МЕТОД ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧАХ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. И. Ванько (*Новосибирск*)

В работе [1] рассматривается стационарное температурное поле в роторе многоступенчатой турбины (цилиндрический барабан с расположенными по боковой поверхности рядами лопаток). Для решения этой задачи тепловое взаимодействие между ротором и лопатками заменено некоторым фиктивным коэффициентом теплоотдачи от рабочего газа к ротору. Ниже приводится некоторое обобщение этой идеи.

Пусть в тепловом контакте находятся несколько одномерных тел, например стержней (фиг. 1). В точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ соблюдаются условия идеального теплового контакта (ради простоты), т. е.

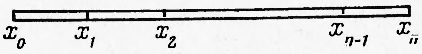
$$T_i(x_i) = T_{i+1}(x_i), \qquad \lambda_i T_i'(x_i) = \lambda_{i+1} T_{i+1}'(x_i)$$

Условия в начальной и конечной точках системы определены

$$\lambda_1 T_1'(x_0) = h_1 (T^{(1)} - T_1(x_0)) \text{ при } x = x_0, \qquad \lambda_n T_n'(x_n) = h_2 (T^{(2)} - T_n(x_n)) \text{ при } x = x_n \tag{1}$$

где h_i и $T^{(1)}, T^{(2)}$ — коэффициенты теплоотдачи и температуры сред, λ_i — коэффициенты теплопроводности. Условия теплообмена каждого стержня с окружающей средой произвольны, но известны общие решения каждого уравнения теплопроводности, взятые в виде

$$T_i(x) = c_1^i u_1^i(x) + c_2^i u_2^i(x)$$



Фиг. 1

Если из системы стержней некоторые отбросить, то их воздействие на оставшиеся можно заменить условием теплообмена с какой-то средой, для которой коэффициент теплообмена и температура определяются однозначно, т. е. в месте контакта с отброшенным стержнем ($i+1$-м)

$$T_i'(x_i) = \gamma^* [T_i(x_i) + T^*] \tag{2}$$

Разберем подробно случай двух стержней

$$T_1(x) = c_1^1 u_1^1(x) + c_2^1 u_2^1(x) \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$$
$$T_2(x) = c_1^2 u_1^2(x) + c_2^2 u_2^2(x) \qquad (x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$$

Используя условия (1) и в точке контакта, составим четыре уравнения

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 &= b_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 &= 0 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4 &= 0 \\ a_{43}y_3 + a_{44}y_4 &= b_4 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$\begin{gathered} a_{11} = u_1^{1\prime}(x_0) + \gamma_1 u_1^1(x_0), \quad a_{12} = u_2^{1\prime}(x_0) + \gamma_1 u_2^1(x_0), \quad b_1 = \gamma_1 T^{(1)} \\ a_{21} = u_1^1(x_1), \quad a_{22} = u_2^1(x_1), \quad a_{23} = -u_1^2(x_1), \quad a_{24} = -u_2^2(x_1) \\ a_{31} = u_1^{1\prime}(x_1), \quad a_{32} = u_2^{1\prime}(x_1), \quad a_{33} = -u_1^{2\prime}(x_1), \quad a_{34} = -u_2^{2\prime}(x_1) \\ a_{43} = u_1^{2\prime}(x_2) - \gamma_2 u_1^2(x_2), \quad a_{44} = u_2^{2\prime}(x_2) + \gamma_2 u_2^2(x_2), \quad b_4 = \gamma_2 T^{(2)} \\ \gamma_1 = h_1 / \lambda_1, \quad \gamma_2 = h_2 / \lambda_2, \quad y_1 = c_1^1, \quad y_2 = c_2^1, \ldots \end{gathered} \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что если температуры в стержнях не тождественные нули, то определитель Δ системы (3) отличен от нуля и, как обычно, решение будет

$$y_1 = \Delta_1 / \Delta, \qquad y_2 = \Delta_2 / \Delta \tag{5}$$

Покажем, что значения постоянных интегрирования, найденные решением системы (3) и предлагаемым методом, тождественны. Пусть второй стержень исключается из рассмотрения, определим граничное условие для оставшегося в точке контакта. Для этого найдем температурное поле в исключаемом стержне, т. е. найдем $T_2(x)$ из условий

$$T_2'(x_2) = \gamma_2 (T^{(2)} - T_2(x_2)) \qquad \text{при } x = x_2$$

при $x = x_1$ положим $T_2(x_1) = T_1(x_1)$, где $T_1(x)$ — неизвестная температура первого стержня. Имеем (в обозначениях системы (3))

$$-a_{23}y_3 - a_{24}y_4 = T_1(x_1), \qquad a_{44}y_3 + a_{44}y_4 = b_4$$

Отсюда

$$y_3 = \frac{T_1(x_1)\,a_{44} + b_4 a_{24}}{a_{43}a_{24} - a_{23}a_{44}}, \qquad y_4 = \frac{-a_{23}b_4 - a_{43}T_1(x_1)}{a_{43}a_{24} - a_{23}a_{44}}; \qquad T_2(x) = y_3 u_1^2(x) + y_4 u_2^2(x)$$

Условие в точке x_1 для остающегося стержня найдется из равенства тепловых потоков

$$T_1'(x_1) = \gamma^*[T_1(x_1) + T^*], \qquad \gamma^* = \frac{a_{43}a_{34} - a_{33}a_{44}}{a_{43}a_{24} - a_{23}a_{44}}, \qquad T^* = \frac{a_{23}b_4a_{34} - a_{33}b_4a_{24}}{a_{43}a_{24} - a_{33}a_{44}}$$

Постоянные y_1, y_2 ищутся при условиях

$$T_1'(x_0) = \gamma_1(T^{(1)} - T_1(x_0)), \qquad T_1(x_1) = \gamma^*(T_1(x_1) + T^*)$$

из системы

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = b_1, \qquad [a_{31} - \gamma^* a_{21}]\,y_1 + [a_{32} - \gamma^* a_{22}]\,y_2 = \gamma^* T^* \tag{6}$$

Решив систему (6) и подставив выражения для γ^* и T^*, получим для y_1 и y_2 значения, тождественно совпадающие с выражениями (5), которыми разумеется определится решение системы (3).

Результат легко обобщается на произвольное число тел, в которых распространение тепла описывается одномерным уравнением. Действительно, систему n тел рассмотрим как два тела: первое $x_0 \leqslant x \leqslant x_{n-1}$, второе $x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n$. По доказанному, отбрасывая второе, найдем в точке контакта условие теплообмена в виде (2). Оставшуюся систему опять рассматриваем как два тела и т. д. Наконец, подобным образом можно из всей системы выделить какое-то k-е тело путем удаления остальных справа и слева.

Поступила 7 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Даниловская В. И. К вопросу определения температурных полей в роторах многоступенчатых турбин. Инженерный сб., 1954, т. 18.

О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

А. А. Рухадзе (*Москва*)

В приближении метода геометрической оптики решается задача о конвективной неустойчивости сжимаемой идеально проводящей жидкости, находящейся в поле тяжести. Полученное дисперсионное уравнение проанализировано в области высоких и низких частот колебаний жидкости. Показано, что проводящая жидкость в поле тяжести может быть неустойчивой лишь по отношению к низкочастотным колебаниям, и получено условие неустойчивости, обобщающее известные критерии конвективной неустойчивости, полученные ранее.

1. Устойчивость сжимаемой проводящей жидкости, находящейся во внешних магнитном и гравитационном полях, в условиях, когда для описания малых колебаний жидкости применимы уравнения магнитной гидродинамики, диссипативными членами в которых можно пренебречь, исследовалась в работах [1, 2]. При получении спектра колебаний жидкости в этих работах использовались методы, по существу совпадающие с применяющимися для описания колебаний однородной среды, в то время как жидкость в ноле тяжести является существенно неоднородной. Такая непоследовательность приводит к зависимости спектра собственных значений от точки пространства. Кроме того, в работах [1, 2] в качестве уравнения состояния жидкости используется уравнение адиабаты Пуассона, что ограничивает общность рассмотрения.

В настоящей работе, с целью устранения указанных недостатков, к задаче конвективной неустойчивости жидкости в поле тяжести применяется метод геометрической оптики, причем уравнение состояния жидкости не конкретизируется. Метод геометрической оптики успешно применялся в работах [3–5] к задаче устойчивости слабонеоднородной плазмы, удерживаемой магнитным полем. Этот метод связан с теорией асимптотических решений уравнений вида

$$y'' + q(\omega, x)\,y = 0 \tag{1}$$