УДК 539.3

# СВОБОДНЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТАНДАРТНОГО ЛИНЕЙНОГО ТЕЛА

*П. М. Горбунов*

*(Москва)*

Одна из задач о крутильных колебаниях металлического релаксирующего стержня рассмотрена в [1]. Поведение системы во времени $t$ характеризуется функцией $\varphi(z, t)$, определяющей угол поворота вокруг оси стержня бесконечно тонкого горизонтального слоя материала. Исходное уравнение при времени релаксации $\tau \to \infty$ переходит в уравнение волнового типа, описывающее движение идеализированного упругого материала [2, 3]. Однако полученное в [1] решение при $\tau \to \infty$ не зависит от времени и потому не согласуется с решением аналогичной задачи для абсолютно упругих материалов [4]. Обусловлено это тем, что при постановке начальных и граничных условий в [1] приняты нулевые начальные значения скорости и ускорения движения системы при $t = 0$ по всему образцу, однако с физической точки зрения движение системы возможно только, если ее ускорение отлично от нуля.

Рассмотрим свободные крутильные колебания цилиндрического однородного изотропного упруговязкого стержня радиусом $R$, длиной $h \gg 2R$ и присоединенным жестким диском. Примем, что амплитуда крутильных колебаний распределенной массы мала, поперечные сечения $S(z)$ стержня не искажаются и не смещаются вдоль оси $z(S(z) = \text{const})$ и кручение не сопровождается изменением объема деформирующейся массы [1]. Ось $z$ цилиндрической системы координат $(r, \alpha, z)$ совпадает с осью стержня. Для определения исходного состояния системы представим, что перед запуском маятника стержень закручивается вокруг оси $z$ под непрерывным действием сосредоточенного на границе $S(z=h)$ крутящего момента пары сил $P$. Пусть при этом в достаточно большой момент времени $t_0$ стержень придет в исходное статически закрученное состояние. Тогда при $t \geqslant t_0$ крутящий момент сил $(PR_0)$ будет постоянным по всей области существования деформированной массы $0 \leqslant z \leqslant h$ и определенным в виде

$$PR_0 = \frac{\mu\pi}{2} R^4 \partial\varphi(z)/\partial z, \tag{1}$$

где $\varphi(z)$ — угол поворота сечений $S(z)$ (вокруг оси $z$) при статически закрученном состоянии стержня.

Если при $t_1 \geqslant t_0$ силы $P$ будут одновременно и мгновенно устранены, то присоединенный диск начнет переходить в состояние вращательного движения вокруг оси $z$. Примем, что время релаксации $\tau = \eta/(G_0 - \mu)$, где $\eta$ — коэффициент вязкости, $G_0$ — мгновенный модуль сдвига, $\mu$ — длительный модуль сдвига, причем $G_0 > \mu$, может стремиться к бесконечности как при $\eta \to \infty$ $(G_0 \neq \mu)$, так и при $G_0 \to \mu$ $(\eta \ll \infty)$. Равновесие моментов сил на границе $S(h)$ стержня при $G_0 \to \mu$ и $t \geqslant t_1$ определяется соотношением

$$\mu\pi R^4 \varphi_z(h, t) = -2I\varphi_{tt}(h, t). \tag{2}$$

Если при $t < t_0$ коэффициент $\eta$ мал, а при $t > t_0$ велик $(\eta \to \infty$, что достигается охлаждением закрученного образца), то равновесие моментов сил на границе $S(z = h)$ выражается соотношением $(t \geqslant t_1)$

$$\pi R^4 [G_0\varphi_z(h, t) - (G_0 - \mu)\gamma] = -2I\varphi_{tt}(h, t), \tag{3}$$
$$\gamma = 2PR_0/\mu\pi R^4.$$

Дифференциальное соотношение между локальной относительной деформацией $\varepsilon$ и напряжением $\sigma$ плоскопараллельного сдвига при изотермических условиях движения системы имеет вид [2, 3]

$$\sigma + \tau\dot{\sigma} = \mu\varepsilon + G_0\tau\dot{\varepsilon}. \tag{4}$$

Из соотношения (4) приходим к исходному уравнению движения стержня [2, 3]

$$\tau\rho\varphi_{ttt} + \rho\varphi_{tt} = \mu\varphi_{zz} + G_0\tau\varphi_{tzz}, \tag{5}$$

где $\rho$ — плотность материала. Уравнение (41) в [1] при $G_0\tau = \tau\mu + \eta$ совпадает с (5). Принимая $t_1 = 0$ за начало отсчета запуска маятника, два начальных условия движения системы запишем в виде

$$\varphi(z, 0) = \gamma z, \ \varphi_t(z, 0) = 0 \quad \text{при } 0 \leqslant z \leqslant h. \tag{6}$$

Поскольку в движущейся системе процессы диссипации энергии запаздывают относительно начала изменяющегося действия крутящего момента, то в момент $t_1 = 0$ стержень ведет себя как идеализированно упругая система [4, 5]. В этой связи третьи начальные условия задачи (5) нужно согласовать с постановкой краевых условий аналогичной задачи для идеализированно упругих материалов, т. е. с условиями (2), (3). В нашем случае достаточно потребовать, чтобы краевые условия задачи (5) согласовались с условием (3), так как (2) является частным случаем (3).

На основании этих положений с использованием закона сохранения энергии дадим вывод третьих начальных условий. Определим запас потенциальной энергии $E_{у0}(z)$ упругой деформации бесконечно тонкого горизонтального слоя материала с координатой $z$ и площадью $S = \pi R^2$ (т. е. погонную плотность энергии стержня). Используя выше принятые допущения и приближения, величину $E_{у0}(z)$ можно записать в виде

$$E_{у0}(z) = \frac{\mu}{2}\int_0^R\int_0^{2\pi} \varepsilon_0^2 r\,dr\,d\alpha,$$

где $\varepsilon_0 = \partial u(z, r)/\partial z = r\partial\varphi(z)/\partial z$ — относительный сдвиг бесконечно малого элемента объема, находящегося в бесконечно тонком слое материала с координатой $z$; $u(z, r) = r\varphi(z)$ — функция, дающая величину плоскопараллельного смещения этого элемента в направлении действия момента сил $r\sigma(z, r)$ $(r\,dr\,d\alpha = ds)$.

Полная энергия $E_п$ и сдвиговое напряжение $\sigma(z, r)$ стержня с учетом (1) равны

$$E_п = \int_0^h E_{у0}(z)\,dz = P^2R_0^2h/\mu\pi R^4,$$

$$\sigma(z, r) = \mu\varepsilon_0 = r\mu\gamma = 2PR_0r/\pi R^4.$$

Эти результаты означают, что в статически закрученном стержне потенциальная энергия сохраняется только в гуковской ячейке использованной нами модели. В то же время энергия и напряжение в максвелловской ячейке равны нулю.

Примем, что в момент $t_1$ стержень ведет себя как упругая система. При этом относительная деформация и энергия гуковской ячейки уменьшаются от $\varepsilon_0$ и $\mu\varepsilon_0^2/2$ до $\varepsilon = \varepsilon(z, r, t)$ и $\mu\varepsilon^2/2$, а упругого элемента максвелловской ячейки — увеличиваются по абсолютной величине от нуля до $(\varepsilon - \varepsilon_0)$ и $(G_0 - \mu)(\varepsilon - \varepsilon_0)^2/2$ соответственно. Вместе с тем значительная часть потенциальной энергии $E_п$ превращается в кинетическую при ускорении вращения вокруг оси $z$ распределенной массы и присоединенного диска.

Учитывая все отмеченные эффекты, на основании закона сохранения энергии системы имеем

$$E_п = \frac{1}{2}\left\{I\varphi_t^2(h, t) + \int_0^h\int_0^R\int_0^{2\pi}\left[(G_0 - \mu)(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \mu\varepsilon^2 + \rho u_t^2(z, r, t)\right] r\,dr\,d\alpha\,dz\right\}. \quad (7)$$

Можно показать, что частная производная по времени от (7) (при $\varphi_t(0, t) = 0$) приводится к виду

$$[-(G_0 - \mu)\gamma + G_0\varphi_z(h, t) + 2I\varphi_{tt}(h, t)/\pi R^4]\,\varphi_t(h, t) = \int_0^h [G_0\varphi_{zz}(z, t) - \rho\varphi_{tt}(z, t)]\,\varphi_t(z, t)\,dz. \quad (8)$$

Далее, дифференцируя (8) по $z$, имеем

$$\rho\varphi_{tt}(z, t) = G_0\varphi_{zz}(z, t). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), приходим к (3). Переходя к пределу $t \to +0$ в (9), (8) (с учетом определенных свойств (8), (9)), получим третьи начальные условия задачи (5) в виде

$$\rho\varphi_{tt}(z, 0) = G_0\varphi_{zz}(z, 0) \text{ при } 0 \leqslant z < h; \quad (10)$$

$$\pi R^4[G_0\varphi_z(h, 0) - (G_0 - \mu)\gamma] = -2I\varphi_{tt}(h, 0) \text{ при } z = h. \quad (11)$$

Соотношение (10) представляет собой уравнение распределенной массы внутри образца при $t = 0$ [5], а (11) — равновесие моментов сил на границе $S(z = h)$ и вблизи нее.

Граничные условия движения упруговязкой системы запишем в виде $(t > 0)$ [1]

$$\pi R^4[\mu\varphi_z(h, t) + G_0\tau\varphi_{tz}(z, t)] = -2I[\tau\varphi_{ttt}(h, t) + \varphi_{tt}(h, t)], \quad (12)$$
$$\varphi(0, t) = 0, \ \varphi_t(0, t) = 0.$$

Решение задачи (5), (6), (10)—(12) будем искать методом разделения переменных [2—4]

$$\varphi(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(z)\,T_k(t),$$

где $\Psi_k(z)$ — функции, определяющие форму колебаний образца, а $T_k(t)$ — функции, дающие характер изменения амплитуд колебаний во времени. Используя (5), запишем характеристическое уравнение для $T_k(t)$ [3]

$$\xi_k^3 + \xi_k^2/\tau + \beta_k^2(\mu + G_0\tau\xi_k)/\tau\rho h^2 = 0, \quad (13)$$

где $\beta_k$ — положительные решения уравнения

$$\operatorname{ctg}\beta = 2I\beta/\rho\pi R^4 h. \tag{14}$$

Корни уравнения (13) представим в виде [1, 5]

$$\xi_k^{(1)} = -\frac{1}{3\tau} + \alpha_k,\ \xi_k^{(2,3)} = -\frac{1}{3\tau} - \frac{\alpha_k}{2} \pm iw_k. \tag{15}$$

Величины $\alpha_k$ и $w_k$ определяются известным способом [1, 5]. Если все три корня (15) принимают отрицательные действительные значения, то они отвечают апериодически лимитационному движению системы [3, 5].

Решение уравнения (5) с учетом (6)—(15) можно записать в виде

$$\varphi(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(z) \exp\left(-\frac{t}{3\tau}\right) \times \tag{16}$$

$$\times \left[\frac{C_k e^{\alpha_k t} + (M_k \cos w_k t + N_k \sin w_k t)\, e^{-\frac{\alpha_k}{2}t}}{3\alpha_k^2 + p_k}\right],$$

где

$$\Psi_k(z) = \frac{4\gamma h \sin\beta_k \cdot \sin\beta_k \frac{z}{h}}{\beta_k(2\beta_k + \sin 2\beta_k)};$$

$$C_k = \alpha_k^2 + \alpha_k/3\tau - 2/9\tau^2 + \beta_k^2(G_0 - \mu)/\rho h^2;$$

$$M_k = 2\alpha_k^2 + \mu\beta_k^2/\rho h^2 - \alpha_k/3\tau - 1/9\tau^2;$$

$$N_k = \frac{1}{w_k}\left[\frac{\alpha_k^2}{2\tau} + \frac{\alpha_k}{6\tau^2} + \frac{p_k}{3\tau} - \frac{\alpha_k\beta_k^2}{2\rho h^2}(2G_0 - 3\mu)\right];$$

$$p_k = G_0\beta_k^2/\rho h^2 - 1/3\tau^2.$$

Для определения условий применимости результатов необходимо исследовать поведение решения (16) при различных экспериментальных ситуациях. Способ такого анализа дан в [5].

Если в решении (16) положить $I = 0$ и взять предел $G_0 \to \mu$, то оно примет вид функции, согласующейся с решением аналогичной задачи для идеализированно упругого материала [4]. Поскольку в нашем случае $I \neq 0$, представляет интерес поведение решения (16) как при $G_0 \to \mu$ и $I \neq 0$

$$\varphi(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(z) \cos\beta_k \sqrt{\frac{\mu}{\rho h^2}}\, t,$$

так и при $\eta \to \infty$ и $I \neq 0$

$$\varphi(z, t) = \frac{(G_0 - \mu)\gamma z}{G_0} + \frac{\mu}{G_0}\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(z) \cos\beta_k \sqrt{\frac{G_0}{\rho h^2}}\, t.$$

В первом случае упругое поведение стержня характеризуется одним модулем сдвига $\mu$, а во втором — двумя величинами $\mu$ и $G_0$. Наличие двух пределов решения (16) обусловлено тем, что время релаксации стандартного линейного тела может принимать весьма большие значения при $G_0 \to \mu$ и $\eta \to \infty$.

Возьмем $h = 10$ см, $\rho = 1{,}6$ г/см$^3$, $\eta = 6\cdot10^7$ П, $\mu = 3\cdot10^7$ дин/см$^2$, $G_0 = 9\cdot10^7$ дин/см$^2$, $\beta_1 \cong \sqrt{\rho\pi h R^4/2I} \cong 10^{-2}$. Подставим эти значения в полученные различными способами функции $\varphi(z, t)$. В результате этого для первого члена суммы ряда (16) (с индексом $k = 1$), представляющего собой главную часть $\varphi(z, t)$, при $t = \pi/w_1$, $3\alpha_1^2 + p_1 = d_1$ в $\Psi_1(z)$, $T_1(t) = \varphi_1(z, t)$ имеем $C_1/d_1 \cong 2/3$, $M_1/d_1 \cong 1/3$, $T_1(t) \cong 0{,}284$. В то же время аналогичные величины, но определенные по формуле (60) в [1] (при нашем способе нумерации корней уравнения типа (14)), принимают следующие значения: $C_0^{(1)}/d_1 \cong 1{,}002$, $M_0^{(1)}/d_1 \cong 10^{-3}$, $T_0^{(1)}(t) \cong 0{,}864$ соответственно. Если подставить в $\varphi(z, t)$ $\rho = 2{,}7$ г/см$^3$, $\eta = 2{,}2\cdot10^{16}$ П, $G_0 \cong 2{,}55\cdot10^{11}$ дин/см$^2$, $\mu = 2{,}33\cdot10^{11}$ дин/см$^2$, $\beta_1 \cong 1{,}29\cdot10^{-4}$, то для $\varphi_1(z, t)$ будем иметь $C_1/d_1 \cong 0{,}086$, $M_1/d_1 \cong 0{,}914$, $T_1(t) \cong -0{,}828$, а также $C_0^{(1)}/d_1 \cong 1$, $M_0^{(1)}/d_1 \cong 1{,}96\cdot10^{-14}$, $T_0^{(1)}(t) \cong 1$. Видно, что рассчитанные выше величины формулы (16) существенно отличаются от таковых решения (60) в [1]. Отметим, что коэффициент $M_1/d_1$, представляющий собой главную часть амплитуды колебаний маятника в $\varphi(z, t)$, при увеличении $\tau$ в (16) стремится к 1 при $G_0 \to \mu$, а в (60) работы [1] уменьшается до практически незаметного значения (т. е. $M_0^{(1)}/d_1 \leqslant 10^{-14}$). Эти факты позволяют говорить, что решением типа (60) в [1] не описывается движение крутильного маятника как при $\tau \to \infty$, так и при реальных конечных значениях $\tau \leqslant 10^{+6}$ с. Решение (16) не противоречит физическим представлениям о природе колебаний маятника при любых значениях $\tau \geqslant 0$.

Автор выражает благодарность Г. Я. Коренману, И. А. Лукьянову, Э. Г. Позняку, Р. Х. Сабирову за интерес к работе и обсуждение ее результатов.

*Поступила 24 VII 1978*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Постников В. С.** К вопросу затухания колебаний цилиндрического образца.— «Физика металлов и металловедение», 1958, т. 6, вып. 3.
2. **Ржаницын А. Р.** Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968.
3. **Ишлинский А. Ю.** Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации.— ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
4. **Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.** Сборник задач по математической физике. М., «Наука», 1972.
5. **Горбунов П. М.** Определение поведения стандартного линейного тела в пластомере плоскопараллельного сдвига.— ПМТФ, 1978, № 5.