag{24}$$

Подставляя в (24) $\Delta\Phi'(R_0)$, $\Delta\Phi''(R_*)$ и $\Delta\Phi(R_*)$ с учетом выражения (10) и оставляя только наиболее значимые величины, получаем следующую асимптотическую оценку средней долговечности хрупкого материала в области малых напряжений:

$$\tau \approx \frac{kT}{\lambda_0^3\nu_0}\,\frac{1}{4\pi\alpha_s}\Big(\frac{\sigma_b\chi}{\sigma_t - \sigma_b}\Big)^2\sqrt{\frac{kT}{2\alpha_s}}\;\exp\Big(\frac{\pi^3\alpha_s^3 E^2}{6(1-\nu^2)^2\sigma^4 kT}\Big). \tag{25}$$

**Выводы.** Таким образом, из (24) и (25) следует, что при $\sigma \to 0$ средняя долговечность $\tau \to \infty$. Следовательно, не существует растягивающего напряжения, которое можно считать абсолютно безопасным для данного материала, несмотря на то что средняя долговечность в области $0 < \sigma < \sigma_G$ очень велика и заведомо превышает время эксплуатации изделия. Кроме того, как показано в [6], среднеквадратичное отклонение долговечности $\sigma_\tau \approx \tau$, т. е. также увеличивается с увеличением средней долговечности, вследствие чего прогноз времени гарантированной работоспособности изделия ухудшается.

В [1, 6, 7] показано, что $\sigma_\tau$ можно уменьшить путем конструирования изделий из многоэлементных (композиционных) хрупких материалов с помощью армирования или в виде многослойных элементов. Тогда при выполнении условия монолитности [9] среднеквадратичное отклонение уменьшится на $\sqrt{N}$, т. е. $\sigma_\tau \approx \tau/\sqrt{N}$, где $N$ — число элементов в многоэлементной структуре изделия.

Полученная асимптотика средней долговечности справедлива также в случае, когда разрушению предшествуют процессы релаксации структуры материала, например, когда вынужденная высокоэластическая деформация в полимерных стеклах выше температуры хрупкости, но ниже температуры стеклования, если они непосредственно не являются причиной разрушения материала.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Карташов Э. М.** Структурно-статистическая кинетика разрушения полимеров / Э. М. Карташов, Б. Цой, В. В. Шевелев. М.: Химия, 2002.
2. **Регель В. Р.** Кинетическая природа прочности твердых тел / В. Р. Регель, А. И. Слуцкер, Э. Е. Томашевский. М.: Наука, 1974.
3. **Журков С. Н.** Кинетическая концепция прочности твердых тел // Изв. АН СССР. Сер. Неорган. материалы. 1967. Т. 3, № 10. С. 1767–1770.
4. **Бартенев Г. М.** О временной и температурной зависимости прочности твердых тел // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 9. С. 53–64.
5. **Карташов Э. М.** Временная зависимость твердых тел при хрупком разрушении // Изв. вузов. Физика. 1978. № 2. С. 30–36.
6. **Шевелев В. В., Карташов Э. М.** К статистической кинетике хрупкого разрушения материалов // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306, № 6. С. 1425–1429.
7. **Шевелев В. В., Карташов Э. М.** Некоторые статистические аспекты хрупкого разрушения и долговечности полимеров. Материалы с трещинами // Высокомолекуляр. соединения. 1977. Т. 39Б, № 2. С. 371–381.
8. **Шевелев В. В., Тишаева И. Р.** Расчет и прогнозирование долговечности конструкций из полимерных материалов при их эксплуатации // Тез. докл. науч.-техн. конф. “Экология средних и малых городов: проблемы и решения”, г. Великий Устюг, 29 сент. — 3 окт. 1998 г. М.: Всерос. науч.-исслед. ин-т межотраслевой информации, 1998. С. 91–92.
9. **Трофимов Н. Н.** Основы создания полимерных композитов / Н. Н. Трофимов, М. З. Канович. М.: Наука, 1999.


*Поступила в редакцию 2/VII 2010 г.*