УДК 533.6.011.72

ОПТИМАЛЬНЫЕ ДОГОНЯЮЩИЕ СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СУММАРНЫЙ УГОЛ ПОВОРОТА ПОТОКА

А. В. Омельченко, В. Н. Усков

Балтийский государственный технический университет, 198005 Санкт-Петербург

Рассматривается задача оптимизации газодинамических переменных за системой из двух стационарных косых скачков уплотнения, на угол поворота потока в которой наложены ограничения. Определяются диапазоны входных параметров, в которых данная система оказывается эффективнее одного скачка. На основе анализа оптимальной для статического давления системы объясняется физический смысл смены типа отраженного разрыва в задаче о взаимодействии догоняющих косых скачков уплотнения.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоский стационарный сверхзвуковой поток совершенного невязкого газа, проходящий через систему S_2, состоящую из двух косых скачков уплотнения одного направления. Отношение статических давлений за k-м скачком p_k и до него p_{k-1} определяет интенсивность скачка $J_k = p_k/p_{k-1}$ ($k = 1, 2$). Как показано, например, в работе [1], при фиксированных значениях показателя адиабаты γ и числа Маха M_{k-1} перед k-м скачком отношение f_k/f_{k-1} любой газодинамической переменной f за скачком (f_k) и до него (f_{k-1}) однозначно выражается через его интенсивность. В частности, связь чисел Маха на скачке задается соотношением

$$\frac{\mu(\mathrm{M}_k)}{\mu(\mathrm{M}_{k-1})} = \frac{J_k + \varepsilon}{J_k(1 + \varepsilon J_k)}, \qquad \mu(\mathrm{M}) = (1+\varepsilon)\mathrm{M}^2 - \varepsilon, \qquad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \tag{1.1}$$

Через интенсивность J_k k-го скачка и число Маха M_{k-1} до него однозначно выражается и угол поворота потока β_k на скачке [1]:

$$\beta_k = \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{(1+\varepsilon)\mathrm{M}_{k-1}^2}{J_k + \varepsilon} - 1}\,\frac{(1-\varepsilon)(J_k - 1)}{(1+\varepsilon)\mathrm{M}_{k-1}^2 - (1-\varepsilon)(J_k - 1)}\right]. \tag{1.2}$$

В работах [1–3] показано, что системы S_2 часто оказываются эффективнее одного скачка уплотнения, позволяя увеличить значения газодинамической переменной f за S_2 по сравнению с соответствующими значениями f за одиночным скачком. При этом суммарный угол поворота потока в системе может существенно превышать угол поворота на одиночном скачке. Последнее обстоятельство затрудняет использование таких систем в реальных технических устройствах [4]. Исходя из этого представляется актуальным анализ систем S_2, на угол поворота потока в которых наложено дополнительное геометрическое ограничение

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta_s = \mathrm{const}. \tag{1.3}$$

Целью представленной работы является исследование на оптимальность системы S_2 при ограничении (1.3).

2. Область существования системы S_2. Для существования двухскачковой системы S_2 необходимо, чтобы поток за первым скачком оставался сверхзвуковым. Последнее

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (код проекта 96-2356).

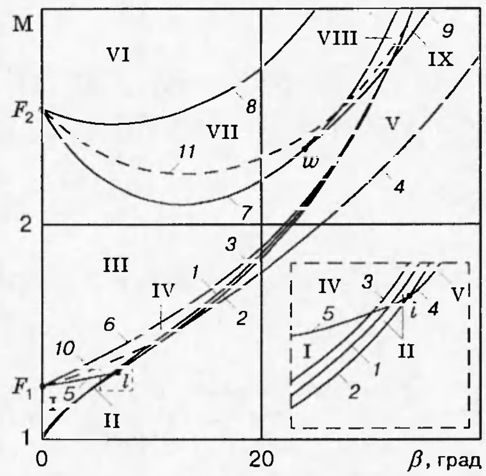

Рис. 1

выполняется, если интенсивность J_1 первого скачка находится в диапазоне $[1, J_*(\mathrm{M})]$. Здесь $\mathrm{M} \equiv \mathrm{M}_0$ — число Маха набегающего потока, а $J_*(\mathrm{M})$ — интенсивность, определяемая из (1.1) при условии $\mathrm{M}_1 = 1$ и равная

$$J_* = \frac{\mu - 1}{2\varepsilon} + \sqrt{\Big(\frac{\mu - 1}{2\varepsilon}\Big)^2 + \mu}. \qquad (2.1)$$

Угол поворота потока на таком скачке рассчитывается по формуле

$$\beta_* = \operatorname{arctg}\Big[\sqrt{\frac{J_* - 1}{1 + \varepsilon J_*}}\,\frac{(1-\varepsilon)(J_* - 1)}{(J_* + \varepsilon) + (J_* - 1)}\Big]. \qquad (2.2)$$

Зависимость $\beta_*(\mathrm{M})$, построенная с использованием формул (2.1) и (2.2), представлена на рис. 1 (кривая *1*) (здесь и далее результаты расчетов приводятся для значений $\gamma = 1{,}4$). При $\mathrm{M} \to \infty$ функция $\beta_*(\mathrm{M})$ монотонно стремится к максимально возможному углу β_a поворота потока на скачке уплотнения

$$\beta_a = \operatorname{arctg} \frac{1 - \varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} \qquad (\beta_a = 45{,}585^\circ). \qquad (2.3)$$

Ограничение (1.3) с учетом (1.1) и (1.2) задает неявную связь между интенсивностями J_1 и J_2 входящих в систему волн. Действительно, задавая J_1 из промежутка $[1, J_*(\mathrm{M})]$, можно из (1.2) определить угол β_1 поворота потока на первом скачке, а затем, пользуясь соотношением (1.3), найти угол β_2 поворота потока на втором скачке.

Известно (см., например, [5]), что существует две различных интенсивности скачка ($J_2^{(a)}$ и $J_2^{(б)}$), поворачивающих поток на один и тот же угол β_2. Величина $J_2^{(a)}$ (интенсивность слабого скачка) лежит в диапазоне $[1, J_l(\mathrm{M}_1)]$, а $J_2^{(б)}$ (интенсивность сильного скачка) находится в пределах $[J_l(\mathrm{M}_1), J_m(\mathrm{M}_1)]$. Величина $J_m(\mathrm{M}_1) = (1+\varepsilon)\mathrm{M}_1^2 - \varepsilon$ определяет интенсивность прямого скачка уплотнения в потоке с M_1, а $J_l(\mathrm{M}_1)$ отвечает скачку, угол $\beta_l(\mathrm{M}_1)$ поворота на котором при заданном значении M_1 достигает максимума. Функции $J_l(\mathrm{M})$ и $\beta_l(\mathrm{M})$ имеют вид [5]

$$J_l = \frac{\mu - (1+\varepsilon)}{2\varepsilon} + \sqrt{\Big(\frac{\mu - (1+\varepsilon)}{2\varepsilon}\Big)^2 + \frac{\mu(1+2\varepsilon) - 1}{\varepsilon}}; \qquad (2.4)$$

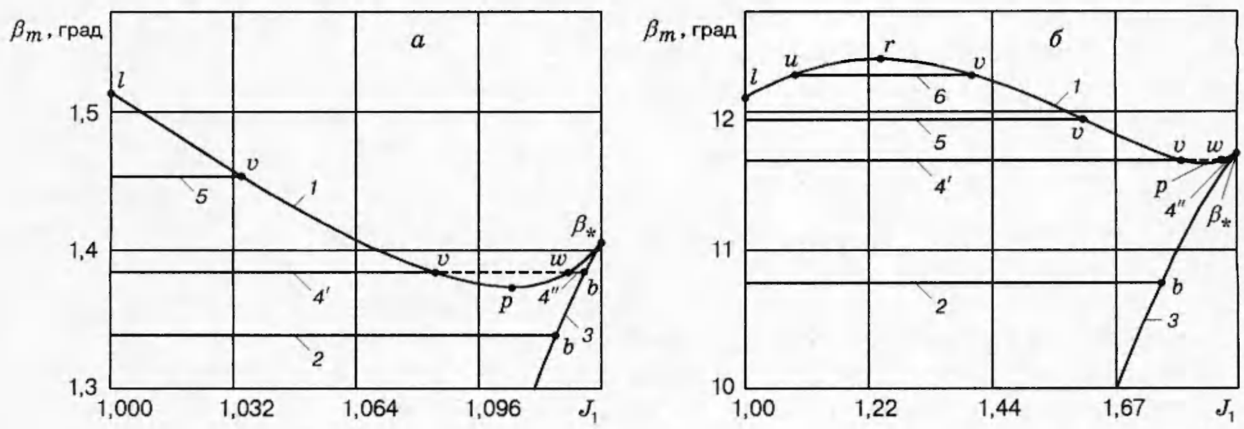

Рис. 2

$$\beta_l = \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{J_l-1}{J_l+\varepsilon}}\,\frac{(1+\varepsilon)+(J_l+\varepsilon)}{1+\varepsilon J_l}\,\frac{(1-\varepsilon)(J_l-1)}{2(J_l+\varepsilon)}\right]. \tag{2.5}$$

График зависимости $\beta_l(\mathrm{M})$ представлен на рис. 1 (кривая *2*). Как и $\beta_*(\mathrm{M})$, функция $\beta_l(\mathrm{M})$ стремится к β_a (2.3) при $\mathrm{M} \to \infty$.

В общем случае второй скачок уплотнения может быть как слабым, так и сильным. В данной работе для определенности будем полагать его слабым ($J_2 = J_2^{(\alpha)}$). Тогда интенсивность J_2 второго скачка, а следовательно, и любая газодинамическая переменная за ним однозначно выражаются через интенсивность J_1 первого скачка.

Условие $J_1 \leqslant J_*(\mathrm{M})$ является необходимым, но не достаточным условием существования системы S_2, поворачивающей поток на заданный угол $\beta_s > 0$. Действительно, максимальный угол поворота потока в S_2 при фиксированном значении J_1 рассчитывается по формуле [6]

$$\beta_m(J_1) = \beta_1(J_1) + \beta_l(\mathrm{M}_1). \tag{2.6}$$

Функция $\beta_m(J_1)$ (кривая *1* на рис. 2) определена на интервале $[1, J_*(\mathrm{M})]$. На левой границе указанного интервала ($J_1 = 1$) угол $\beta_m(J_1)$ совпадает с максимальным углом $\beta_l(\mathrm{M})$ (2.5) поворота потока на одиночном скачке (точка l на рис. 2). В случае $J_1 \to J_*$ (2.1) число $\mathrm{M}_1 \to 1$, предельный угол поворота на втором скачке $\beta_l(\mathrm{M}_1) \to 0$, поэтому $\beta_m(J_1) \to \beta_*(\mathrm{M})$ (2.2) (точка β_* на рис. 2).

Как доказано в [6], существует два характерных диапазона чисел Маха, разделенных числом

$$\mathrm{M}_l = \frac{(J_g^2-1)+2(J_g+\varepsilon)}{(J_g+\varepsilon)+(1+\varepsilon)}, \quad J_g = \sqrt[3]{1+\sqrt{1-\frac{(1+2\varepsilon)^3}{27}}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{1-\frac{(1+2\varepsilon)^3}{27}}} \tag{2.7}$$

($J_g = 1{,}606$; $\mathrm{M}_l = 1{,}320$), в которых поведение функции $\beta_m(J_1)$ имеет принципиально различный характер. В диапазоне $\mathrm{M} \in [1, \mathrm{M}_l]$ (рис. 2,*а*, $\mathrm{M} = 1{,}1$) функция $\beta_m(J_1) < \beta_l(\mathrm{M})$ для любого $J_1 \in [1, J_*]$ и имеет минимум, равный $\beta_p(\mathrm{M})$, при некотором $J_1 = J_p(\mathrm{M})$ (точка p на рис. 2). В случае $\mathrm{M} \in [\mathrm{M}_l, \infty)$ (рис. 2,*б*, $\mathrm{M} = 1{,}5$) появляется область J_1, в которой $\beta_m(J_1) > \beta_l(\mathrm{M})$. В этой области исследуемая функция достигает максимального значения $\beta_m = \beta_r(\mathrm{M})$ при $J_1 = J_r(\mathrm{M})$ (точка r на рис. 2,*б*). Как следствие, начиная с числа Маха M_l, максимальный угол поворота потока на двух скачках $\beta_r(\mathrm{M})$ превосходит предельный угол поворота потока на одном скачке $\beta_l(\mathrm{M})$.

В соответствии с описанным выше поведением функции $\beta_m(J_1)$ можно выделить четыре типа области существования системы S_2.

1. В случае $\beta_s < \beta_p(\mathrm{M})$ диапазон изменения J_1 представляет собой отрезок $[1, J_b]$ (прямая *2* на рис. 2), где $J_b(\beta_s)$ — интенсивность одиночного слабого скачка уплотнения, поворачивающего поток на заданный угол β_s (кривая *3* на рис. 2). Действительно, для любого значения J_1 из этого интервала максимальный угол поворота потока на двух скачках $\beta_m(J_1)$ (2.6) превосходит заданное значение β_s и система S_2 способна развернуть поток на угол β_s. Если $J_1 > J_b$, то угол поворота потока на первом скачке уплотнения оказывается больше β_s и для поворота потока на заданный угол замыкающий скачок уплотнения должен поменять направление, что невозможно в данной постановке задачи.

2. Если $\beta_s \in [\beta_p(\mathrm{M}), \beta_*(\mathrm{M})]$, то, как видно на рис. 2, прямая *4*, содержащая отрезки $4'$ и $4''$, пересекается с кривой *1* в точках v и w (соответствующие этим точкам интенсивности J_v и J_w первого скачка определяются как корни уравнения $\beta_m(J_1) = \beta_s$). В области $[J_v, J_w]$ (штриховая часть прямой *4*) система S_2 развернуть поток на угол β_s не может. Следовательно, при таких β_s область существования S_2 разбивается на две подобласти: $[1, J_v]$ и $[J_w, J_b]$ (отрезки $4'$ и $4''$ на рис. 2).

3. Для значений β_s из диапазона $[\beta_*(\mathrm{M}), \beta_l(\mathrm{M})]$ подобласть $[J_w, J_v]$ исчезает и система S_2 определена в интервале $J_1 \in [1, J_v]$ (отрезок *5* на рис. 2).

4. В том случае, когда $\mathrm{M} < \mathrm{M}_l$, система S_2 при $\beta_s > \beta_l(\mathrm{M})$ существовать не может. Если же $\mathrm{M} > \mathrm{M}_l$, то для углов $\beta_s \in [\beta_l(\mathrm{M}), \beta_r(\mathrm{M})]$ имеется диапазон $J_1 \in [J_u, J_v]$ (отрезок *6* на рис. 2,*б*), в котором система из двух скачков способна развернуть поток на угол β_s.

Зависимости $\beta_p(\mathrm{M})$ и $\beta_r(\mathrm{M})$, определяющие минимальные и максимальные значения функции $\beta_m(J_1)$, получены в работе [6] (кривые *3* и *4* на рис. 1). Как показано на рис. 1, кривые *1* и *3*, соответствующие функциям $\beta_*(\mathrm{M})$ и $\beta_p(\mathrm{M})$, практически совпадают при всех значениях M. Кривая *4*, отвечающая функции $\beta_r(\mathrm{M})$ и исходящая из точки l на кривой *2*, напротив, довольно быстро отходит от кривой *2*: уже при $\mathrm{M} = 2$ максимальный угол поворота потока на двух скачках уплотнения превосходит предельный угол поворота потока на одном скачке на 12 %.

3. Поведение статического давления в системе. В качестве примера рассмотрим поведение статического давления за S_2. Как показано в п. **2**, ограничение (1.3) позволяет по заданному значению J_1 однозначно определить интенсивность J_2 второго скачка. Следовательно, безразмерное статическое давление $J_s = p_2/p = J_1 J_2$ за S_2 (интенсивность системы) является функцией единственной переменной J_1.

На рис. 3 приведена качественная картина поведения функции $J_s(J_1)$ в S_2. В зависимости от значений входных параметров (числа M и угла β_s) на плоскости (β_s, M) (см. рис. 1) можно выделить девять характерных областей, в которых поведение исследуемой функции принципиально различно.

В областях I, III, IV, VI, VII (см. рис. 1), непосредственно примыкающих к оси ординат, угол $\beta_s < \beta_p(\mathrm{M})$, следовательно, функция $J_s(J_1)$ определена на всем промежутке $[1, J_b]$, где J_b — интенсивность одиночного скачка, поворачивающего поток на заданный угол β_s. На концах этого промежутка функция принимает одинаковые значения, равные J_b: при $J_1 = 1$ интенсивность $J_2 = J_s = J_b$; при $J_1 = J_b$ величина $J_2 = 1$, и поэтому $J_s = J_b$.

Вид функции внутри промежутка $[1, J_b]$ существенно зависит от числа Маха набегающего потока (сплошные линии на рис. 3). При малых M (область I на рис. 1, ограниченная кривыми *3* и *5*) функция $J_s(J_1)$ на $(1, J_b)$ имеет единственный экстремум (максимум) при некотором $J_1 = J^{(1)}(\mathrm{M}, \beta_s)$ (рис. 3,*а*). С увеличением M точка максимума смещается к правой границе интервала $(1, J_b)$. Переход в область IV, заключенную между кривыми *3*, *5* и *6* (см. рис. 1), сопровождается появлением точки минимума $J_1 = J^{(2)}(\mathrm{M}, \beta_s)$ на левом конце указанного диапазона (рис. 3,*б*), а переход в область III, ограниченную кривыми *6* и

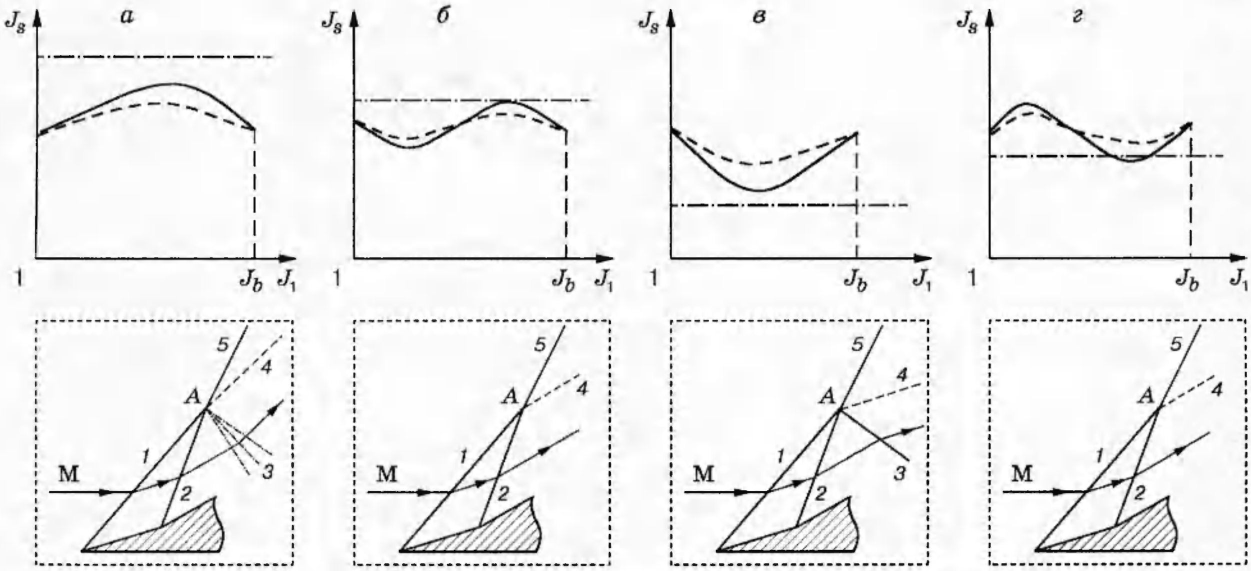

Рис. 3

7 (см. рис. 1), — исчезновением точки максимума $J^{(1)}(\mathrm{M}, \beta_s)$ (рис. 3,*в*). Дальнейшее увеличение параметра M приводит к практически полному повторению характера изменения функции $J_s(J_1)$: с приближением к области VII, находящейся между кривыми *7* и *8* (см. рис. 1), минимум смещается вправо, переход в область VII приводит к появлению точки $J^{(1)}(\mathrm{M}, \beta_s)$ максимума на левой границе диапазона $[1, J_b]$ (рис. 3,*г*), а переход в область VI, расположенную над кривой *8* (см. рис. 1), - к исчезновению точки $J^{(2)}(\mathrm{M}, \beta_s)$ минимума исследуемой функции. При больших числах Маха интенсивность системы на $(1, J_b)$ вновь имеет единственный экстремум — максимум (рис. 3,*а*).

Как показано в п. **2**, увеличение параметра β_s приводит к усложнению вида области определения функции $J_s(J_1)$. Как следствие усложняется и характер ее поведения. Так, с приближением к правой границе области I (кривая *3* на рис. 1) точка максимума $J^{(1)}(\mathrm{M}, \beta_s)$ стремится к точке $J_p(\mathrm{M})$ минимума функции $\beta_m(J_1)$. При $\beta_s = \beta_p(\mathrm{M})$ (т. е. на кривой *3*) эти интенсивности совпадают, а в случае $\beta_s > \beta_p(\mathrm{M})$ точка максимума попадает в область $[J_v(\mathrm{M}), J_w(\mathrm{M})]$ отсутствия решений. Последнее обстоятельство приводит к тому, что в области II, границами которой служат кривые *2* и *3*, интенсивность системы монотонна на каждом из поддиапазонов своего существования. Аналогичная картина наблюдается при переходе из области IV в область II.

При $\mathrm{M} > \mathrm{M}_l$ (2.7) появляется дополнительная область существования исследуемой функции (область V на рис. 1, ограниченная кривыми *2* и *4*). Вид функции $J_s(J_1)$ в этой области качественно не отличается от ее поведения в области II между кривыми *1* и *2*.

Увеличение параметра β_s при больших M приводит к появлению дополнительной области VIII (см. рис. 1) трех экстремумов функции $J_s(J_1)$, берущей начало из точки w и ограниченной кривыми *7* и *9*. Для точек области III, лежащих правее w, переход в область VII двух экстремумов сопровождается появлением точки перегиба функции на нижней границе области VIII, которая с увеличением M распадается на две точки экстремума (максимум и минимум). Дальнейший рост M приводит к смещению левого минимума к нижней границе диапазона $[1, J_b]$ и его последующему исчезновению на границе с областью VII.

Как показано на рис. 1, при достаточно больших M область VIII пересекается с областями IV, II и V. Пересечение областей VIII и IV приводит к возникновению дополнительной области IX четырех экстремумов, ограниченной кривыми *3* и *6*. Пересечение областей VIII и II сопровождается исчезновением правого максимума аналогично тому, как это происходило при малых M, а пересечение областей V и VIII — исчезновением правого поддиапазона существования функции $J_s(J_1)$.

Таким образом, на плоскости (β_s, M) существует несколько характерных областей, в которых поведение статического давления за системой S_2 имеет принципиально различный характер. Целью п. **4** является нахождение границ этих областей, а также интенсивностей, при которых функция J_s достигает экстремума.

4. Особые интенсивности и числа Маха. Экстремальные значения функции $J_s(J_1)$, а также границы характерных областей можно найти с помощью метода неопределенных коэффициентов Лагранжа. Функция Лагранжа

$$L = J_s + \lambda(\beta_1 + \beta_2 - \beta_s) \tag{4.1}$$

при фиксированных M и β_s зависит от трех переменных: интенсивностей волн J_1 и J_2 и множителя Лагранжа λ.

Дифференцируя (4.1) по J_1, J_2 и λ и исключая множитель Лагранжа λ, несложно получить систему из двух уравнений, одно из которых есть уравнение связи (1.3), а второе имеет вид

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\Lambda_1} + \frac{\partial\beta_2}{\partial\Lambda_1} - \frac{\partial\beta_2}{\partial\Lambda_2} = 0. \tag{4.2}$$

Как следует из проведенного в п. **3** анализа, зависимости $\beta_{\varphi_1}(\mathrm{M})$ и $\beta_{\varphi_2}(\mathrm{M})$, описывающие кривые *5* и *7* на рис. 1, определяются из уравнений (1.3) и (4.2) при $J_1 \to 1$. Для случая $J_1 \to 1$ зависимость (4.2) сводится к кубическому уравнению относительно M^2

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{3} A_n(\mathrm{M}^2)^n = 0, \qquad A_3 = J_2^2(1+\varepsilon)^2 - 4\varepsilon(J_2+\varepsilon)^2,\\ A_2 = 4\varepsilon(1-\varepsilon)(J_2+\varepsilon)(J_2^2-1) - 2(1-\varepsilon^2)J_2^2(J_2-1) - 4(1-2\varepsilon)(J_2+\varepsilon)^2,\\ A_1 = (1-\varepsilon)[4(1-2\varepsilon)(J_2^2-1)(J_2+\varepsilon) + 4(J_2+\varepsilon)^2 + (1-\varepsilon)J_2^2(J_2-1)^2],\\ A_0 = -4(1-\varepsilon)^2(J_2+\varepsilon)(J_2^2-1).\end{gathered} \tag{4.3}$$

Подставляя больший (J_{φ_2}) и средний (J_{φ_1}) корни (4.3) в уравнение (1.3), которое в случае $J_1 \to 1$ принимает вид $\beta_{\varphi_i} = \beta_2(\mathrm{M}(J_{\varphi_i}), J_{\varphi_i})$ (i = 1, 2), можно получить искомые зависимости $\beta_{\varphi_1}(\mathrm{M})$ и $\beta_{\varphi_2}(\mathrm{M})$.

Как показано на рис. 1, кривые *5* и *7* исходят из точек F_i, расположенных на оси ординат. Подстановка в (4.3) значения $J_2 = 1$ приводит к формулам

$$\mathrm{M}_{F_i} = \sqrt{\frac{2}{5-3\gamma}[(3-\gamma) \mp \sqrt{\gamma^2-1}]} \qquad (i = 1,\ 2), \tag{4.4}$$

определяющим характерные числа M_{F_i}.

С ростом M кривая *7* стремится к максимальному углу β_a поворота потока на скачке уплотнения (2.3). В отличие от кривой *7* кривая *5* оканчивается в точке l на кривой *2*. Можно доказать, что соответствующее этой точке число Маха M_l рассчитывается по формуле (2.7).

Из проведенных в п. **3** рассуждений следует, что для получения зависимостей $\beta_{f_1}(\mathrm{M})$ и $\beta_{f_2}(\mathrm{M})$, описывающих кривые *6* и *8* на рис. 1, в уравнениях (1.3) и (4.2) нужно перейти к пределу при $J_2 \to 1$. В этом случае из (4.2) следуют явные аналитические выражения, связывающие числа M_{f_i} с интенсивностью J_1 первого скачка:

$$\mu_{f_i} = 1 + \varepsilon(\mathrm{M}_{f_i}^2 - 1) = A(B \pm C) \quad (i = 1,\, 2), \qquad A = \frac{1 + \varepsilon J_1}{(1+\varepsilon)(J_1(1-3\varepsilon) - 4\varepsilon^2)},$$
$$B = J_1(1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2) - 2\varepsilon^2, \qquad C = 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon J_1)(J_1+\varepsilon)}. \tag{4.5}$$

Подставляя полученные значения M_{f_i} в соотношение (1.3), сводящееся в случае $J_2 \to 1$ к виду $\beta_{f_i} = \beta_1(\mathrm{M}_{f_i}(J_1), J_1)$ $(i = 1,\, 2)$, можно получить аналитические описания кривых *6* и *8*.

Кривые *6* и *8*, так же как кривые *5* и *7*, исходят из точек с координатами $(0, \mathrm{M}_{F_i})$ (4.4). Зависимость $\beta_{f_1}(\mathrm{M})$ при $\mathrm{M} \to \infty$ стремится к величине β_a (2.3), а функция $\beta_{f_2}(\mathrm{M})$ с ростом M асимптотически приближается к значению

$$\beta_c = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(1+\varepsilon)(1-3\varepsilon)}}{2\sqrt{\varepsilon}} \qquad (\beta_c = 43{,}100^\circ).$$

Для описания кривой *9* на рис. 1 необходимо исследовать на экстремум неявную функцию $\mathrm{M}(J_1)$, задаваемую уравнениями (1.3) и (4.2). Как показывают расчеты, минимум данной функции соответствует появлению двух дополнительных экстремумов функции $J_s(J_1)$.

Записывая для $\mathrm{M}(J_1)$ функцию Лагранжа

$$\Phi = \mathrm{M} + \lambda_1(\beta_1 + \beta_2 - \beta_s) + \lambda_2\Big(\frac{\partial\beta_1}{\partial\Lambda_1} + \frac{\partial\beta_2}{\partial\Lambda_1} - \frac{\partial\beta_2}{\partial\Lambda_2}\Big),$$

дифференцируя ее по переменным J_1, J_2, λ_1 и λ_2 и исключая множители Лагранжа λ_i $(i = 1,\, 2)$, несложно получить систему из трех уравнений

$$\Psi = \frac{\partial\beta_1}{\partial\Lambda_1} + \frac{\partial\beta_2}{\partial\Lambda_1} - \frac{\partial\beta_2}{\partial\Lambda_2} = 0, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\Lambda_1} - \frac{\partial\Psi}{\partial\Lambda_2} = 0, \qquad \beta_w = \beta_1 + \beta_2,$$

первые два из которых позволяют по заданному значению параметра J_1 найти значения M и J_2. Третье уравнение служит для определения угла β_w поворота потока в системе из двух скачков уплотнения с интенсивностями J_1 и $J_2(J_1)$. Меняя значение интенсивности J_1 от единицы до бесконечности, можно построить зависимость $\beta_w(\mathrm{M})$ (кривая *9* на рис. 1). Точка w начала кривой *9* находится из системы при $J_1 \to 1$ ($\mathrm{M}_w = 2{,}282$, $\beta_w = 22{,}563^\circ$).

5. Связь двухскачковой системы с волной сжатия. Для объяснения немонотонного поведения статического давления в системе S_2 сопоставим характер поведения функции $J_s(J_1)$ со значениями интенсивностей J_b и J_c скачка уплотнения и простой волны сжатия Прандтля — Майера соответственно, поворачивающих невозмущенный поток на заданный угол β_s.

На рис. 3 для различных значений M построены штрихпунктирные прямые, соответствующие интенсивностям J_c волны сжатия, поворачивающей поток на угол β_s. На рис. 1 пунктирными линиями отмечены полученные в [7] значения параметров β_s и M, для которых $J_c = J_b$ (кривые *10* и *11*). Как доказано в [7], эти кривые исходят из точек F_i (4.4) и располагаются внутри областей IV и VII. В точках, принадлежащих этим областям и не лежащих на кривых *10* и *11*, интенсивности $J_c \neq J_b$ (см. рис. 3,*б*,*г*), однако близки по величине. По мере удаления от кривых *10* и *11* разность между ними увеличивается. В области III интенсивность J_c много меньше (рис. 3,*в*), а в областях I и VI много больше (рис. 3,*а*) величины J_b.

Как сказано выше, в случае $\beta_s \leqslant \beta_p(\mathrm{M})$ (т. е. в точках, принадлежащих областям I, III, IV, VI и VII) функция $J_s(J_1)$ на концах диапазона $[1, J_b]$ совпадает с величиной J_b. В области III интенсивность системы превосходит значение J_b при всех $J_1 \in (1, J_b)$ (рис. 3,*в*) и имеет максимум, величина которого стремится к интенсивности J_c волны сжатия. В областях I и VI функция $J_s(J_1)$ также имеет единственный экстремум (минимум) на $(1, J_b)$, величина которого по-прежнему стремится к J_c (рис. 3,*а*). Наконец, в областях IV и VII, где значения J_c и J_b отличаются мало, интенсивность $J_s(J_1)$ системы колеблется около своего «положения равновесия» — интенсивности J_b.

Проведенные рассуждения показывают, что рассматриваемая в работе система из двух скачков уплотнения является своеобразной моделью волны сжатия. Статическое давление за S_2, совпадающее на концах диапазона $[1, J_b]$ со статическим давлением за одиночным скачком, внутри этого диапазона стремится к величине давления за простой волной, поворачивающей поток на такой же угол β_s. При этом количество экстремумов функции $J_s(J_1)$, а также их тип определяются знаком и величиной разности между J_c и J_b.

6. Физический смысл отраженного разрыва в задаче о взаимодействии догоняющих скачков уплотнения. При регулярном взаимодействии догоняющих скачков уплотнения *1* и *2* (рис. 3) возникают исходящие результирующий скачок *5* и отраженный разрыв *3*, а также расположенный между ними тангенциальный разрыв *4* [8]. Отраженный разрыв может быть как волной разрежения (рис. 3,*а*), так и скачком уплотнения (рис. 3,*в*). В частном случае он является слабым разрывом (рис. 3,*б*,*г*), а возникающая при этом структура называется тройной конфигурацией ударных волн. Интенсивности исходящего *5* и отраженного *3* разрывов находятся из условий равенства статических давлений и углов поворота потока по обе стороны тангенциального разрыва *4*, т. е. из решения системы

$$J_1 J_2 J_3 = J_5, \qquad \beta_1 + \beta_2 \pm \beta_3 = \beta_5.$$

Здесь J_i $(i = 1, 2, 3, 5)$ — интенсивности соответствующих разрывов, а β_i — углы поворота потока на них. Знак «плюс» перед β_3 отвечает отраженной волне разрежения, а «минус» — скачку уплотнения.

Сравнение статического давления за скачком уплотнения, волной сжатия и системой S_2 с ограничением (1.3), проведенное в п. **5**, позволяет дать простое объяснение возникновению отраженного разрыва в точке взаимодействия догоняющих скачков уплотнения.

Вначале рассмотрим случай, когда интенсивность волны сжатия много больше интенсивности скачка уплотнения, поворачивающего поток на тот же угол (области I и VI на рис. 1). Как показано в п. **5**, статическое давление за системой из двух догоняющих скачков в этом случае превосходит статическое давление на одном скачке. При взаимодействии таких скачков должна возникнуть центрированная волна разрежения (рис. 3,*а*), выравнивающая статическое давление на тангенциальном разрыве *4*. Такая волна, во-первых, понижает статическое давление за S_2, а во-вторых, доворачивает поток на угол, больший, чем $\beta_s = \beta_1 + \beta_2$, увеличивая тем самым угол β_5 поворота потока на исходящем из точки взаимодействия A скачке *5* и повышая статическое давление за ним.

Обратная картина наблюдается при $J_b \gg J_c$ (область III на рис. 1). В этом случае при одинаковом угле поворота статическое давление за одним скачком превышает давление за системой S_2 из двух скачков. Возникающий при взаимодействии входящих в S_2 скачков отраженный разрыв *3* должен быть скачком уплотнения (рис. 3,*в*). С одной стороны, он повышает статическое давление за S_2, а с другой — снижает статическое давление за скачком *5* за счет уменьшения угла β_5 поворота потока на нем по сравнению с углом β_s поворота потока в системе S_2.

Наконец, в ситуации, когда $J_b \approx J_c$ (области IV и VII на рис. 1), функция $J_s(J_1)$ может быть как больше, так и меньше J_b (рис. 3,*б*,*г*). В первом случае отраженный разрыв является волной разрежения, во втором — скачком уплотнения. В обоих случаях его интенсивность близка к единице. Точное равенство $J_3 = 1$ достигается при некотором J_1 из интервала $(1, J_b)$ и соответствует тройной конфигурации ударных волн (рис. 3,*б*).

Границы $\beta_{\varphi_i}(\mathrm{M})$ и $\beta_{f_i}(\mathrm{M})$ областей IV и VII (формулы (4.3) и (4.5)) являются границами областей существования тройных конфигураций [9, 10].

Таким образом, переход из области I, где $J_c > J_b$, в область III, где выполняется обратное неравенство, приводит к смене типа не только экстремума функции $J_s(J_1)$ в системе S_2, но и отраженного разрыва при взаимодействии догоняющих скачков уплотнения, а также к появлению области IV существования тройных конфигураций. Аналогично изменение знака разности $J_c - J_b$ на противоположный при переходе из области III в область VI сопровождается как появлением второй области существования тройных конфигураций (области VII), так и переходом от взаимодействия с отраженным скачком уплотнения к взаимодействию с отраженной центрированной волной разрежения.

7. Дополнительные замечания. 1. В п. **6** связь задачи о взаимодействии догоняющих скачков уплотнения с задачей расчета системы S_2 при наличии ограничения (1.3) продемонстрирована для случая, когда точка с координатами (β_s, M) принадлежит областям, непосредственно примыкающим к оси ординат. Как отмечалось ранее, увеличение параметра β_s приводит к усложнению как области определения функции $J_s(J_1)$, так и характера ее поведения. Увеличение β_s в задаче о догоняющих скачках сопровождается переходом от регулярного взаимодействия к нерегулярному, а также появлением областей отсутствия решения рассматриваемой задачи [5]. При этом границы нерегулярного взаимодействия скачков, а также областей отсутствия решения совпадают с границами характерных областей, построенных на рис. 1 при анализе оптимальной для статического давления системы. Следовательно, связь рассматриваемых задач имеет место при любых значениях параметров M и β_s.

2. Учет взаимодействия входящих в S_2 скачков в областях I, III, IV, VI и VII не приводит к качественному изменению поведения статического давления за системой. Это следует из рис. 3,*а–г*, на которых пунктирными линиями нанесены значения функции $J_s' = J_1 J_2 J_3$, представляющей безразмерное статическое давление за отраженным разрывом *3*. Как показано на рис. 3, отраженный разрыв снижает амплитуду колебаний функции $J_s(J_1)$ около своего «положения равновесия» — интенсивности J_b, т. е. играет в системе S_2 демпфирующую роль. Однако он не меняет фазы этих колебаний, а следовательно, оставляет неизменными как границы немонотонного поведения функции $J_s'(J_1)$, так и количество ее экстремумов.

3. В работах [11, 12] найдены границы немонотонного поведения функции $J_s(J_1)$ в системах S_2, состоящих из последовательно расположенных скачка уплотнения и волны разрежения [11], а также волны разрежения и скачка уплотнения [12]. Основным их отличием от системы, рассматриваемой в данной работе, является то, что параметр β_s в них может быть как положительным, так и отрицательным. В случае, когда $\beta_s > 0$, границы немонотонного поведения $J_s(J_1)$ в системах с волной разрежения совпадают с границами немонотонного поведения статического давления в двухскачковой системе, т. е. описываются функциями $\beta_{\varphi_i}(\mathrm{M})$ (4.3) и $\beta_{f_i}(\mathrm{M})$ (4.5). В п. **6** установлено, что эти функции одновременно служат границами областей смены типа отраженного разрыва в задаче о взаимодействии догоняющих скачков уплотнения. Можно предположить, что и в задачах о взаимодействии скачка уплотнения с волной разрежения границы немонотонного поведения функции $J_s(J_1)$ играют ту же роль, т. е. являются границами областей смены типа отраженного разрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Омельченко А. В., Усков В. Н.** Оптимальные ударно-волновые системы // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 6. С. 118–126.

2. **Петров Г. И.** Аэромеханика больших скоростей и космические исследования. М.: Наука, 1992.
3. **Герман Р.** Сверхзвуковые входные диффузоры. М.: Физматгиз, 1960.
4. **Абрамович Г. Н.** Прикладная газовая динамика: В 2 ч. М.: Наука, 1991. Ч. 1.
5. **Адрианов А. Л., Старых А. Л., Усков В. Н.** Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука, 1995.
6. **Омельченко А. В., Усков В. Н.** Максимальные углы поворота сверхзвукового потока в ударно-волновых системах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 3. С. 148–156.
7. **Омельченко А. В., Усков В. Н.** Распад центрированной волны сжатия Прандтля — Майера в стационарном потоке газа // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 3. С. 59–68.
8. **Росляков Г. С.** Взаимодействие плоских скачков одного направления // Численные методы в газовой динамике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. С. 28–51.
9. **Вюст В.** К теории разветвленных скачков уплотнения // Газовая динамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. С. 131–143.
10. **Веккен Ф.** Предельные положения вилкообразных скачков уплотнения // Механика. 1950. № 4. С. 24–34.
11. **Омельченко А. В., Усков В. Н.** Оптимальные ударно-волновые системы при ограничениях на суммарный угол поворота потока // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 4. С. 142–150.
12. **Омельченко А. В., Усков В. Н.** Экстремальная система волна разрежения — скачок уплотнения в стационарном потоке газа // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 40–47.

Поступила в редакцию 3/VI 1997 г.