УДК 519.632.4

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

С. Д. Алгазин

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва
E-mail: algazinsd@mail.ru

Рассматривается задача о свободных колебаниях балки со свободными концами переменных сечения и массы, к которой на штангах подвешены сосредоточенные массы (осцилляторы). Показано, что в этой колебательной системе возможны параметрические резонансы. Приведены примеры численных расчетов, которые подтверждают эффективность разработанной методики расчета.

Ключевые слова: свободные колебания, балка переменных сечения и массы, осцилляторы.

**Введение.** В [1] рассмотрены задачи на собственные значения, когда решения соответствующих уравнений — гладкие функции. Однако некоторые задачи математической физики приводят к задачам на собственные значения с кусочно-гладкими функциями (см. ниже). В данной работе результаты [1] обобщаются на задачи с кусочно-гладкими функциями. Оценка погрешности предложенного метода приведена в [2]. Продольные колебания стержня рассмотрены в [3]. В данной работе рассматриваются поперечные колебания балки с осцилляторами. Программы на Фортране приведены в [4].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим балку ($0 \leqslant x \leqslant a$) со свободными концами, к которой в точках $x = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ на невесомых штангах (в начальный момент параллельных оси балки) длиной $l_k$ прикреплены сосредоточенные массы $m_k$ (осцилляторы), так что при отклонении штанги с грузом на малый угол $\varphi$ относительно касательной к оси балки в точке подвеса возникает момент, пропорциональный углу поворота с коэффициентом $c_k$ и стремящийся вернуть груз в исходное положение.

Штанги с грузами будем считать твердыми телами, а балку — упругой с жесткостью на изгиб $EI_x(x)$ и погонной массой $m(x)$. Колебания будем считать бесконечно малыми, так что сосредоточенные грузы совершают колебания в плоскости, перпендикулярной нейтральной оси балки. Выведем уравнения свободных колебаний этой механической системы.

Сначала рассмотрим силы, действующие на балку со стороны штанги с грузом. Если угол $\varphi$ мал, так что величинами $\varphi^2$ можно пренебречь, то $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$, и, следовательно, груз совершает колебания в плоскости, перпендикулярной нейтральной оси балки. Таким образом, сила реакции, действующая на балку в точке прикрепления $x = x_k$, направлена перпендикулярно оси балки.

Итак, на балку действует нагрузка

$$f(x,t) = M\delta'(x - x_0) + R\delta(x - x_0).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00250).

Предположим, что момент $-M$, действующий на штангу с грузом, пропорционален углу между штангой и касательной к нейтральной оси в точке подвеса и направлен так, что стремится вернуть груз в исходное положение.

Если прогиб обозначить через $v(x)$, то уравнение изгиба балки принимает вид

$$(EI_x v'')'' = M\delta'(x - x_0) + R\delta(x - x_0).$$

Добавив в динамическое уравнение балки силы инерции, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(EI_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big) + m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = R\delta(x - x_0) + M\delta'(x - x_0),$$

где $m(x)$ — погонная масса.

Далее определим геометрические соотношения. Пусть $z_0$ — амплитуда осциллятора, т. е. расстояние между массой и осью $x$ (нейтральной осью балки в первоначальном состоянии); $y_0$ — амплитуда точки подвеса. Тогда в случае правого расположения осциллятора

$$(z - y_0)/l_0 = \sin\varphi \approx \varphi, \qquad z_0 = y_0 + l_0\varphi,$$

в случае левого расположения осциллятора

$$(z - y_0)/l_0 = \sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi \approx \varphi, \qquad z_0 = y_0 + l_0\varphi.$$

С учетом знака $\varphi$ (положительное направление $\varphi$ отсчитывается против часовой стрелки) получим

$$z_0 = y_0 \mp l_0\varphi \tag{1.1}$$

(знак "+" соответствует осциллятору, расположенному слева, знак "−" — осциллятору, расположенному справа).

Уравнение движения осциллятора вокруг точки прикрепления имеет вид

$$m_0 l_0^2 \ddot\varphi = -M \pm m_0 \ddot y_0 l_0.$$

Здесь $-M$ — момент сил, действующих со стороны балки на осциллятор; $\pm m_0\ddot y_0 l_0$ — момент сил инерции относительно точки $x = x_0$ (знак "+" соответствует осциллятору, расположенному справа, знак "−" — осциллятору, расположенному слева). Если $\ddot y_0 > 0$, то сила инерции направлена вверх и создает положительный момент в случае правого расположения осциллятора и отрицательный момент в случае левого расположения осциллятора.

Далее из (1.1) получаем $\ddot z_0 = \ddot y_0 \mp l_0\ddot\varphi$. Следовательно, $-m_0\ddot y_0 l_0 = -m_0\ddot z_0 l_0 \mp m_0 l_0^2\ddot\varphi$. Уравнение $m_0\ddot z_0 = -R$ есть уравнение движения центра масс. Таким образом, имеем

$$m_0 l_0^2\ddot\varphi = -M \mp R l_0 + m_0 l_0^2\ddot\varphi,$$

т. е.

$$M = \mp R l_0 \tag{1.2}$$

(знак "+" соответствует осциллятору, расположенному слева, знак "−" — осциллятору, расположенному справа).

Рассматриваемую задачу нужно дополнить уравнением свободных колебаний балки с осцилляторами. Будем полагать, что на штангу с осциллятором действует момент, пропорциональный углу $\varphi - y'(x_0)$ и стремящийся вернуть груз назад:

$$M = c_\varphi(\varphi - y'(x_0)) = c_\varphi(z - y_0 \mp l_0 y'(x_0))/(\mp l_0).$$

Тогда

$$R = \mp M/l_0 = c_\varphi(z - y_0 \mp l_0 y'(x_0))/l_0^2.$$

Из уравнения движения осциллятора $m_0\ddot{z}_0 = -R$ получаем уравнение свободных колебаний осциллятора

$$-\lambda z_0 = -\lambda_0(z_0 - y_0 \mp l_0 y'(x_0)), \qquad \lambda_0 = c_\varphi/(m_0 l_0^2). \tag{1.3}$$

Выведем уравнения свободных колебаний балки:

$$\frac{d^2}{dx^2}\Big(EI_x\,\frac{d^2y}{dx^2}\Big) = \lambda m y + R\delta(x-x_0) + M\delta'(x-x_0), \tag{1.4}$$

где

$$R\delta(x-x_0) + M\delta'(x-x_0) = R(\delta(x-x_0) \mp l_0\delta'(x-x_0)) =$$
$$= c_\varphi(z - y_0 \mp l_0 y'(x_0))(\delta(x-x_0) \mp l_0\delta'(x-x_0))/l_0^2.$$

Для $n$ осцилляторов получаем уравнения свободных колебаний

$$\frac{d^2}{dx^2}\Big(EI_x\,\frac{d^2y}{dx^2}\Big) = \lambda m y + \lambda\sum_{k=1}^{n} m_k z_k(\delta(x-x_0) - l_k\delta'(x-x_0)); \tag{1.5}$$

$$-\lambda z_k = \lambda_k(y_k - z_k + l_k y_k'), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Здесь $l_k > 0$, если осциллятор находится справа, $l_k < 0$, если он находится слева;

$$EI_x y''\big|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0; \tag{1.7}$$

$$(EI_x y'')'\big|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0. \tag{1.8}$$

Уравнения (1.2)–(1.8) представляют собой искомую постановку задачи свободных колебаний балки с осцилляторами.

**2. Интегральное уравнение.** Обозначим $p(x) \equiv EI_x$. Условия разрешимости уравнения (1.5) следующие:

$$\lambda\int_0^a m(\xi)y(\xi)\,d\xi + \lambda\sum_k m_k z_k = 0 \tag{2.1}$$

(сумма сил, приложенных к балке, равна нулю),

$$\lambda\int_0^a \xi m(\xi)y(\xi)\,d\xi + \lambda\sum_k m_k z_k(x_k + l_k) = 0 \tag{2.2}$$

(сумма моментов, приложенных к балке, равна нулю).

Введем в рассмотрение функцию Грина $\hat{U}(x,\xi)$ как решение задачи

$$\frac{d^2}{dx^2}\,p(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\,\hat{U}(x,\xi) + \hat{c}_0(\xi) + x\hat{c}_1(\xi) = \delta(x-\xi); \tag{2.3}$$

$$p(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\,\hat{U}(x,\xi)\Big|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0; \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dx}\,p(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\,\hat{U}(x,\xi)\Big|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0 \tag{2.5}$$

с условием ортогональности абсолютно жесткому перемещению

$$\int_0^a m(x)\hat{U}(x,\xi)\,dx = 0, \qquad \int_0^a x m(x)\hat{U}(x,\xi)\,dx = 0. \tag{2.6}$$

Функции $\hat{c}_0(\xi)$ и $\hat{c}_1(\xi)$ выберем так, чтобы система приложенных к балке сил была равновесной.

Итак, имеем две упругие системы (1.5)–(1.8) и (2.3)–(2.6). По теореме взаимности Бетти получаем интегральное представление решения

$$y(x) = \lambda \int_0^a \hat{U}(x,\xi)m(\xi)y(\xi)\,d\xi + \lambda \sum_{k=1}^n m_k z_k(\hat{U}(x,x_k) + l_k \hat{U}'_\xi(x,x_k)) + c_2 x + c_1. \tag{2.7}$$

Константы $c_1$ и $c_2$ выберем так, чтобы выполнялись условия разрешимости (2.1), (2.2). Таким образом, имеем два соотношения для определения $c_1$ и $c_2$:

$$\int_0^a m(x)(c_2 x + c_1)\,dx = -\sum_{k=1}^n m_k z_k \equiv f_1,$$

$$\int_0^a x m(x)(c_2 x + c_1)\,dx = -\sum_{k=1}^n m_k z_k(x_k + l_k) \equiv f_2.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{11} = \int_0^a m(x)\,dx$; $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \int_0^a x m(x)\,dx$; $\alpha_{22} = \int_0^a x^2 m(x)\,dx$.

Пусть $\beta = \alpha^{-1}$, т. е.

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Тогда

$$c_1 = \beta_{11} f_1 + \beta_{12} f_2, \qquad c_2 = \beta_{21} f_1 + \beta_{22} f_2,$$

где $\beta_{11} = \alpha_{12}/\det\alpha$; $\beta_{21} = \beta_{12} = -\alpha_{12}/\det\alpha$; $\beta_{22} = \alpha_{11}/\det\alpha$; $\det\alpha = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2$. Таким образом,

$$c_2 x + c_1 = (\beta_{21} f_1 + \beta_{22} f_2)x + \beta_{11} f_1 + \beta_{12} f_2 =$$
$$= (\beta_{21} x + \beta_{11})\Big(-\sum_{k=1}^n m_k z_k\Big) + (\beta_{22} x + \beta_{12})\Big(-\sum_{k=1}^n m_k z_k(x_k + l_k)\Big).$$

Итак, для определения амплитуд $y(x)$, $z_1, \dots, z_n$ имеем систему интегро-алгебраических уравнений

$$y(x) + (\beta_{21} x + \beta_{11}) \sum_{k=1}^n m_k z_k + (\beta_{22} x + \beta_{12}) \sum_{k=1}^n m_k z_k(x_k^* + l_k) =$$
$$= \lambda \int_0^a \hat{U}(x,\xi)m(\xi)y(\xi)\,d\xi + \lambda \sum_{k=1}^n m_k z_k(\hat{U}(x,x_k^*) + l_k \hat{U}'_\xi(x,x_k^*)); \tag{2.8}$$

$$-\lambda z_k = \lambda_k(y_k - z_k + l_k y'_k), \qquad k = 1, 2, \dots, n \tag{2.9}$$

($x_k^*$ — точка крепления $k$-го осциллятора).

**3. Структура конечномерной задачи.** Дифференцированием соотношения (2.8) получаем дополнительные соотношения для $y'(x)$

$$y'(x) = -\beta_{21}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k - \beta_{22}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k(x_k^* + l_k) + \lambda\int_0^a \hat{U}'_x(x,\xi)m(\xi)y(\xi)\,d\xi + \\ + \lambda\sum_{k=1}^{n} m_k z_k(\hat{U}'_x(x,x_k^*) + l_k\hat{U}''_{\xi x}(x,x_k^*)). \qquad (3.1)$$

Вычисляя интегральные слагаемые в (2.8) и (3.1) по квадратурной формуле [3], получим конечномерную задачу следующего вида:

$$E\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ z \end{pmatrix} = \lambda D\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ z \end{pmatrix}.$$

Здесь $Y = (y(x_1),\ldots,y(x_N))^{\text{т}}$ — вектор значений собственной функции в узлах интерполяции; $Y' = (y'(x_1^*),\ldots,y'(x_n^*))^{\text{т}}$; $z = (z_1,\ldots,z_n)^{\text{т}}$;

$$E = \begin{pmatrix} (N\times N) & (N\times n) & (N\times n) \\ I_N & 0 & \hat{\beta} \\ (n\times N) & (n\times n) & (n\times n) \\ 0 & I_n & \beta^* \\ (n\times N) & (n\times n) & (n\times n) \\ J & -L\Lambda & \Lambda \end{pmatrix}, \qquad (3.2)$$

$I_N$, $I_n$ — единичные матрицы размера $N\times N$ и $n\times n$ соответственно; $\hat{\beta}_{pk} = (\beta_{21}x_p + \beta_{11})m_k + (\beta_{22}x_p + \beta_{12})m_k(x_k^* + l_k)$; $\beta_{21} = \beta_{12}$, следовательно, $\hat{\beta}_{pk} = \beta_{12}(x_p + x_k^*)m_k + \beta_{11}m_k + \beta_{22}x_p x_k^* m_k + \beta_{22}x_p m_k l_k + \beta_{12}m_k l_k$; $\beta^*$ — матрица размера $n\times n$ с одинаковыми столбцами $\beta_{21}(m_k + \beta_{22}m_k(x_k^* + l_k))$, $k = 1,2,\ldots,n$; $J$ — матрица размера $n\times N$, у которой в $k$-й строке $(k = 1,2,\ldots,n)$ на месте $j(k)$ стоит $-\lambda_k$, а остальные элементы нулевые ($j(k)$ — целая функция, которая номеру осциллятора $k$ ставит в соответствие номер узла сетки); $L = \operatorname{diag}(l_1,\ldots,l_n)$; $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$;

$$D = \begin{pmatrix} (N\times N) & (N\times n) & (N\times n) \\ A & 0 & U \\ (n\times N) & (n\times n) & (n\times n) \\ A_x & 0 & U_x \\ (n\times N) & (n\times n) & (n\times n) \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix};$$

$A$ — матрица размера $N\times N$; $A_{pk} = c_k\hat{U}(x_p,x_k)$; $\hat{U}$ — функция Грина; $c_k$ — коэффициенты квадратурной формулы [3]; $U$ — матрица размера $N\times n$; $U_{pk} = m_k(\hat{U}(x_p,x_k^*) + l_k\hat{U}'_\xi(x_p,x_k^*))$; $x_k^*$ — точки крепления осцилляторов; $\hat{U}'_\xi$ — производная функции Грина по второму аргументу; $A_x$ — матрица размера $n\times N$; $A_{xpk} = c_k\hat{U}'_x(x_p^*,x_k)$; $x_p^*$ — точки крепления осцилляторов; $\hat{U}'_x$ — производная функции Грина по первому аргументу; $U_x$ — матрица размера $n\times n$; $U_{xpk} = m_k(\hat{U}'_x(x_p^*,x_k^*) + l_k\hat{U}''_{\xi x}(x_p^*,x_k^*))$; $\hat{U}''_{\xi x}$ — вторая производная функции Грина.

Таким образом, требуются подпрограммы для вычисления функции Грина

$$\hat{U}(x,\xi) = \begin{cases} (\boldsymbol{f}_2(\xi), \hat{A}\boldsymbol{f}_1(x)), & x \leqslant \xi, \\ (\boldsymbol{f}_2(x), \hat{A}\boldsymbol{f}_1(\xi)), & x \geqslant \xi \end{cases}$$

и ее производных $\hat{U}_x$, $\hat{U}_\xi$, $\hat{U}_{\xi x}$ (векторы $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ длиной 4 и матрица $\hat{A}$ размера $4\times 4$ строятся из 8 массивов и 8 констант, вычисляемых подпрограммой).

Матрицы $U$, $A_x$, $U_x$ вычисляются с использованием построенных функций Грина.

Выписав матрицы $E$ и $D$, заметим, что матрица $E$ устроена аналогично матрице $E$ для продольных колебаний стержня [3] и, следовательно, может быть обращена аналитически. Из [3] следует, что нужно обратить матрицу $\Lambda - J^* m^*$, где

$$J^* m^* = (J - L\Lambda) \begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \beta^* \end{pmatrix} = J\hat{\beta} - L\Lambda\beta^*.$$

Далее получаем

$$J\hat{\beta} = -\Lambda \begin{pmatrix} \beta_{J(1),1} & \beta_{J(1),2} & \dots & \beta_{J(1),n} \\ \beta_{J(2),1} & \beta_{J(2),2} & \dots & \beta_{J(2),n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{J(n),1} & \beta_{J(n),2} & \dots & \beta_{J(n),n} \end{pmatrix} = -\Lambda\hat{\beta}.$$

Эта матрица получается из $\hat{\beta}$ заменой $x_p$ на $x_p^*$ (т. е. на узлы крепления осцилляторов). Для того чтобы обратить эту матрицу, рассмотрим обращение матрицы $I_n+\hat{m}$ для продольных колебаний стержня [3]:

$$\hat{m} = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{pmatrix} = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} (m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n).$$

Эта матрица имеет единственный собственный вектор $(1,1,\dots,1)^{\mathrm{T}}$ и соответствующее собственное значение $(1/l)\sum m_i$. Матрица $\hat{m}$ — проектор (с точностью до скалярного множителя). Любой вектор $x$ матрица $\hat{m}$ переводит в вектор, коллинеарный $(1,1,\dots,1)^{\mathrm{T}}$.

Таким образом,

$$(I_n + \hat{m})^{-1} = I_n - \frac{1}{1 + (1/l)\sum m_i}\,\hat{m},$$

так как $\hat{m}^2 = \big((1/l)\sum m_i\big)\hat{m} = \lambda\hat{m}$. Если обозначить через $\lambda$ собственное значение матрицы $\hat{m}$ ($n$-кратное), то получим

$$(I_n + \hat{m})^{-1} = I_n - \frac{1}{\lambda + 1}\,\hat{m}.$$

Как обобщить эту формулу на случай проектора в двумерное подпространство?

Предложение. Если $\hat{m}^2 = \lambda\hat{m}$, то

$$(I_n + \hat{m})^{-1} = I_n - \frac{1}{\lambda + 1}\,\hat{m}.$$

Для поперечных колебаний балки нужно обратить матрицу $I+\hat\beta_*$ размера $n\times n$, причем $\hat\beta_*=\hat\beta^{(1)}+\hat\beta^{(2)}$, где

$$\hat\beta^{(1)}_{pk}=(\beta_{21}(x_p^*+l_p)+\beta_{11})m_k,$$
$$(\hat\beta^{(1)})^2=\lambda_1\hat\beta^{(1)},\qquad \lambda_1=\sum_{k=1}^n m_k(\beta_{21}(x_k^*+l_k)+\beta_{11}); \tag{3.3}$$

$$\hat\beta^{(2)}_{pk}=(\beta_{22}(x_p^*+l_p)+\beta_{12})m_k(x_k^*+l_k),$$
$$(\hat\beta^{(2)})^2=\lambda_2\hat\beta^{(2)},\qquad \lambda_2=\sum_{k=1}^n m_k(x_k^*+l_k)(\beta_{22}(x_k^*+l_k)+\beta_{12}); \tag{3.4}$$

$$\hat\beta^{(2)}\hat\beta^{(1)}=\lambda_{21}\hat\beta^{(2)}Q^{-1},\qquad \lambda_{21}=\sum_{k=1}^n m_k(x_k^*+l_k)(\beta_{21}(x_k^*+l_k)+\beta_{12}),$$
$$\hat\beta^{(1)}\hat\beta^{(2)}=\lambda_{12}\hat\beta^{(1)}Q^{-1},\qquad \lambda_{12}=\sum_{k=1}^n m_k(\beta_{22}(x_k^*+l_k)+\beta_{12}), \tag{3.5}$$
$$Q=\operatorname{diag}(x_1^*+l_1,\dots,x_n^*+l_n).$$

Используя эти соотношения, получим

$$(I+\hat\beta_*)^{-1}=(I+\hat\beta^{(1)}+\hat\beta^{(2)})^{-1}=(I+(I+\hat\beta^{(1)})^{-1}\hat\beta^{(2)})^{-1}(I+\hat\beta^{(1)})^{-1}=$$
$$=\Big(I+\Big(I-\frac{1}{\lambda_1+1}\,\hat\beta^{(1)}\hat\beta^{(2)}\Big)^{-1}\Big)\Big(I-\frac{1}{\lambda_1+1}\,\hat\beta^{(1)}\Big),$$
$$\Big(I-\frac{1}{\lambda_1+1}\hat\beta^{(1)}\hat\beta^{(2)}\Big)^{-1}=\Big(I+\hat\beta^{(2)}-\frac{\lambda_{12}}{1+\lambda_1}\,\hat\beta^{(1)}Q\Big)^{-1}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\hat\beta^{(3)}=\hat\beta^{(2)}-\frac{\lambda_{12}}{1+\lambda_1}\,\hat\beta^{(1)}Q=\Big(\beta_{22}(x_p^*+l_p)+\beta_{12}-\frac{\lambda_{12}}{1+\lambda_1}\,(\beta_{21}(x_p^*+l_p)+\beta_{11})\Big)m_k(x_k^*+l_k),$$
$$(\hat\beta^{(3)})^2=\lambda_3\hat\beta^{(3)}, \tag{3.6}$$
$$\lambda_3=\sum_{k=1}^n\Big(\Big(\beta_{22}(x_k^*+l_k)+\beta_{12}-\frac{\lambda_{12}}{1+\lambda_1}\,(\beta_{21}(x_k^*+l_k)+\beta_{11})\Big)m_k(x_k^*+l_k)\Big).$$

Тогда $(\dots)^{-1}=I-\hat\beta^{(3)}/(\lambda_3+1)$. В результате получаем

$$(I+\hat\beta_*)^{-1}=\Big(I-\frac{1}{\lambda_3+1}\,\hat\beta^{(3)}\Big)\Big(I-\frac{1}{1+\lambda_1}\,\hat\beta^{(1)}\Big)=$$
$$=I-\frac{1}{\lambda_3+1}\,\hat\beta^{(3)}-\frac{1}{1+\lambda_1}\,\hat\beta^{(1)}+\frac{\hat\beta^{(3)}\hat\beta^{(1)}}{(\lambda_3+1)(\lambda_1+1)}.$$

Входящие в эту формулу величины определены в (3.3)–(3.6). Обозначим

$$\lambda_{31}=\sum_{q=1}^n m_q(x_q^*+l_q)(\beta_{21}(x_q^*+l_q)+\beta_{11}).$$

Тогда

$$(I+\hat\beta_*)^{-1}_{pk}=\delta_{pk}-\frac{m_k}{\lambda_1+1}\,(\beta_{21}(x_p^*+l_p)+\beta_{11})+$$
$$+\frac{m_k}{\lambda_3+1}\Big(\frac{\lambda_{31}}{\lambda_1+1}-x_k^*-l_k\Big)\Big(\beta_{22}(x_p^*+l_p)+\beta_{12}-\frac{\lambda_{12}}{1+\lambda_1}\,(\beta_{21}(x_p^*+l_p)+\beta_{11})\Big),$$
$$\delta_{pk}=\begin{cases}1, & p=k,\\ 0, & p\ne k.\end{cases}$$

Матрица $E$ определена в (3.2). Если обозначить

$$J^*=(J-L\Lambda),\qquad m^*=\begin{pmatrix}\hat\beta\\ \beta^*\end{pmatrix},$$

то после формальной замены ($J\to J^*$, $m\to m^*$, $N\to N+n$) эта матрица будет иметь тот же вид, что и матрица $E$ в случае продольных колебаний стержня [3]. В результате получаем

$$E^{-1}=\begin{pmatrix} I_N+\hat\beta\hat\Lambda^*J & -\hat\beta\hat\Lambda^*L\Lambda & -\hat\beta\hat\Lambda^*\\ \beta^*\hat\Lambda^*J & I_n-\beta^*\hat\Lambda^*L\Lambda & -\beta^*\hat\Lambda^*\\ -\hat\Lambda^*J & \hat\Lambda^*L\Lambda & \hat\Lambda^*\end{pmatrix},$$

$$E^{-1}D=\begin{pmatrix} (I_N+\hat\beta\hat\Lambda^*JA)-\hat\beta\hat\Lambda^*L\Lambda A_x & 0 & (I_N+\hat\beta\hat\Lambda^*J)U-\hat\beta\hat\Lambda^*L\Lambda U_x-\hat\beta\hat\Lambda^*\\ A_x & 0 & U_x\\ -\hat\Lambda^*JA+\hat\Lambda^*L\Lambda A_x & 0 & -\hat\Lambda^*JU+\hat\Lambda^*L\Lambda U_x+\hat\Lambda^*\end{pmatrix},$$

где $\hat\Lambda^*=(I+\hat\beta_*)^{-1}\Lambda^{-1}$. Переставляя второй и третий столбцы, для сохранения подобия нужно переставить вторую и третью строки. В результате получаем

$$E^{-1}D=\begin{pmatrix} (I_N+\hat\beta\hat\Lambda^*JA)-\hat\beta\hat\Lambda^*L\Lambda A_x & (I_N+\hat\beta\hat\Lambda^*J)U-\hat\beta\hat\Lambda^*L\Lambda U_x-\hat\beta\hat\Lambda^*\\ -\hat\Lambda^*JA+\hat\Lambda^*L\Lambda A_x & -\hat\Lambda^*JU+\hat\Lambda^*L\Lambda U_x+\hat\Lambda^*\\ A_x & U_x\end{pmatrix}.$$

Нулевой, последний столбец не выписан. Собственный вектор этой матрицы $(Y,z,Y')^{\text{т}}$, т. е. в левом верхнем углу стоит искомая блочная матрица размера $2\times 2$.

**4. Результаты численных расчетов.** В численных расчетах выписанные выше уравнения приводились к безразмерному виду. В качестве характерных массы и длины принимались масса балки без осцилляторов и длина балки. В качестве характерного времени принималась величина $1/W_{\max}$, где $W_{\max}$ — характерная частота в герцах (конец расчетного диапазона). Расчеты проводились как с методической целью, так и с целью исследовать возникновение параметрического резонанса в данной сложной колебательной системе.

Пример 1. Рассматривается стальная балка круглого сечения: $E=2{,}1\cdot 10^6$ кг/см$^2$; $\rho=7{,}8/981$ г $\cdot$ с$^2$/см$^4$; $a=10$ м; $R=0{,}1$ м. Здесь и далее расчетный диапазон составляет $0\div 30$ Гц, т. е. характерное время равно 1/30 с. Параметры, входящие в уравнение колебаний балки, имели следующие безразмерные значения: $EI_x=0{,}029\,346\,1$; $m=1{,}0$. В результате вычислений получено безразмерное значение квадрата круговой частоты системы $\lambda=(2\pi w/w_{\max})^2$.

В примере 1 четыре осциллятора с массами $m_1=0{,}1$, $m_2=0{,}7$, $m_3=0{,}7$, $m_4=0{,}1$ подвешены в точках $x_1=0{,}2$, $x_2=0{,}4$, $x_3=0{,}6$, $x_4=0{,}8$ на штангах длиной $l_1=0{,}5$, $l_2=0{,}1$, $l_3=0{,}1$, $l_4=0{,}5$. Все частоты осцилляторов одинаковы: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\pi^2/25=0{,}3948$, т. е. равны 3 Гц.

Таблица 1

| Номер собственного значения | $N = 9$ | $N = 19$ | $N = 39$ | $N = 79$ | $N = 99$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,3724 | 0,372 24 | 0,372 20 | 0,372 196 | 0,372 195 |
| 2 | 0,385 826 | 0,385 825 | 0,385 825 | 0,385 824 | 0,385 824 |
| 3 | 0,5476 | 0,546 973 | 0,546 80 | 0,546 760 | 0,546 754 |
| 4 | 1,267 | 1,2656 | 1,2653 | 1,265 22 | 1,265 22 |
| 5 | 19 | 17 | 17 | 16,82 | 16,8000 |
| 6 | 129 | 121 | 116 | 114,8 | 114,620 |
| 7 | 665 | 504 | 451 | 436 | 434,111 |
| 8 | 1817 | 1427 | 1247 | 1194 | 1187,46 |

Таблица 2

| Номер осциллятора | $\lambda = 0{,}372\,195$ | | $\lambda = 0{,}385\,824$ | | $\lambda = 0{,}546\,754$ | | $\lambda = 1{,}265\,220$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $N = 99$ | $N = 9$ | $N = 99$ | $N = 9$ | $N = 99$ | $N = 9$ | $N = 99$ | $N = 9$ |
| 1 | 1,000 000 | 1,000 000 | 0,470 687 | 0,463 | 0,188 009 | 0,18 | 0,422 319 | 0,43 |
| 2 | −0,066 300 89 | −0,665 | 0,383 055 | 0,383 01 | −0,470 454 | −0,469 | 0,287 537 | 0,29 |
| 3 | −0,004 777 38 | −0,49 | −0,608 918 | −0,608 | −0,024 8762 | −0,0241 | 0,462 628 | 0,47 |
| 4 | −0,308 042 | −0,307 | 1,000 000 | 1,000 000 | 1,000 000 | 1,000 000 | 1,000 000 | 1,000 000 |

Таблица 3

| Номер собственного значения | $N = 9$ | $N = 19$ | $N = 39$ | $N = 79$ | $N = 99$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11,3 | 11,0 | 10,93 | 10,906 | 10,9030 |
| 2 | 22,51 | 22,49 | 22,46 | 22,456 | 22,4547 |
| 3 | — | — | — | 340,7 | 339,737 |
| 4 | — | — | — | 398 | 396,732 |
| 5 | — | — | — | 1068 | 1066,44 |
| 6 | — | — | — | 2632 | 2639,62 |
| 7 | — | — | — | — | 4820,27 |
| 8 | — | — | — | — | 9162,91 |

Примечание. Прочерки означают, что расчеты на соответствующих сетках не проводились.

В табл. 1 приведены безразмерные значения квадратов круговой частоты. В последней графе (в расчетной сетке 99 точек) приведены значения с шестью значащими цифрами, в остальных графах — соответствующим образом округленные собственные значения. Аналогично приводятся результаты в табл. 2, 3. В табл. 2 приведены значения амплитуд осцилляторов для расчета, соответствующего данным табл. 1.

Пример 2. Рассматривается круглая балка переменного сечения: $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ кг/см$^2$; $\rho = 7{,}8/981$ г $\cdot$ с$^2$/см$^4$; $a = 10$ м ($a = a_1 + a_2 + a_3$); $a_1 = a_3 = 3$ м; $a_2 = 4$ м; $R = 0{,}1$ м. Безразмерные значения жесткости на изгиб равны 0,029 346 1 на первом и третьем участках и 2,25 на втором. Безразмерные значения массы равны 0,666 666 на первом и третьем участках и 1,5 на втором. Расположение осцилляторов, их массы, а также длины штанг те же, что в примере 1, но безразмерные частоты осцилляторов другие: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 100\pi = 986{,}9600$, т. е. размерное значение равно 150 Гц. В табл. 3 приведены результаты расчетов собственных значений.

Результаты проведенных расчетов показывают, что с использованием предложенной модели можно описать возникновение параметрических резонансов при колебаниях балки со свободными концами переменных сечения и массы, к которой на штангах подвешены сосредоточенные массы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. М.: Науч. мир, 2002.
2. **Алгазин С. Д.** Численное исследование резонансов в некоторых сложных колебательных системах // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 3. С. 155–159.
3. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы классической матфизики. 9. Численное исследование свободных колебаний стержня с осцилляторами. М., 2004. (Препр. / РАН. Ин-т проблем механики; № 755).
4. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы классической матфизики. 10. Численное исследование свободных колебаний балки с осцилляторами. М., 2005. (Препр. / РАН. Ин-т проблем механики; № 773).

*Поступила в редакцию 11/II 2005 г.,*
*в окончательном варианте — 30/VIII 2005 г.*