ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 2

УДК 535.385

ВЛИЯНИЕ СУХОГО ТРЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАСТУЩЕГО ОТСЛОЕНИЯ СДВИГА НА КОНЦЕНТРАЦИЮ НАПРЯЖЕНИЙ

В. А. Сарайкин

Институт горного дела СО РАН,
630091 Новосибирск

Разгрузка предварительно напряженного упругого полупространства, поверхность которого была вначале жестко сцеплена с недеформируемым основанием, происходит из-за дефекта, возникшего в точке на линии сцепления и растущего динамически вдоль контакта в виде отслоения сдвига. На поверхности контакта учитывается сухое трение с постоянным коэффициентом. Получено аналитическое решение, в котором определены неизвестные напряжения и перемещение на границе. Найдены асимптотики решения в вершинах отслоения. Учет трения в подобной задаче (но в асимптотической постановке) изучался в [1].

Рассматривается плоская деформация упругого полупространства $y > 0$, находящегося в контакте с жестким полупространством $y < 0$. В упругом полупространстве задано начальное равномерное напряженное состояние

$$\sigma_{yy}^0 = \sigma_0 < 0, \qquad \sigma_{xy}^0 = \tau_0 > 0.$$

В момент времени $t = 0$ на границе контакта в точке $x = y = 0$ возникает дефект, который потом распространяется вдоль границы вправо и влево в виде отслоения сдвига. На отслоении происходит динамический сброс касательного напряжения, пропорциональный нормальному напряжению:

$$\sigma_{xy}(t,x,0) = -k\sigma_{yy}(t,x,0) \qquad (k = \text{const}, \quad k > 0).$$

Поле напряжений $\sigma_{ij}(t,x,y)$ складывается из начального статического и динамического $p_{ij}(t,x,y)$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + p_{ij}.$$

Для искомого динамического состояния на границе контакта должны быть выполнены условия

$$\begin{aligned} p_{xy}(t,x,0) &= -\tau_0 - k\sigma_0 - kp_{yy}(t,x,0) \quad && (-v_1 t < x < v_2 t), \\ u(t,x,0) &= 0 && (x < -v_1 t,\ x > v_2 t), \\ v(t,x,0) &= 0 && (-\infty < x < \infty), \end{aligned} \qquad (1)$$

где u, v — компоненты вектора перемещений; постоянные v_1, v_2 — дозвуковые скорости движения вершин отслоения.

Краевую задачу (1) замыкают нулевые начальные условия. Отсчет перемещений ведется от достигнутых в статическом состоянии, что не сказывается на граничных условиях (1). Отметим, что в условии сухого трения на отслоении два искомых напряжения не заданы явно, а лишь связаны друг с другом. Если $k = 0$, граничные условия (1) описывают отслоение сдвига без трения на поверхности.

Применив интегральные преобразования Лапласа по времени и Фурье по координате x (параметры преобразований s, q), получим связь между изображениями перемещений и компонент вектора напряжений на границе [2]:

$$\begin{gathered}
\mu u^{LF}(s,q,0) = S_{11} p_{xy}^{LF}(s,q,0) + S_{12} p_{yy}^{LF}(s,q,0), \\
\mu v^{LF}(s,q,0) = -S_{12} p_{xy}^{LF}(s,q,0) + S_{22} p_{yy}^{LF}(s,q,0), \\
S_{11} = -\frac{a_2^2 s^2 n_2}{R}, \quad S_{22} = -\frac{a_2^2 s^2 n_1}{R}, \quad S_{12} = -\frac{iq(n_2^2 + q^2 - 2n_1 n_2)}{R}, \\
R = (n_2^2 + q^2)^2 - 4q^2 n_1 n_2, \quad n_i = \sqrt{q^2 + a_i^2 s^2} \qquad (i = 1, 2).
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь μ — модуль сдвига; a_1, a_2 — величины, обратные скоростям продольной и поперечной волн.

Будем искать касательные напряжения в виде суммы

$$p_{xy}(t,x,y) = -k p_{yy}(t,x,y) + \tau(t,x,y)\,. \tag{3}$$

При таком выборе p_{xy} граничное значение новой искомой функции τ на отслоении известно, как следует из (1), оно (третий аргумент у функций в граничных точках далее всюду опускаем) имеет вид

$$\tau(t,x) = -\tau_0 - k\sigma_0 \qquad (-v_1 t < x < v_2 t)\,. \tag{4}$$

После замены (3) с учетом условия $v = 0$, которое выполняется на всей границе контакта полупространств, соотношения (2) преобразуются в следующие:

$$\begin{gathered}
\mu s u^{LF}(s,q) = \frac{s}{iq} U\Big(\frac{s}{iq}\Big) \tau^{LF}(s,q), \qquad p_{yy}^{LF}(s,q) = P\Big(\frac{s}{iq}\Big) \tau^{LF}(s,q), \\
p_{xy}^{LF}(s,q) = T\Big(\frac{s}{iq}\Big) \tau^{LF}(s,q), \\
U\Big(\frac{s}{iq}\Big) = iq\frac{q^2 - n_1 n_2}{D}, \qquad P\Big(\frac{s}{iq}\Big) = iq\frac{n_2^2 + q^2 - 2n_1 n_2}{D}, \\
T\Big(\frac{s}{iq}\Big) = \frac{a_2^2 s^2 n_1}{D}, \qquad D = ikq(n_2^2 + q^2 - 2n_1 n_2) + a_2^2 s^2 n_1\,.
\end{gathered} \tag{5}$$

В выражениях (5) удовлетворено одному граничному условию $v = 0$. Условия на продолжении отслоения относительно перемещения u и на отслоении для функции τ следует учесть в первом выражении (5), в котором связаны изображения указанных функций и которое, таким образом, является уравнением для определения двух функций u, τ в тех точках, где они неизвестны. Если функция τ будет найдена на всей границе, то из второго и третьего соотношений (5) можно получить напряжения p_{yy}, p_{xy}.

В задаче отсутствуют характерные единицы измерения длины и времени, потому искомое решение является автомодельным , например, имеет вид $\tau(t,x) = x^n Q_0(x/t)$, где показатель n определяется заданными граничными условиями. При решении смешанных плоских автомодельных задач обычно применяют метод функционально-инвариантных решений, использующий решение уравнений и вне границы. Здесь, после того как была введена функция τ, такой способ решения напрямую не применим. Поэтому воспользуемся методом, предложенным в [2, 3]. Он позволяет найти решение (5), т. е. функции u, τ в граничных точках, не привлекая сведений об искомых функциях вне границы.

Изображение Лапласа и Фурье функций такого вида — однородная функция параметров преобразований

$$\tau^{LF} = s^{-n-2}Q(s/q).$$

Обращение однородных изображений осуществляется по формуле (см. [2, 4])

$$\begin{gathered} \tau(t,x) = \hat{\tau}_+(t,x) - \hat{\tau}_-(t,x), \\ \hat{\tau}(t,z) = -\frac{1}{2\pi i z n!}\int_0^t (t-\lambda)^n Q(iz/\lambda)\,d\lambda \qquad (z = x + i\xi). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь кусочно-аналитическая функция $\hat{\tau}(t,z)$ — аналитическое представление функции $\tau(t,x)$ [5]; индексы $\pm$ обозначают предельные значения этой функции при $z \to x \pm i0$ — функции $\hat{\tau}_\pm = \hat{\tau}(t, x \pm i0)$.

Обращая изображения (5) по формуле (6), получаем уравнение относительно аналитических представлений функций u и τ:

$$\begin{gathered} \mu\hat{u}^{(n+2)}(t,z) = \frac{z}{t}\,U(z/t)\hat{\tau}^{(n+1)}(t,z), \\ U(z/t) = \frac{1+n_1n_2}{k[2+2n_1n_2-(a_2z/t)^2]-(a_2z/t)^2n_1}, \\ n_i(z/t) = \sqrt{(a_iz/t)^2-1}, \quad n_i > 0 \quad \text{при} \quad x/t > a_i^{-1}, \quad \xi = 0\,(i = 1,2), \end{gathered} \tag{7}$$

а также выражения для остальных величин на границе через функцию τ:

$$\begin{gathered} \hat{p}_{yy}^{(n+1)}(t,z) = P(z/t)\,\hat{\tau}^{(n+1)}(t,z), \\ \hat{p}_{xx}^{(n+1)}(t,z) = T(z/t)\,\hat{\tau}^{(n+1)}(t,z). \end{gathered}$$

Индексы в круглых скобках указывают порядок производной по времени. Однозначные ветви радикалов n_i на плоскости z/t выделены разрезами на вещественной оси $(-a_i^{-1}, a_i^{-1})$, при этом значения радикалов определяются так:

$$n_i(x/t) = \begin{cases} \sqrt{(a_ix/t)^2-1}\ \mathrm{sgn}x & (|x/t| > a_i^{-1}, \quad \xi = 0), \\ \pm i\sqrt{1-(a_ix/t)^2} & (|x/t| < a_i^{-1}, \quad \xi = \pm 0). \end{cases}$$

Решение (5) сведено к решению задачи (7) относительно двух кусочно-аналитических функций, причем из (1) и (4) известно, что

$$\begin{aligned} u^{(n+2)} &= \hat{u}_+^{(n+2)} - \hat{u}_-^{(n+2)} = 0 && (x < -v_1t,\ x > v_2t), \\ \tau^{(n+1)} &= \hat{\tau}_+^{(n+1)} - \hat{\tau}_-^{(n+1)} = (-\tau_0 - k\sigma_0)^{(n+1)} && (-v_1t < x < v_2t). \end{aligned} \tag{8}$$

На отслоении функция τ постоянна, поэтому всюду в формулах следует положить $n = 0$.

Чтобы найти решение уравнения (7), введем функцию

$$\Omega(t,z) = \frac{t}{z} w(z/t)\hat{u}^{\cdot\cdot} = w(z/t)U(z/t)\hat{\tau}^{\cdot}$$

(точками обозначены производные по времени).

Предельные значения множителя w удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &w_+ - w_- = 0 && (x < -v_1 t,\ x > v_2 t)\,, \\ &U_+ w_+ - U_- w_- = 0 && (-v_1 t < x < v_2 t), \\ &U_\pm = \frac{1 - m_1 m_2}{km(x/t) \mp i(a_2 x/t)^2 m_1}\,, && U_\pm \neq 0 \quad \text{при} \quad -v_1 t < x < v_2 t\,, \\ &m(x/t) = 2 - 2m_1 m_2 - (a_2 x/t)^2, && m_i(x/t) = \sqrt{1 - (a_i x/t)^2}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Радикалы m_1, m_2 на отслоении вещественны.

Представления (6) являются представлениями Коши, потому функции $\hat{u}$, $\hat{\tau}$ при $|z| \to \infty$ стремятся к нулю, как z^{-1}. Считая это условие выполненным для Ω, можно заключить, что $w = O(z)$ при $|z| \to \infty$. Представим w следующим образом:

$$w(z/t) = (z/t + \alpha) w^0(z/t) \quad (w^0(z/t) \sim \text{const} \quad \text{при} \quad |z| \to \infty).$$

Константа α пока произвольна. Для функции w получаем задачу сопряжения с разрывным коэффициентом G:

$$w^0_+ = G w^0_-\,,$$

$$G(x/t) = \begin{cases} \dfrac{km(x/t) - i(a_2 x/t)^2 m_1}{km(x/t) + i(a_2 x/t)^2 m_1} & (-v_1 t < x < v_2 t), \\ 1 & (x < -v_1 t,\ x > v_2 t). \end{cases}$$

Решением данной предельной задачи является функция

$$w^0(z/t) = \exp\left[-F(z/t)\right],$$

$$F(z/t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-v_1}^{v_2} \arctan\varphi(\eta) \frac{d\eta}{\eta - z/t}\,, \qquad \varphi(\eta) = a_2^2 m_1 \eta^2 / km(\eta)\,,$$

следовательно, искомая функция для задачи об отслоении с трением может быть найдена с произволом

$$w(z/t) = (z/t + \alpha)\exp\left[-F(z/t)\right].$$

При $k = 0$ трение на берегах исчезает и функция w принимает вид [6]

$$w(z/t) = \sqrt{(z/t + v_1)(z/t - v_2)}\,.$$

Предполагая непрерывной зависимость решения краевой задачи (9) от параметра k , отсюда можно заключить, что $\alpha = -v_2$, а значит,

$$w(z/t) = (z/t - v_2)\exp\left[-F(z/t)\right].$$

Отметим, что при $\tau_0 < 0$ в граничном условии (1) надо сменить знак k. В этом случае требование непрерывной зависимости от параметра трения приводит к следующему решению (9):

$$w(z/t) = (z/t + v_1)\exp\left[-F(z/t)\right] \qquad (k < 0).$$

Функция w построена так, что скачок Ω известен на всей оси. Действительно, учитывая (7) и (9), вне отслоения имеем

$$\Omega_+ - \Omega_- = \frac{t}{x}\, w(x/t) u^{\cdot\cdot}(t, x) = 0 \qquad (x < -v_1 t,\ x > v_2 t).$$

Аналогично на отслоении получаем

$$\Omega_+ - \Omega_- = w_+ U_+ (\hat{\tau}^{\cdot}_+ - \hat{\tau}^{\cdot}_-) = w_+ U_+ \tau^{\cdot}(t, x) \qquad (-v_1 t < x < v_2 t).$$

Следовательно, функция Ω может быть найдена по ее скачку на вещественной оси при помощи интеграла типа Коши:

$$\Omega(t, z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{-v_1 t}^{v_2 t} w_+(\xi/t) U_+(\xi/t)\tau^{\cdot}(t, \xi)\frac{d\xi}{\xi - z} + \frac{A}{z + v_1 t} + \frac{B}{z - v_2 t}\right],$$

$$w_+ = \frac{(\xi/t - v_2)[km(\xi/t) - i(a_2\xi/t)^2 m_1]}{\sqrt{k^2 m^2(\xi/t) + (a_2\xi/t)^4 m_1^2}}\exp\left[-\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int\limits_{-v_1}^{v_2}\arctan\varphi(\eta)\frac{d\eta}{\eta - \xi/t}\right],$$

$$\mu\hat{u}^{\cdot\cdot}(t, z) = \frac{z}{t} w^{-1}(z/t)\Omega(t, z), \qquad \tau^{\cdot}(t, z) = w^{-1}(z/t) U^{-1}\Omega(t, z), \tag{10}$$

$$\hat{p}_{yy}(t, z) = \frac{2 + 2n_1 n_2 - (a_2 z/t)^2}{(1 + n_1 n_2) w(z/t)}\,\Omega(t, z),$$

$$\hat{p}_{xy}(t, z) = \frac{(a_2 z/t)^2 n_1}{(1 + n_1 n_2) w(z/t)}\,\Omega(t, z).$$

Функции U, m определены в (9). Интеграл в показателе экспоненты понимается в смысле главного значения.

Последние два слагаемых функции Ω определяют сосредоточенные в точках перемены граничных условий $x = -v_1 t$, $x = v_2 t$ функции. Постоянные A, B находятся из граничного условия (8) относительно τ. Интегрируя $\hat{\tau}^{\cdot}$ в (10) по времени, имеем

$$\begin{aligned}
\tau(t, x) &= \tau(t, x) H(v_1 t + x) + \int\limits_0^{-x/v_1} \Phi_1\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\frac{d\lambda}{\lambda} \qquad (-v_1 t < x < 0),\\
\tau(t, x) &= \tau(t, x) H(v_2 t - x) + \int\limits_0^{x/v_2} \Phi_2\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\frac{d\lambda}{\lambda} \qquad (0 < x < v_2 t),
\end{aligned} \tag{11}$$

где $H(\ldots)$ — функции Хевисайда; Φ_1, Φ_2 — скачки функции $\Phi(z/t) = t\Omega(t, z)/[w(z/t)U(z/t)]$ на интервалах $(-v_1 t < x < 0)$ и $(0 < x < v_2 t)$.

Очевидно, чтобы выполнялось граничное условие (8) относительно τ, необходимо приравнять нулю интегралы в (11):

$$\int_0^{1/v_1} \Phi_1\Big(-\frac{1}{\eta}\Big)\frac{d\eta}{\eta} = 0, \qquad \int_0^{1/v_2} \Phi_2\Big(\frac{1}{\eta}\Big)\frac{d\eta}{\eta} = 0. \tag{12}$$

Данные равенства позволяют найти постоянные A, B.

В рассматриваемой задаче на отслоении $\tau^{\cdot} = 0$, поэтому

$$\Omega(t,z) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\frac{A}{z+v_1 t} + \frac{B}{z-v_2 t}\Big).$$

Уравнения (12) при вычислении A, B лучше преобразовать, чтобы устранить интегрирование по окрестности особых точек v_1^{-1}, v_2^{-1}. Для этого, прежде чем вычислять в (11) скачок $\hat{\tau}$ на отслоении, следует перейти заменой переменной от интегрирования по t к интегрированию по z/t, а затем деформировать контуры интегрирования по берегам в верхнюю и нижнюю полуплоскости. В результате вместо (12) имеем условия, в которых интегралы берутся на отслоении по отрезку, не содержащему особых точек, и вдоль прямой, например $z/t = (1/2)(v_2 - v_1) + iy/t$, проходящей в комплексной плоскости z/t параллельно мнимой оси:

$$Av_2 - Bv_1 = 0\,, \qquad A + B = \pi(\tau_0 + k\sigma_0)/J\,,$$

$$J = \mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{d\xi}{U(\gamma+i\xi)w(\gamma+i\xi)(v_1+\gamma+i\xi)(v_2-\gamma-i\xi)}\,, \qquad \gamma = \frac{v_2 - v_1}{2}\,.$$

Напряжения на продолжении отслоения вычисляются по формулам

$$p_{yy}(t,x) = C\,\mathrm{Re}\int_{x/t+i0}^{\infty} \frac{2 + 2n_1 n_2 - a_2^2 u^2}{i(1+n_1 n_2)w(u)(v_1+u)(u-v_2)}\,du,$$

$$p_{xy}(t,x) - C\,\mathrm{Re}\int_{x/t+i0}^{\infty} \frac{a_2^2 u^2 n_1}{i(1+n_1 n_2)w(u)(v_1+u)(u-v_2)}\,du,$$

$$C = \frac{(A+B)}{\pi} = \frac{(\tau_0 + k\sigma_0)}{J},$$

а для точек на отслоении удобно воспользоваться другими представлениями решения, которые получаются трансформацией пути интегрирования точно так же, как при вычислении постоянных A, B:

$$p_{vv}(t,x) = C\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{2 + 2n_1(u_\gamma)n_2(u_\gamma) - a_2^2 u_\gamma^2}{[1 + n_1(u_\gamma)n_2(u_\gamma)]w(u_\gamma)(v_1+u_\gamma)(v_2-u_\gamma)}\,d\xi -$$

$$-C\,\mathrm{Re}\int_{\gamma+i0}^{x/t+i0} \frac{2 - 2m_1 m_2 - a_2^2 u^2}{i\,(1-m_1 m_2)w_+(u)(v_1+u)(u-v_2)}\,du\,,$$

$$p_{xy} = -kp_{yy} - \tau_0 - k\sigma_0, \quad u_\gamma = \gamma + i\xi.$$

В окрестности вершин отсюда находим следующие асимптотики напряжений:

$$p_{yy} \sim -C\frac{F(v_2)(v_2 - x/t)^{f(v_2)/\pi - 1}}{(v_1 + v_2)^{1+f(-v_1)/\pi}(1 - f(v_2)/\pi)} \qquad (x \to v_2 t - 0);$$

$$p_{yy} \sim -C\frac{\pi F(-v_1)(v_1 + x/t)^{-f(-v_1)/\pi}}{(v_1 + v_2)^{2-f(v_2)/\pi} f(-v_1)} \qquad (x \to -v_1 t + 0);$$

$$F(v) = \frac{a_2^2 v^2 m_1(v)}{\sqrt{k^2 m^2(v) + a_2^4 v^4 m_1^2(v)}} \exp\Big[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-v_1}^{v_2} \ln|\eta - v| f'(\eta)\, d\eta\Big],$$

$$f(\eta) = \arctan \varphi(\eta).$$

Асимптотики, полученные здесь, совпадают с асимптотиками решения задачи в [1], если одну из сред считать недеформируемой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Симонов И. В.** О дозвуковом движении края сдвиговой подвижки с трением вдоль границы раздела упругих материалов // ПММ. 1983. Т. 47, вып. 3.
2. **Слепян Л. И.** Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990.
3. **Сарайкин В. А., Слепян Л. И.** Плоская задача о динамике трещины в упругом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4.
4. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972.
5. **Бремерман Г.** Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968.
6. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 20/IV 1994 г.