3. **Кедринский В. К.** Ударные волны в жидкости с пузырьками газа.— ФГВ, 1980, т. 16, № 5.
4. **Солоухин Р. И.** О пузырьковом механизме ударного воспламенения в жидкости.— ДАН СССР, 1961, т. 136, № 2.
5. **Сычев А. И., Пинаев А. В.** Волна детонации в системах жидкость — пузырьки газа.— В кн.: I Всесоюз. симпоз. по макроскопической кинетике и химической газодинамике. Алма-Ата, 1984, т. 1, ч. 1, № 65.
6. **Сычев А. И.** Воспламенение систем жидкость — пузырьки газа ударной волной.— ФГВ, 1985, т. 21, № 2.
7. **Hasegawa T., Fujiwara T.** Detonation in oxihydrogen bubbled liquids.— In: 19th Symp. (In). Comb., Haifa, 1982, Pittsburgh.
8. **Hasegawa T., Fujiwara T., Yasuhara M.** Propagation velocity and mechanism of bubble detonation.— In: 9th Colloquim (Int.) on Dynamics of Explosions and Reactive Systems: Book of Abstracts, Poitiers, 1983.
9. **Сычев А. И.** Волна детонации в системе жидкость — пузырьки газа.— ФГВ, 1985, т. 21, № 3.
10. **Бэтчелор Г. К.** Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости.— Сб. пер. Механика, 1968, № 3.
11. **Огородников И. А.** Резонансное формирование уединенных волн в среде со структурой. Препринт 90—83. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1983.
12. **Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е.** Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984.

Поступила 28/IX 1984 г.

УДК 550.344.43

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛАБО ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

С. З. ДУНИН

(*Москва*)

Информация о характере процесса, происходящего на некотором расстоянии от приемника, переносится благодаря волнам, возбуждающимся в среде источником. При распространении волновой сигнал ослабляется и искажается. Анализ факторов, приводящих к заметной трансформации сигнала,— предмет исследований ряда работ [1—3].

Последовательный подход к решению проблемы — учет не только диссипативных, но и дисперсионных свойств среды. Действительно, при частичном поглощении волны средой последняя получает импульс и приходит в движение, меняя локальную скорость сигнала, что эквивалентно дисперсии. В общем виде связь волновых параметров среды нелокальна: процессам разных временных и пространственных масштабов соответствуют свои временные и пространственные параметры, что определяет зависимость волнового числа k от частоты p, причем действительная и мнимая части волнового числа $k(p)=k'(p)+ik''(p)$ связаны фундаментальным соотношением, вытекающим из принципа причинности [1].

Для нахождения явного вида функциональной связи волновых параметров необходимо учитывать внутреннюю структуру среды, используя тот математический аппарат, который адекватно описывает масштабные явления, определяющие характер поведения среды в исследуемом диапазоне параметров.

Ряд важных положений о характере распространения возмущений в релаксирующей среде получен Мандельштамом и Леонтовичем [2, 3]: под воздействием возмущения волнового характера в среде нарушается термодинамическое равновесие и среда стремится вернуться к равновесному состоянию с измененными параметрами. При таком характере возмущения, которое протекает значительно быстрее, чем среда может подстроиться к новому состоянию, возмущение в среде распространяется со скоростью c_∞; при медленных по сравнению с релаксационным временем изменениях внешних параметров скорость распространения возмущений c_0.

В работе учтено, что в геологических средах многочисленные данные [4] свидетельствуют о слабой дисперсии волн в широком диапазоне их длины. Это обстоятельство позволяет получить выражение для массовой скорости в волне возмущения в удобном для анализа виде.

Дается решение одномерного волнового уравнения в однородной изотропной среде, в которой связь между напряжением σ_{ij} и скоростью деформации v_{ij} определяется уравнениями наследственного типа

$$\sigma_{ij}(x,\ t)=\delta_{ij}\int_0^t K(t-t')\,v_{kk}(x,\ t')\,dt' + 2\int_0^t dt'\mu(t-t')\left[v_{ij}(x,\ t')-\frac{\delta_{ij}}{3}v_{kk}(x,\ t')\right], \tag{1}$$

$$v_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}v_i+\frac{\partial}{\partial x_i}v_j\right],$$

где $K(t)$ и $\mu(t)$ — зависящие от времени объемный и сдвиговый модули среды соответственно.

В плоском случае, который нас интересует, уравнение (1) имеет вид

$$\sigma_{xx}(x,\ t)=\int_0^t E_\tau(t-t')\,v_{xx}(x,\ t')\,dt',\quad E_\tau(t)=K(t)+\frac{4}{3}\mu(t).$$

Примем, что релаксационные свойства среды описываются одним характерным параметром τ (временем релаксации), определив зависимость $E_\tau(t)$ от t и τ в виде

$$E_\tau(t)=E_0+E_p\exp(-t/\tau).$$

Используя связь между $\sigma_{xx}(x,\ t)$ и $v_x(x,\ t)$, а также уравнения движения и непрерывности

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}v_x=\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)=0,$$

получим, считая, что $E_0\gg E_p$, следующее выражение для массовой скорости:

$$v_x(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+a}^{+i\infty+a}dp\Phi_p(p)\exp\left[pt-\frac{x}{c_\infty}p\left(1+\frac{1-\alpha}{2}\frac{1}{1+p\tau}\right)\right], \tag{2}$$

$$\Phi_p(p)=\int_0^\infty v_x(0,\ t)\exp(-pt)\,dt,\quad \alpha=\frac{c_0^2}{c_\infty^2},\quad c_\infty^2=\frac{E_0+E_p}{\rho},\quad c_0^2=\frac{E_0}{\rho}.$$

Проводя вычисления интеграла в формуле (2), имеем

$$v_x(x,\ t)=\Theta(t')\left\{v_x(0,\ t')+\Delta^{1/2}\int_0^{t'}d\xi v_x(0,\ \xi)\,I_1\left(2\sqrt{\Delta(t'-\xi)}\right)\times\right. \tag{3}$$

$$\left.\times(t'-\xi)^{-1/2}\exp[-\alpha(t'-\xi)/\tau]\right\}\exp(-\tau\Delta/\alpha),$$

$$\Delta=\alpha(1-\alpha)x/2c_\infty\tau^2,\quad t'=t-\frac{x}{c_\infty},\quad \Theta(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Если в сечении $x=0$ в начальный момент времени задан короткий импульс $v_x(0,\ t)=v_0\delta(t)$, то на расстоянии x от этого сечения в момент t сигнал примет форму

$$v_x(x,\ t)=v_0\Theta(t')\left\{\exp(-\tau\Delta/\alpha)\,\delta(t')+\Delta^{1/2}\frac{I_1(2\sqrt{\Delta t'})}{t'^{1/2}\exp\left[\frac{\tau}{\alpha}(\Delta+\alpha^2\tau^{-2}t')\right]}\right\}. \tag{4}$$

Видно, что в процессе распространения возмущения в слабо диспергирующей среде форма сигнала искажается: передний фронт, движущийся со скоростью c_∞, экспоненциально уменьшается с расстоянием (максимальная амплитуда уменьшается по закону $x^{-1/2}$, ширина импульса увеличивается с расстоянием, как $x^{1/2}$). Такой характер распространения δ-образного импульса описан в [5], где приведены результаты исследования характера распространения волн с линейным и квадратичным законами зависимости коэффициента затухания от частоты (при квадратичном законе дисперсия волн получается бесконечной, $c_0<p/k(p)<\infty$). Эта частотная зависимость коэффициента затухания справедлива только в длинноволновом приближении, а использование ее во всем диапазоне частот приводит к нарушению принципа причинности.

При значениях параметров задачи таких, что $4\Delta t'\gg 1$, формула (4) примет вид

$$v_x(x,\ t)=\alpha v_0\sqrt{\frac{c_\infty}{2\pi\tau x}}\exp\left[-\alpha\tau^{-1}\left(\tau\alpha^{-1}\sqrt{\Delta}-\sqrt{t'}\right)^2\right].$$

При форме сигнала в источнике $v_x(0,\ t)=v_0\Theta(t)$ вычисления удобно провести по такой схеме: под интегралом провести замену $t'-\xi=u$, продифференцировать $v_x(x,\ t)$ по времени, разложить полученное выражение вблизи значений $t'=x(1-\alpha)/2c_\infty$, дающих наибольший вклад, и затем проинтегрировать по времени. В результате имеем выражение

$$v_x(x,\ t) = \frac{1}{2}\, v_0 \left[\Phi\left(\frac{t - \frac{x}{c_0}}{\tau\sqrt{\tau\Delta}} \right) + 1 \right], \quad \Phi(z) = 2\pi^{-1/2} \int\limits_0^z \exp\left[-v^2\right] dv,$$

приведенное в [6], где указано на наличие скачка на фронте волны в диспергирующей среде, но не получено явного вида зависимости скорости от координат и времени, что не позволило исследовать зафронтовое течение среды.

В общем случае произвольной зависимости входного сигнала от времени интеграл в (3) можно взять приближенно, с учетом того, что под интегралом стоят быстро меняющиеся функции. За исключением малой окрестности $(t' - \xi)\Delta \lesssim 1$, интеграл в формуле (3) можно представить в виде

$$\Delta^{1/2} \int\limits_0^{t'} d\xi v_x(0,\ \xi) \frac{\exp\left[-\alpha\tau^{-1}(t' - \xi) - \tau\Delta/\alpha + 2\sqrt{\Delta(t' - \xi)}\right]}{\left\{4\pi\left[\Delta^{1/2}(t' - \xi)\right]^{1/2}\right\}^{1/2}}.$$

Вблизи $\xi_m = t - x/c_0$ стоящая под интегралом функция имеет максимум. Раскладывая выражение в экспоненте с точностью до квадратичных слагаемых вблизи экстремальной точки, получим

$$v_x(x,\ t) \cong \frac{\alpha}{\sqrt{4\pi\tau^3\Delta}} \int\limits_0^{t'} d\xi v_x(0,\ \xi) \exp\left[-\frac{\alpha c_\infty}{2\tau(1-\alpha)x}(\xi_m - \xi)^2\right] + v_x(0,\ t')\exp\left[-\tau\Delta/\alpha\right]. \tag{5}$$

На больших расстояниях от источника, когда $2c_\infty\tau \ll (1-\alpha)x \ll \frac{\alpha}{2\tau} T^2_{\text{ист}} c_p$, основной вклад в $v_x(x,\ t)$ вносит экстремальная точка ξ_m. В этом случае

$$v_x(x,\ t) \cong v_x(0,\ t - x/c_0).$$

Если расстояния от источника таковы, что $4c_\infty\tau^2(1-\alpha) \sim 2x\tau(1-\alpha) \ll \alpha c_\infty T^2_{\text{ист}}$, то $v_x(x,\ t) \cong v_x(0,\ t - x/c_0) + v_x(0,\ t - x/c_\infty)\exp\left[-\frac{(1-\alpha)x}{2c_\infty\tau}\right]$. Когда характерное время изменения входного сигнала $T_{\text{ист}}$ удовлетворяет неравенству $\tau^2 \ll T^2_{\text{ист}} \ll 2(1-\alpha)\tau x/c_\infty\alpha$, то можно вынести за знак интеграла экспоненту при $\xi = 0$ и ответ примет вид

$$v_x(x,\ t) \cong \frac{\alpha}{\sqrt{4\pi\Delta\tau^3}} \exp\left[-\frac{c_\infty}{2(1-\alpha)\tau x}\right] \int\limits_0^\infty v_x(0,\ t')\, dt',$$

т. е. на достаточно больших расстояниях возмущение независимо от его первоначальной формы будет иметь вид гауссовой кривой, затухая с расстоянием по закону $x^{-1/2}$.

Для выяснения более детальной картины распространения сигнала надо проводить численные расчеты.

Если входной сигнал такой, что $\int\limits_0^\infty v_x(0,\ t)\, dt$ мал, то следует разлагать подынтегральное выражение в (5) с точностью до слагаемых ξ_m/x. Тогда выражение для массовой скорости на больших расстояниях определится формулой

$$v_x(x,\ t) \cong \frac{\alpha \exp\left[-\frac{c_\infty \xi_m^2}{2(1-\alpha)\tau x}\right]}{\sqrt{4\pi\Delta\tau^3}} \left\{ \int\limits_0^\infty v_x(0,\ t)\, dt + \frac{\alpha\xi_m c_\infty}{(1-\alpha)\tau x} \int\limits_0^\infty dt t v_x(0,\ t) \right\},$$

указывающей на знакопеременную зависимость скорости $v_x(x,\ t)$ от времени при фиксированной координате и на затухание волны с расстоянием по закону $\tilde{\alpha}x^{-1/2} + \tilde{\beta}x^{-3/2}$, что, по-видимому, наблюдалось в эксперименте [7], где отмечалась отрицательная фаза сигнала, а зависимость максимальной амплитуды от расстояния $v_m \sim x^{-1,23}$. При определенных $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ на ограниченном интервале x такие закономерности следуют из (5).

При входном сигнале, зависящем от времени по закону $v_x(0,\ t) = v_0 \operatorname{Re} \times \exp\left[-\gamma t + i\omega t\right]$, выражение для массовой скорости примет вид

$$v_x(x,\ t) = \frac{v_0}{2} \operatorname{Re}\left\{\Phi\left(t'/\bar{\Delta} - \bar{\xi}\right) + \Phi\left(\bar{\xi}\right)\right\} \exp\left[-\xi_m^2/\bar{\Delta}^2 + \bar{\xi}^2\right],$$

$$\overline{\Delta}^2 = (1-\alpha)\tau x/2c_\infty,\quad \overline{\xi} = \xi_m/\overline{\Delta} - \overline{\Delta}\gamma/2 + i\omega\overline{\Delta}/2.$$

Учитывая асимптотику $\Phi(x+iy)$ при больших значениях действительной части аргумента, получим

$$v_x(x,\ t) \cong \frac{v_0}{2}\,\mathrm{Re}\left\{1+\Phi(\overline{\xi})\right\}\exp\left[\overline{\xi}^2 - \overline{\xi}_m^2/\overline{\Delta}^2\right]. \qquad (6)$$

Для незатухающего сигнала $\gamma = 0$ из формулы (6) следует, что гармоническая волна затухает с расстоянием экспоненциально $v_x(x,\ t) \sim \exp\left[-\omega^2\tau x/c_\infty\right]$.

Как видно из проведенного анализа, определяемая экспериментально величина $v_x(x,t)$ во многом зависит от соотношения между такими параметрами среды, как время релаксации τ, дисперсия $1-\alpha$, скорость сигнала, длительность действия источника и расстояния, на котором фиксируется сигнал. Для правильной интерпретации результатов эксперимента необходимо использовать те выражения для $v_x(x,\ t)$, которые соответствуют выбранным параметрам. Поскольку некоторые параметры определяются только свойствами среды (скорость, время релаксации, дисперсия), а длительность сигнала в источнике — методикой эксперимента, то проведенный анализ позволяет сделать утверждение об отсутствии подобия при проведении мелко- и крупномасштабных экспериментов в дисперсионно-диссипативных средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гинзбург В. Л.** Об общей связи между поглощением и дисперсией.— Акуст. журн., 1955, № 1.
2. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
3. **Руденко О. В., Солуян С. И.** Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
4. **Коган С. Я.** Краткий обзор теории поглощения сейсмических волн.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1966, № 12.
5. **Родионов В. Н., Адушкин В. В. и др.** Механический эффект подземного взрыва. М.: Недра, 1971.
6. **Стаханов И. П., Ступоченко Е. В.** О некоторых вопросах гидродинамики релаксирующих сред.— ПМТФ, 1963, № 2.
7. **Белинский И. В., Христофоров Б. Д.** Вязкость NaCl при ударном сжатии.— ПМТФ, 1968, № 1.

Поступила 30/X 1984 г.

УДК 536.46

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ СЛАБЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ НАСЫПНОЙ ПЛОТНОСТИ

Б. Е. ГЕЛЬФАНД, С. П. МЕДВЕДЕВ, А. Н. ПОЛЕНОВ, Е. И. ТИМОФЕЕВ, С. М. ФРОЛОВ, С. А. ЦЫГАНОВ

(*Москва*)

В химической, газовой, нефтяной промышленности находят широкое применение огнепреградители с насадками из гранулированных материалов [1]. Существующие полуэмпирические оценки позволяют в каждом конкретном случае выбрать необходимые насадки, обеспечивающие взрывобезопасность технологического процесса. Однако такие оценки не раскрывают механизм взаимодействия волн горения и особенно детонационных волн с насыпными системами в широком диапазоне материала и размера гранул. Между тем в [2—4] и др. показано, что процессы горения и детонации газов в пористых инертных средах существенно отличаются от аналогичных процессов в отсутствие твердой фазы, например аномальные скорости горения и детонации.

Для раскрытия механизма этих явлений представляется важным учитывать газодинамические характеристики насыпных и пористых систем, в частности скорость звука. Однако необходимо отметить, что особенностью течений двухфазных сред газ — частицы является наличие трения и теплообмена между фазами. Это приводит к невозможности существования неустановившихся изэнтропических движений в таких системах.

Известно [5], что состояние газа при течении с трением формально можно описать уравнением политропы

$$p\rho^{-n} = \mathrm{const},$$

где p, ρ — давление и плотность газа; n — показатель политропы. Отсюда вводится понятие характеристической скорости данного процесса [5]:

$$u^2 = np\rho^{-1}. \qquad (1)$$