

УДК 620.178.6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

В. М. Тихомиров

Сибирский государственный университет путей сообщения, 630049 Новосибирск, Россия
E-mail: twm@stu.ru

Для осесимметричных тел с внутренними и внешними разрезами получены зависимости перемещений поверхности разреза от соответствующих коэффициентов интенсивности напряжений при различных деформациях (растяжение, сдвиг, изгиб, кручение). Предложен алгоритм определения коэффициентов интенсивности напряжений трех типов (нормальный отрыв, продольный и поперечный сдвиг) по перемещениям поверхности разреза вблизи его вершины. На примере численного анализа различных трехмерных задач механики разрушения показана эффективность разработанного алгоритма.

Ключевые слова: трехмерное тело с разрезом, коэффициенты интенсивности напряжений, численный анализ напряженно-деформированного состояния.

ВВЕДЕНИЕ

В линейной механике разрушения прочность трехмерных тел с трещинами оценивается по значениям коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) трех типов (нормальный отрыв, продольный и поперечный сдвиг). Разработано большое количество методов определения КИН, основанных на аналитическом или численном анализе напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины. В настоящее время при исследовании прочности трехмерных тел сложной геометрии с трещинами применяются численные алгоритмы метода конечных элементов [1–3].

В известных пакетах прикладных программ (ANSYS, COSMOS/M, NASTRAN) для расчета КИН используется асимптотическое решение [1], которое справедливо вблизи вершины трещины, в так называемой сингулярной зоне, где численный анализ дает максимальную ошибку. Поэтому для более точного определения КИН необходимо либо разбивать тело на достаточно малые элементы, либо создавать в области фронта трещины сетку из конечных элементов специального типа [4], либо применять аппроксимирующие соотношения, учитывающие напряжения в дальнем поле [4–6]. Известные алгоритмы расчета позволяют достаточно точно определять КИН в случае однородного нагружения и в точках фронта трещины, удаленных от поверхности тела.

Целью настоящей работы является получение на основе аналитических решений выражений для перемещений поверхности разреза при различных типах нагружения осесимметричных тел с разрезами. Анализ этих уравнений позволяет определить выражения для

аппроксимации перемещений в окрестности фронта трещины при смешанном типе нагружения и разработать новый алгоритм расчета КИН трех типов: K_I (нормальный отрыв), K_{II} (поперечный сдвиг), K_{III} (продольный сдвиг).

1. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЕЗА В ТРЕХМЕРНОМ ТЕЛЕ

Рассмотрим цилиндры с внутренним разрезом, имеющим малые размеры, и с глубоким внешним разрезом (рис. 1). Решение задачи построим в эллиптической системе координат (ξ, η, ζ) , связанной с декартовой системой (x, y, z) следующим образом:

$$y = c \operatorname{sh} \xi \cos \eta, \quad x = c \operatorname{ch} \xi \sin \eta \cos \zeta, \quad z = c \operatorname{ch} \xi \sin \eta \sin \zeta. \quad (1)$$

При этом семейство поверхностей $\xi = \operatorname{const}$ представляет собой софокусные эллипсоиды вращения, семейство поверхностей $\eta = \operatorname{const}$ — софокусные гиперboloиды вращения, поверхность $\zeta = \operatorname{const}$ — плоскость, проходящую через ось y . Расстояние между фокусами эллипсов и гипербол равно $2c$ (c — радиус фронта трещины).

Пусть поверхность внутреннего разреза ограничена эллипсоидом $\xi = \xi_0$, поверхность внешнего разреза — гиперboloидом $\eta = \eta_0$. Для моделирования внутренней дисковой трещины радиусом c (см. рис. 1, *a*) положим $\xi_0 = 0$. Внешняя кольцевая трещина соответствует разрезу при $\eta_0 = 0$. При этом размер c является радиусом неповрежденной части цилиндра (см. рис. 1, *б*).

Для описания деформированного состояния тела будем использовать четыре функции напряжений: F_1, F_2, F_3, F_4 [7]. При этом компоненты перемещений в направлениях координат ξ, η, ζ можно выразить через функции напряжений:

$$u_\xi = \frac{c}{2Gh} \left(-\frac{\partial F_1}{\partial \xi} + 4(1 - \nu)[F_2 \operatorname{ch} \xi \cos \eta + \operatorname{sh} \xi \sin \eta(F_3 \cos \zeta + F_4 \sin \zeta)] \right),$$

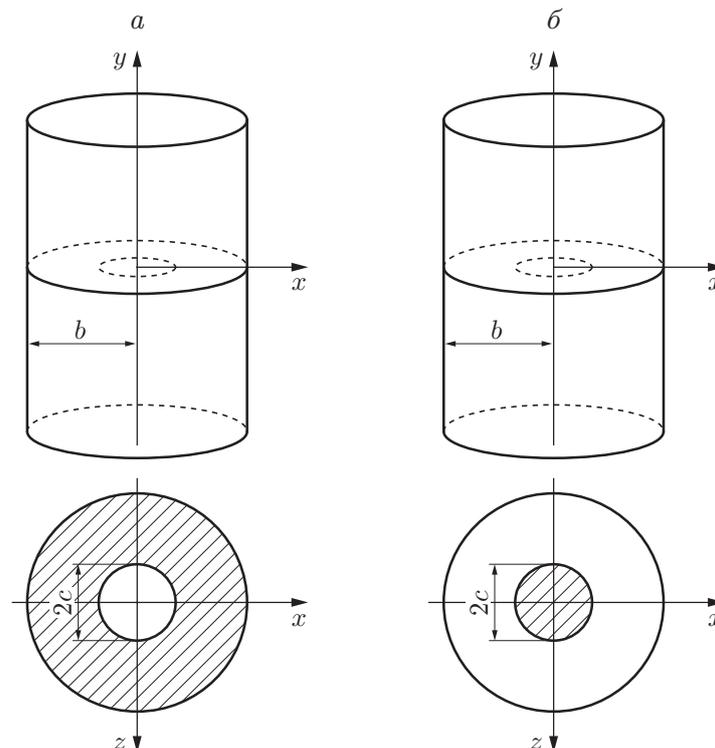


Рис. 1. Тело вращения с внутренним (*a*) и внешним (*б*) разрезами

$$u_\eta = \frac{c}{2Gh} \left(-\frac{\partial F_1}{\partial \eta} + 4(1-\nu)[-F_2 \operatorname{sh} \xi \sin \eta + \operatorname{ch} \xi \cos \eta (F_3 \cos \zeta + F_4 \sin \zeta)] \right), \quad (2)$$

$$u_\zeta = \frac{c}{2G} \left(-\frac{1}{\operatorname{ch} \xi \sin \eta} \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} + 4(1-\nu)(-F_3 \sin \zeta + F_4 \cos \zeta) \right).$$

Здесь G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; $h = \sqrt{\operatorname{sh}^2 \xi + \cos^2 \eta}$ — коэффициент искажения криволинейных координат.

Рассмотрим растяжение, сдвиг, изгиб и кручение цилиндров с внутренней и внешней трещинами. Функции F_1, F_2, F_3, F_4 , удовлетворяющие граничным условиям данных задач, получены в [7]. При использовании выражений (2) это позволяет определить для каждого случая нагружения перемещения u_x, u_y, u_z точек, принадлежащих поверхности разреза, и выразить их через соответствующие коэффициенты интенсивности напряжений K_I, K_{II}, K_{III} .

1.1. Цилиндр с внутренним дисковым разрезом. Рассмотрим различные случаи нагружения цилиндра с внутренним дисковым разрезом.

Растяжение равномерно распределенным по торцам напряжением σ . В данном случае функции напряжений имеют вид

$$F_1 = \frac{\sigma}{2(1+\nu)} [(3\nu-1) \operatorname{ch}^2 \xi + 1 - \nu] \sin^2 \eta + \frac{\sigma}{6(1+\nu)} [3(1-2\nu) \operatorname{ch}^2 \xi + 4\nu - 3] + AT +$$

$$+ B[(3 \operatorname{ch}^2 \xi - 2)T - 3 \operatorname{sh} \xi](3 \sin^2 \eta - 2) + C(T \operatorname{sh}^2 \xi - \operatorname{sh} \xi) \cos^2 \eta,$$

$$F_2 = \left[\frac{\sigma}{2(1+\nu)} \operatorname{sh} \xi + C(T \operatorname{sh} \xi - 1) \right] \cos \eta, \quad F_3 = F_4 = 0,$$

где $T = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} \xi)$; A, B, C — постоянные:

$$A = \frac{2\sigma}{3\pi} (2\nu - 1), \quad B = -\frac{\sigma}{6\pi} (2\nu - 1), \quad C = -\frac{2\sigma}{\pi}.$$

Определим производные F_1 на границе разреза при $\xi = 0$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \xi} = 4B(2 - 3 \sin^2 \eta) - C \cos^2 \eta - A, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \eta} = \left(3B\pi + \frac{\sigma\nu}{1+\nu} \right) \sin \eta \cos \eta, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} = 0$$

и подставим эти соотношения в уравнения (2). В результате получаем

$$u_\xi = \frac{2\sigma(1-\nu)c}{G\pi} \cos \eta, \quad u_\eta = -\frac{\sigma(1-\nu)(1+2\nu)c}{2G(1+\nu)} \sin \eta, \quad u_\zeta = 0.$$

Учитывая соотношения (1), определим компоненты перемещений по осям x, y, z для точек поверхности разреза:

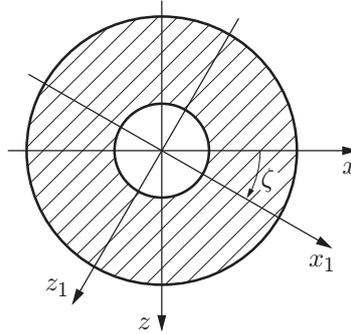
$$u_y = \frac{2\sigma(1-\nu)c}{G\pi} \cos \eta, \quad u_x = -\frac{\sigma(1+2\nu)(1-\nu)c}{4(1+\nu)G} \sin \eta, \quad u_z = 0.$$

При растяжении цилиндра с дисковой трещиной КИН равен $K_I = 2\sigma\sqrt{c/\pi}$ [8]. Перемещения u_y , соответствующие раскрытию трещины, выразим через K_I :

$$u_y = K_I \frac{1-\nu}{G} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \cos \eta.$$

Изгиб сосредоточенным моментом M_z . Вследствие громоздкости выражений для функций напряжений приведем только окончательное выражение для перемещений поверхности разреза

$$u_y = \frac{M_z c^2 (1-\nu)}{G\pi b^4} \cos \eta \sin \eta \sin \zeta.$$

Рис. 2. Локальная система координат (x_1, z_1)

Учитывая, что при изгибе цилиндра с дисковой трещиной КИН равен $K_I = (M_z c \sin \zeta / b^4) \sqrt{c/\pi}$ [8], получаем

$$u_y = \frac{K_I(1-\nu)}{G} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \cos \eta \sin \eta.$$

Сдвиг по оси x. В данном случае с учетом малости размера разреза c ($c \ll b$) будем считать, что касательные напряжения распределены равномерно по поперечному сечению цилиндра, удаленному от трещины: $\tau_{xy} \simeq \tau$. Тогда функции напряжений можно записать следующим образом:

$$F_1 = [-\tau \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi - C \operatorname{sh} \xi (\operatorname{ch} \xi T - \operatorname{th} \xi)] \sin \eta \cos \eta \cos \zeta,$$

$$F_2 = -(C/2)(\operatorname{ch} \xi T - \operatorname{th} \xi) \sin \eta \cos \zeta, \quad F_3 = C(\operatorname{sh} \xi T - 1) \cos \eta, \quad F_4 = 0.$$

Здесь $C = -2\tau/[\pi(2-\nu)]$.

Из соотношений (1), (2) определим перемещения поверхности разреза

$$u_y = \frac{\tau(1-2\nu)}{G(2-\nu)} \sin \eta \cos \zeta, \quad (3)$$

$$u_{x_1} = \frac{4\tau c(1-\nu) \cos \zeta}{G\pi(2-\nu)} \cos \eta, \quad u_{z_1} = -\frac{4\tau c(1-\nu) \sin \zeta}{G\pi(2-\nu)} \cos \eta,$$

где x_1, z_1 — координаты, используемые для определения перемещений при сдвиге (рис. 2). При таком виде нагружения цилиндра с дисковой трещиной КИН равны [9]

$$K_{II} = \frac{4\tau}{2-\nu} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \cos \zeta, \quad K_{III} = \frac{4\tau(1-\nu)}{2-\nu} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \sin \zeta.$$

Используя соотношения (3), выразим перемещения поперечного и продольного сдвига через K_{II} и K_{III} соответственно:

$$u_x = K_{II} \frac{1-\nu}{G} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \cos \eta, \quad u_z = \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \cos \eta.$$

Кручение моментом M_y . В данном случае

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0,$$

$$\frac{F_4}{\cos \zeta} = -\frac{F_3}{\sin \zeta} = \frac{M_y c^2}{2(1-\nu)\pi b^4} \left[\operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi - \frac{2}{\pi} \left(\operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi T - \operatorname{ch} \xi + \frac{1}{3 \operatorname{ch} \xi} \right) \right] \sin 2\eta.$$

Соответственно перемещения поверхности разреза равны

$$u_y = 0, \quad u_{x_1} = 0, \quad u_{z_1} = \frac{8M_y c^2}{3G\pi^2 b^4} \sin \eta \cos \eta.$$

Учитывая, что при кручении цилиндра с внутренней дисковой трещиной КИН равен $K_{III} = 8M_y c^2 / (3b^4 \pi \sqrt{\pi c})$ [10], запишем выражение для перемещений u_{z_1} в виде

$$u_{z_1} = \frac{K_{III}}{G} \sin \eta \cos \eta.$$

1.2. Цилиндр с внешним кольцевым вырезом. Рассмотрим растяжение, изгиб, сдвиг и кручение кругового цилиндра с внешним кольцевым вырезом при $c/b \ll 1$.

Осевое растяжение силой P . В данном случае имеем

$$F_1 = C\{(1 - 2\nu) \ln [\operatorname{ch} \xi (1 + \cos \eta)] + [2(1 - \nu)T \operatorname{sh} \xi - 1 + 2\nu] \cos \eta\}, \\ F_2 = CT, \quad F_3 = F_4 = 0,$$

где $C = -P/(2\pi c^2)$ — параметр нагружения; P — равнодействующая нагрузки.

Из соотношений (1), (2) определим перемещения, учитывая, что на поверхности разреза направления осей координат η, ξ, ζ совпадают с направлениями осей y, x_1, z_1 соответственно:

$$u_y = \frac{P(1 - \nu)}{2G\pi c} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} \xi), \quad u_{x_1} = -\frac{P(1 + 2\nu)}{4G\pi c \operatorname{ch} \xi}, \quad u_{z_1} = 0.$$

Не учитывая перемещение цилиндра как целого по оси y , окончательно получаем

$$u_y = \frac{K_I(1 - \nu)}{G} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} \xi),$$

где $K_I = P/(2c\sqrt{\pi c})$ [8].

Изгиб сосредоточенным моментом M_z . Данному случаю соответствуют функции напряжений

$$F_1 = 2C \sin \eta \cos \eta \cos \zeta \left(\frac{1 - 2\nu}{3 \operatorname{ch} \xi \cos \eta (1 + \cos \eta)} + (1 - \nu) \operatorname{ch} \xi (T \operatorname{sh} \xi - 1) + \frac{2 - \nu}{3 \operatorname{ch} \xi} \right), \\ F_2 = C \sin \eta \cos \zeta (T \operatorname{ch} \xi - \operatorname{th} \xi), \quad F_3 = F_4 = 0,$$

где $C = -3M_z/(4\pi c^3)$ — параметр нагружения.

Перемещения точек, принадлежащих поверхности разреза (при $\eta = \pi/2$), определяются следующими зависимостями:

$$u_y = \frac{3M_z(1 - \nu) \cos \zeta}{4G\pi c^2} (T \operatorname{ch} \xi - \operatorname{th} \xi), \\ u_{x_1} = \frac{M_z(1 - 2\nu) \cos \zeta}{4G\pi c^2 \operatorname{ch}^2 \xi}, \quad u_{z_1} = \frac{M_z(1 - 2\nu) \sin \zeta}{4G\pi c^2 \operatorname{ch}^2 \xi}.$$

Не учитывая перемещение цилиндра как целого и учитывая, что $K_I = 3M_z \cos \zeta / (2c^2 \sqrt{\pi c})$ [8], окончательно получаем

$$u_y = \frac{K_I(1 - \nu)}{2G} \sqrt{\frac{c}{\pi}} [\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} \xi) \operatorname{ch} \xi + \operatorname{th} \xi], \\ u_{x_1} = \frac{M_z(1 - 2\nu) \cos \zeta}{4G\pi c^2} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \xi} - \frac{3}{2} \right), \quad u_{z_1} = -\frac{M_z(1 - 2\nu) \sin \zeta}{4G\pi c^2} \operatorname{th}^2 \xi.$$

Сдвиг поперечной силой Q_x . В рассматриваемом случае имеем

$$F_1 = \frac{2C(1-\nu)\sin\eta\cos\zeta}{2\nu-1} \left(\nu T \operatorname{ch}\xi - \frac{[\nu+(1-\nu)\cos\eta]\operatorname{th}\xi}{1+\cos\eta} \right),$$

$$F_2 = \frac{C\sin\eta\cos\zeta}{\operatorname{ch}\xi(1+\cos\eta)}, \quad F_3 = -\frac{CT}{2(2\nu-1)}, \quad F_4 = 0,$$

где $C = Q_x(2\nu-1)/[4\pi(1-\nu)c^2]$ — параметр нагружения. С использованием функций F_1, F_2, F_3, F_4 получаем

$$u_y = \frac{Q_x(1-2\nu)\cos\zeta}{4Gc\operatorname{ch}\xi},$$

$$u_{x_1} = -\frac{Q_x\cos\zeta}{4G\pi c} \left((2-\nu)T + \nu \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}^2\xi} \right), \quad u_{z_1} = \frac{Q_x\sin\zeta}{4G\pi c} \left((2-\nu)T - \nu \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}^2\xi} \right).$$

С учетом перемещений цилиндра как целого и выражений для КИН поперечного $K_{II} = Q_x\cos\zeta/(2c\sqrt{\pi c})$ и продольного $K_{III} = Q_x\sin\zeta/(2c\sqrt{\pi c})$ сдвига [8] преобразуем компоненты перемещений поверхности разреза. В результате имеем

$$u_{x_1} = -\frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \left((2-\nu) \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}\xi) - \nu \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}^2\xi} \right),$$

$$u_{z_1} = \frac{K_{III}}{2G} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \left((2-\nu) \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}\xi) + \nu \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}^2\xi} \right).$$

Кручение моментом M_y . Функции напряжений имеют вид

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0,$$

$$F_3 = -C(T\operatorname{ch}\xi - \operatorname{th}\xi)\sin\zeta, \quad F_4 = C(T\operatorname{ch}\xi - \operatorname{th}\xi)\cos\zeta,$$

где $C = -3M_y/[16\pi c^3(1-\nu)]$.

В соответствии с выражениями (2) определим перемещения точек поверхности разреза

$$u_\xi = 0, \quad u_\eta = 0, \quad u_\zeta = \frac{2Cc(1-\nu)}{G} (T\operatorname{ch}\xi - \operatorname{th}\xi).$$

Не учитывая поворот цилиндра относительно оси y , получаем выражения для перемещений поверхности разреза

$$u_y = 0, \quad u_{x_1} = 0, \quad u_{z_1} = -\frac{3M_y}{8G\pi c^2} [\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}\xi)\operatorname{ch}\xi + \operatorname{th}\xi].$$

В этом случае $K_{III} = 3M_y/(4c^2\sqrt{\pi c})$ [8], поэтому

$$u_{z_1} = \frac{K_{III}}{2G} \sqrt{\frac{c}{\pi}} [\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}\xi)\operatorname{ch}\xi + \operatorname{th}\xi].$$

2. АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИН

Для практического применения полученных выражений необходимо представить их в локальной системе координат, связанной с фронтом трещины. С учетом соотношений (1) для точек, принадлежащих поверхности внутреннего разреза, при $\xi = 0$ получаем

$$\sin\eta = 1 - \frac{r}{c}, \quad \cos\eta = \sqrt{\frac{2r}{c} \left(1 - \frac{r}{2c} \right)},$$

для точек, принадлежащих поверхности внешнего разреза, при $\eta = \pi/2$ соответственно имеем

$$\operatorname{ch} \xi = 1 + \frac{r}{c}, \quad \operatorname{sh} \xi = \sqrt{\frac{2r}{c} \left(1 + \frac{r}{2c}\right)}.$$

Здесь r — радиус, направленный от вершины трещины вдоль оси, перпендикулярной ее фронту.

Если все выражения для перемещений поверхности разрезов при различных видах деформаций разложить в ряд по параметру $r/(2c)$ и ограничиться первыми тремя членами ряда, то получим зависимости, которые можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{K_I(1-\nu)}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left(1 + \frac{Ar}{c} + \frac{Br^2}{c^2}\right), \\ u_{x_1} &= \frac{K_{II}(1-\nu)}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left(1 + \frac{Ar}{c} + \frac{Br^2}{c^2}\right), \quad u_{z_1} = \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left(1 + \frac{Ar}{c} + \frac{Br^2}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь коэффициенты A , B зависят от геометрии тела и способа нагружения.

По выражениям (4) можно определить КИН K_I , K_{II} , K_{III} , используя значения перемещений поверхности разреза, полученные методами численного анализа. При этом неизвестные параметры K , A , B , c находим, минимизируя функцию невязки:

$$\Phi(K, A, B, c) = \sum_{i=0}^n [u_i - u(K, A, B, c, r)]^2 \quad (5)$$

(n — число расчетных узлов конечно-элементной сетки вблизи вершины трещины).

При несимметричном нагружении в расчете необходимо учесть взаимное смещение узлов, принадлежащих противоположным поверхностям разреза, а перемещения, рассчитываемые по формулам (4), — удвоить.

В современных вычислительных комплексах типа ANSYS для определения величины КИН используется другой алгоритм расчета [4]. Функция $|u|/\sqrt{r}$ аппроксимируется линейной зависимостью $|u|/\sqrt{r} = A + Br$. По перемещениям двух ближайших к вершине трещины узлов вычисляется коэффициент A , а затем с использованием асимптотических зависимостей [1] определяются значения КИН

$$K_{I,II} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{G}{1-\nu} A, \quad K_{III} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} GA. \quad (6)$$

Для тестирования предложенного алгоритма определения КИН выполнены численные расчеты напряженно-деформированного состояния некоторых трехмерных тел с разрезами при различных типах нагружения (см. таблицу). Для проведения корректного сравнительного анализа результатов вычисления КИН при дискретизации тела размеры конечных элементов в окрестности фронта трещины для всех задач выбирались равными и составляли $0,05a$ (a — характерный размер дефекта). Коэффициент Пуассона принимался равным 0,3.

В таблице приведены значения КИН, вычисленные по предложенному алгоритму (β — отношение вычисленного значения КИН к теоретическому значению, определенному по справочнику [10]). Минимизация функции (5) проводилась по данным перемещений трех ближайших к вершине трещины узлов. Для сравнения проведены расчеты КИН по формулам (6), в которых используется линейная аппроксимация перемещений двух узлов. В таблице для различных значений КИН вдоль фронта трещины указаны угловые координаты

Значения КИН, полученные с использованием численных алгоритмов и справочных данных

Объект	Вид нагружения	β	
		Расчет по формулам (6)	Расчет по формулам (4)
Цилиндр с дисковым разрезом, перпендикулярным оси	Растяжение	0,973	0,989
	Сдвиг по оси x при $\zeta = 0$	0,914	0,948
	Растяжение сосредоточенными силами, приложенными к берегам разреза: $\zeta = 0$ $\zeta = \pi/2$	0,955	0,982
		0,939	0,953
Полоса с дисковым разрезом	Растяжение	0,973	0,982
Полупространство с поверхностной трещиной, квадратной в плане	Растяжение	0,926	0,961
Пластина с полукруговой трещиной, выходящей на поверхность	Растяжение: $\zeta = 0$ $\zeta = \pi/2$	1,006	1,004
		0,953	0,993
	Изгиб: $\zeta = 0$ $\zeta = \pi/2$	1,008	1,009
		0,958	0,995
Цилиндр с внешним кольцевым разрезом	Растяжение	0,973	0,995
	Изгиб при $\zeta = 0$	0,965	0,994
	Сдвиг по оси x при $\zeta = 0$	0,854	0,953
Цилиндр с внешним радиальным разрезом	Кручение	0,972	0,996

точек, для которых был проведен расчет. Для дисковых и кольцевых разрезов угол ζ отсчитывался от оси x (см. рис. 2), для полукруговой трещины, выходящей на поверхность, система координат показана на рис. 3.

Для поверхностной трещины, квадратной в плане, КИН определялся в точке фронта, выходящей на поверхность. При растяжении цилиндра сосредоточенными силами принимались следующие координаты их приложения: $z = 0$, $x = 0,5c$. При растяжении полосы с дисковой трещиной отношение высоты полосы к радиусу трещины принималось равным трем.

В качестве начального значения параметра c принимался либо характерный размер разреза, либо радиус кривизны фронта трещины. Следует отметить, что начальные значения c оказывают незначительное влияние на результаты расчета КИН.

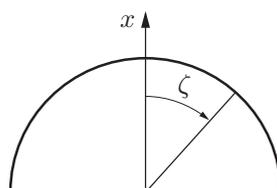


Рис. 3. Система координат для полукруговой трещины

Анализ результатов показывает, что при однородном нагружении и малых размерах трещины данные, полученные с использованием двух различных алгоритмов, сравнимы. При неоднородных краевых условиях расчет по предложенному алгоритму дает меньшую погрешность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе с использованием данных [7] получены аналитические выражения для перемещений поверхности разрезов для трехмерных тел с разрезами при различных типах нагружения. Анализ этих выражений позволил вывести универсальные соотношения между перемещениями поверхности трещины и коэффициентами интенсивности напряжений трех типов (K_I , K_{II} , K_{III}), справедливые в окрестности вершины трещины.

Показана эффективность предложенного алгоритма определения КИН вдоль фронта пространственной трещины. В отличие от результатов вычисления КИН с помощью известных способов результаты расчета по разработанному алгоритму имеют бóльшую точность, особенно при решении задач в случае неоднородного нагружения и при расчете КИН для точек фронта трещины, выходящих на поверхность тела. Рассматриваемый способ расчета КИН может быть также применен при решении плоских задач механики разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вычислительные** методы в механике разрушения / Под ред. С. Атлури. М.: Мир, 1990.
2. **Морозов Е. М.** Метод конечных элементов в механике разрушения / Е. М. Морозов, Г. П. Никишков. М.: Наука, 1980.
3. **Сиратори М.** Вычислительная механика разрушения / М. Сиратори, Т. Миеси, Х. Мацусита. М.: Мир, 1986.
4. **Морозов Е. М.** ANSYS в руках инженера: Механика разрушения / Е. М. Морозов, А. Ю. Муйземнек, А. С. Шадский. М.: Ленанд, 2008.
5. **Ахметзянов М. Х., Тихомиров В. М., Суровин П. Г.** Определение коэффициентов интенсивности напряжений при смешанном типе нагружения трещин // Изв. вузов. Стр.-во. 2003. № 1. С. 19–25.
6. **Тихомиров В. М.** Аналитические зависимости для определения перемещений поверхности разреза в плоских и трехмерных телах // Экспериментально-расчетные методы исследования задач прочности. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т путей сообщ., 2003. С. 9–33.
7. **Нейбер Г.** Концентрация напряжений. М.: ОГИЗ, 1947.
8. **Черепанов П. Г.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
9. **Разрушение:** В 7 т. М.: Мир, 1975. Т. 2. Математические основы теории разрушения / Под ред. Г. Либовица.
10. **Мураками Ю.** Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. М.: Мир, 1990. Т. 2.

*Поступила в редакцию 14/III 2013 г.,
в окончательном варианте — 23/IX 2013 г.*