

УДК 532.59:539.3:534.1

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Методом Винера — Хопфа построено аналитическое решение задачи о колебаниях упругой полубесконечной плавающей пластины под действием периодической внешней нагрузки. Без учета осадки решение получено в явном виде. Численно исследованы зависимости амплитуд поверхностных волн и прогиба ледяной пластины от частоты и характера нагрузки, толщины льда и глубины жидкости. Установлено, что при некоторых видах действующей нагрузки волны в пластине и жидкости не распространяются, а колебания пластины представляют собой стоячие волны, локализованные вблизи области приложения нагрузки. Приведен пример таких колебаний и найдено условие, при котором реализуются локализованные колебания.

Ключевые слова: поверхностные волны, изгибно-гравитационные волны, упругая тонкая пластина, метод Винера — Хопфа, локализованные колебания.

В настоящее время задача о гидроупругом поведении пластины, плавающей на поверхности жидкости, представляет интерес в связи с проектированием плавучих платформ различного назначения: искусственных островов, аэродромов, космодромов и др. Гигантские размеры таких объектов затрудняют выполнение критериев подобия при экспериментальных исследованиях, поэтому большую роль в изучении этих объектов играет численное моделирование.

Задача дифракции поверхностных волн на плавающей упругой пластине достаточно хорошо изучена. Подробно исследована также динамика бесконечной плавающей пластины под действием внешней нагрузки с помощью интегральных преобразований (см., например, [1–3]). Однако поведение плавающей упругой конечной пластины под действием динамической нагрузки изучено недостаточно. Численные решения таких задач в плоской и трехмерной постановках построены с использованием разложения по нормальным модам, методов Галеркина или Рэлея — Ритца [4–7]. В настоящей работе строится аналитическое решение данной задачи для полубесконечной пластины методом Винера — Хопфа.

1. Постановка задачи. Будем предполагать, что жидкость идеальная несжимаемая глубины H_0 , а ее течение безвихревое. Рассматривается пластина постоянной толщины h , колебания которой вызваны периодическим по времени внешним давлением, приложенным к поверхности пластины. Задача решается в плоской постановке. Край пластины принимается за начало декартовой системы координат Oxy . Пластина покрывает поверхность жидкости при $x > 0$, остальная часть поверхности жидкости свободна. Будем предполагать, что толщина пластины значительно меньше длины распространяющихся в пластине волн. Используется модель тонких пластин.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00739) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-902.2003.1).

Потенциал скоростей жидкости φ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям вида

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 & (-H_0 < y < 0), \\ \varphi_y &= 0 & (y = -H_0), \quad \varphi_y = w_t & (y = 0), \\ D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= p + q(x) e^{-i\omega t} & (y = 0, \quad x > 0), \\ p &= -\rho(\varphi_t + gw), \quad \varphi_t + gw = 0 & (y = 0, \quad x < 0). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь w — вертикальное смещение верхней поверхности жидкости (пластины); p — гидродинамическое давление; $q(x)$ — интенсивность внешней нагрузки; g — ускорение свободного падения; D — цилиндрическая жесткость пластины; ρ, ρ_0 — плотности жидкости и пластины; t — время. На краю пластины момент и перерезывающая сила должны быть равны нулю:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (y = 0, \quad x = 0). \quad (1.2)$$

Рассмотрим сначала случай сосредоточенной нагрузки: $q(x) = q_0 \delta(x - x_0)$. Зависимость всех функций от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$. Введем характерную длину $l = g/\omega^2$ и безразмерные переменные

$$x' = x/l, \quad y' = y/l, \quad \varphi' = \varphi \omega \rho / q_0, \quad w' = w \rho g / q_0, \quad t' = \omega t.$$

Далее штрихи будем опускать. Потенциал представим в виде $\varphi = \phi e^{-it}$. Тогда из (1.1), (1.2) получим краевую задачу для ϕ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 0 & (-H < y < 0); \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 & (y = -H); \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \phi = 0 \quad (y = 0, \quad x < 0); \quad (1.4)$$

$$\left(\beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 - \delta \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} - \phi = -i\delta(x - x_*) \quad (y = 0, \quad x > 0); \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (y = 0, \quad x = 0); \quad (1.6)$$

$$H = H_0/l, \quad \beta = D/(\rho g l^4), \quad x_* = x_0/l, \quad \delta = \rho_0 h/(\rho l).$$

Безразмерные параметры задачи: глубина жидкости H , точка приложения внешней нагрузки x_* , приведенные жесткость β и погонная масса пластины δ . Кроме того, должны выполняться условия излучения при $|x| \rightarrow \infty$ и условия регулярности вблизи кромок (локальная ограниченность энергии).

2. Интегральные уравнения. Решение задачи будем строить методом Винера — Хопфа в интерпретации Джонса [8]. Введем функции комплексной переменной α

$$\begin{aligned} \Phi_+(\alpha, y) &= \int_0^\infty e^{i\alpha x} \phi(x, y) dx, & \Phi_-(\alpha, y) &= \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} \phi(x, y) dx, \\ \Phi(\alpha, y) &= \Phi_-(\alpha, y) + \Phi_+(\alpha, y). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Функция $\Phi_+(\alpha, y)$ определена в верхней полуплоскости $\text{Im } \alpha > 0$, а функция $\Phi_-(\alpha, y)$ — в нижней полуплоскости $\text{Im } \alpha < 0$. С помощью аналитического продолжения эти функции можно определить во всей комплексной плоскости. Функция $\Phi(\alpha, y)$ представляет собой образ Фурье для функции $\phi(x, y)$ и удовлетворяет уравнению $\partial^2 \Phi / \partial y^2 - \alpha^2 \Phi = 0$. Общее решение этого уравнения с условием на дне (1.3) имеет вид

$$\Phi(\alpha, y) = C(\alpha) \text{ch}(\alpha(y + H)) / \text{ch}(\alpha H). \quad (2.2)$$

Рассмотрим дисперсионные соотношения для поверхностных и изгибно-гравитационных волн в жидкости конечной глубины. Периодические решения уравнения Лапласа с условием на дне (1.3) имеют вид $e^{i\alpha x} \text{ch}(\alpha(y + H)) / \text{ch}(\alpha H)$. Для поверхностных волн значения α должны удовлетворять дисперсионному соотношению

$$K_1(\alpha) \equiv \alpha \text{th}(\alpha H) - 1 = 0,$$

которое имеет два действительных корня $\pm \gamma$ и счетное множество чисто мнимых корней $\pm \gamma_n$ ($n = 1, 2, \dots$), расположенных симметрично относительно действительной оси [9]; $\gamma_n \rightarrow i n \pi / H$ при $n \rightarrow \infty$.

Для волн, распространяющихся в жидкости под пластиной (изгибно-гравитационных волн), получаем дисперсионное соотношение

$$K_2(\alpha) \equiv (\beta \alpha^4 + 1 - \delta) \alpha \text{th}(\alpha H) - 1 = 0,$$

которое имеет два действительных корня $\pm \alpha_0$, счетное множество чисто мнимых корней $\pm \alpha_n$ ($n = 1, 2, \dots$), симметричных относительно действительной оси, а также четыре комплексных корня, симметричных относительно действительной и мнимой осей [9]. Обозначим через α_{-1} корень, лежащий в первом квадранте, через α_{-2} — корень во втором квадранте; $\alpha_n \rightarrow i n \pi / H$ при $n \rightarrow \infty$.

Дисперсионные функции $K_1(\alpha)$, $K_2(\alpha)$ четные. Действительные корни дисперсионных соотношений определяют распространяющиеся волны, остальные корни определяют краевые волны, экспоненциально затухающие вдали от кромки пластины.

Исследуем поведение функций $\Phi_{\pm}(\alpha, y)$. При $x \rightarrow -\infty$ потенциал представляет собой волну вида $R e^{-i\gamma x}$ и множество экспоненциально затухающих волн. Наименее затухающая волна соответствует корню γ_1 . Поэтому $\Phi_-(\alpha, y)$ аналитична в полуплоскости $\text{Im } \alpha < |\gamma_1|$, за исключением полюса при $\alpha = -\gamma$. При $x \rightarrow \infty$ потенциал φ_1 представляет собой проходящую волну вида $T e^{i\alpha_0 x}$ и множество экспоненциально затухающих мод. Поэтому функция $\Phi_+(\alpha, y)$ аналитична в полуплоскости $\text{Im } \alpha > -c$, за исключением полюса в точке $\alpha = \alpha_0$, где $c = \min \{|\alpha_1|, \text{Im}(\alpha_{-1})\}$.

Обозначим через $D_{\pm}(\alpha)$ интегралы типа (2.1), где функция ϕ под интегралом заменяется левой частью краевого условия (1.4), а через $F_{\pm}(\alpha)$ — аналогичные выражения, в которых в качестве подынтегральной функции берется левая часть выражения (1.5). Введем функции

$$D(\alpha) = D_-(\alpha) + D_+(\alpha), \quad F(\alpha) = F_-(\alpha) + F_+(\alpha).$$

Функции $D(\alpha)$ и $F(\alpha)$ представляют собой образы Фурье дисперсионных функций, которые имеют смысл обобщенных функций [10]. Для них выполняются соотношения

$$D(\alpha) = C(\alpha) K_1(\alpha), \quad F(\alpha) = C(\alpha) K_2(\alpha).$$

Из краевых условий (1.4), (1.5) имеем

$$\begin{aligned} D_-(\alpha) &= 0, & D_+(\alpha) &= C(\alpha) K_1(\alpha), \\ F_+(\alpha) &= -i e^{i\alpha x_*}, & F_-(\alpha) - i e^{i\alpha x_*} &= C(\alpha) K_2(\alpha). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Исключая $C(\alpha)$, получаем уравнение

$$(F_-(\alpha) - i e^{i\alpha x_*})K(\alpha) = D_+(\alpha), \quad K(\alpha) = K_1(\alpha)/K_2(\alpha). \quad (2.4)$$

В соответствии с методом Винера — Хопфа необходимо факторизовать функцию $K(\alpha)$, т. е. представить ее в виде

$$K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha),$$

где функции $K_{\pm}(\alpha)$ регулярны в тех же областях, что и функции $\Phi_{\pm}(\alpha, y)$. Функция $K(\alpha)$ имеет соответственно нули и полюса на действительной оси в точках $\pm\gamma$ и $\pm\alpha_0$. Поэтому будем рассматривать области аналитичности S_+ и S_- (S_+ — полуплоскость $\text{Im } \alpha > -c$ с разрезами, исключаяющими точки α_0 и γ ; S_- — полуплоскость $\text{Im } \alpha < |\gamma_1|$ с разрезами, исключаяющими точки $-\alpha_0$ и $-\gamma$).

Введем функцию

$$g(\alpha) = K(\alpha)\beta(\alpha^2 - \alpha_0^2)(\alpha^2 - \alpha_{-1}^2)(\alpha^2 - \alpha_{-2}^2)/(\alpha^2 - \gamma^2).$$

Функция $g(\alpha)$ на действительной оси не имеет нулей, ограничена и стремится на бесконечности к единице. Факторизуем $g(\alpha)$ следующим образом [8]:

$$g(\alpha) = g_+(\alpha)g_-(\alpha), \quad g_{\pm}(\alpha) = \exp\left[\pm\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{\ln g(x)}{x - \alpha} dx\right], \quad \sigma < |\gamma_1|, c.$$

Определим функции $K_{\pm}(\alpha)$:

$$K_{\pm}(\alpha) = \frac{(\alpha \pm \gamma)g_{\pm}(\alpha)}{\sqrt{\beta(\alpha \pm \alpha_0)(\alpha \pm \alpha_{-1})(\alpha \pm \alpha_{-2})}}.$$

При этом $K_+(\alpha) = K_-(-\alpha)$.

Используя представление

$$e^{i\alpha x_*} K_-(\alpha) = L_+(\alpha) + L_-(\alpha),$$

$$L_{\pm}(\alpha) = \pm\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{e^{i\zeta x_*} K_-(\zeta) d\zeta}{\zeta - \alpha}, \quad \sigma < |\gamma_1|, c, \quad (2.5)$$

уравнение (2.4) запишем в виде

$$K_-(\alpha)F_-(\alpha) - iL_-(\alpha) = D_+(\alpha)/K_+(\alpha) + iL_+(\alpha).$$

В левой части этого равенства имеем функцию, аналитическую в области S_- , в правой — функцию, аналитическую в S_+ . Аналитическим продолжением их можно определить функцию, аналитическую во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля эта функция является полиномом. Степень полинома определяется поведением функций при $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Из условия локальной ограниченности энергии следует, что вблизи кромки пластины скорости имеют особенность не выше $O(r^{-\lambda})$ ($\lambda < 1$; r — расстояние до кромки пластины). Тогда функция $F_-(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ имеет порядок не выше $O(|\alpha|^{\lambda+3})$, а $D_+(\alpha)$ — не выше $O(|\alpha|^{\lambda-1})$ [10]. Функции $K_{\pm}(\alpha)$ имеют на бесконечности порядок $O(|\alpha|^{-2})$, так как $g^{\pm}(\alpha) \rightarrow 1$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Легко показать, что $|L_{\pm}(\alpha)| = O(|\alpha|^{-1})$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Следовательно, степень полинома равна единице и

$$D_+(\alpha)/K_+(\alpha) + iL_+(\alpha) = i(a + b\alpha),$$

где a, b — неизвестные константы, которые будем определять из условий (1.6).

Выражая из последнего уравнения $D_+(\alpha)$, с учетом (2.2), (2.3) находим

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x} \operatorname{ch}(\alpha(y+H)) K_+(\alpha)}{\operatorname{ch}(\alpha H) K_1(\alpha)} (a + b\alpha - L_+(\alpha)) d\alpha. \quad (2.6)$$

Контур интегрирования должен быть выбран таким образом, чтобы он полностью лежал в пересечении областей S_+ и S_- . Можно выбрать контур интегрирования на действительной оси, обходя точки α_0, γ снизу, а точки $-\alpha_0, -\gamma$ сверху.

Рассмотрим случай $x > 0$. Интеграл будем вычислять с помощью теории вычетов. Выражение (2.6) запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x} \operatorname{ch}(\alpha(y+H))}{K_-(\alpha) K_2(\alpha) \operatorname{ch}(\alpha H)} (a + b\alpha + L_-(\alpha)) d\alpha + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha(x-x^*)} \operatorname{ch}(\alpha(y+H))}{K_2(\alpha) \operatorname{ch}(\alpha H)} d\alpha. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для первого интеграла контур интегрирования замыкаем в нижней полуплоскости, для второго — в верхней полуплоскости. При $x > 0$ получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) = \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j x} \alpha_j \operatorname{th}(\alpha_j H)}{K_-(-\alpha_j) K_2'(-\alpha_j)} (a - b\alpha_j + L_-(-\alpha_j)) + \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j |x-x^*|} \alpha_j \operatorname{th}(\alpha_j H)}{K_2'(\alpha_j)}. \quad (2.8)$$

Из дисперсионного соотношения, которое имеет место в области под пластиной, находим

$$\alpha_j \operatorname{th}(\alpha_j H) = -K_1(\alpha_j) / (\beta \alpha_j^4 - \delta).$$

Подставляя это выражение в формулу (2.8) и затем в краевые условия (1.6), получим систему линейных алгебраических уравнений второго порядка для определения неизвестных a, b

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Согласно теореме о вычетах коэффициенты системы можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sum_{k=1}^4 \operatorname{res}_{z_k} \left(\frac{\alpha^2 K_+(\alpha)}{\beta \alpha^4 - \delta} \right), & A_{12} &= A_{21}, \\ A_{21} &= \sum_{k=1}^4 \operatorname{res}_{z_k} \left(\frac{\alpha^3 K_+(\alpha)}{\beta \alpha^4 - \delta} \right), & A_{22} &= \sum_{k=1}^4 \operatorname{res}_{z_k} \left(\frac{\alpha^4 K_+(\alpha)}{\beta \alpha^4 - \delta} \right), \\ C_1 &= -\sum_{k=1}^4 \operatorname{res}_{z_k} \left(\frac{\alpha^2 K_+(\alpha) L_-(\alpha)}{\beta \alpha^4 - \delta} \right), & C_2 &= -\sum_{k=1}^4 \operatorname{res}_{z_k} \left(\frac{\alpha^3 K_+(\alpha) L_-(\alpha)}{\beta \alpha^4 - \delta} \right), \end{aligned}$$

где z_k — корни полинома $\beta \alpha^4 - \delta = 0$. Из (2.5) находим

$$L_-(\alpha) = -\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j x^*} K_1(\alpha_j)}{K_2'(\alpha_j) K_+(\alpha_j) (\alpha_j - \alpha)}.$$

Коэффициенты системы преобразуются:

$$A_{11} = \sum_{k=1}^4 \frac{K_+(z_k)}{z_k}, \quad A_{12} = A_{21} = \sum_{k=1}^4 K_+(z_k), \quad A_{22} = \sum_{k=1}^4 z_k K_+(z_k),$$

$$C_1 = - \sum_{k=1}^4 \frac{K_+(z_k)L_-(z_k)}{z_k}, \quad C_2 = - \sum_{k=1}^4 K_+(z_k)L_-(z_k).$$

Определив из системы (2.9) коэффициенты a , b , подставим их в формулы (2.6), (2.7) и найдем все необходимые величины. Для амплитуды возвышения свободной границы на бесконечности η_∞ получаем

$$\eta_\infty = \left| \frac{K_+(\gamma)}{K_1'(\gamma)} [(a + b\gamma - L_+(\gamma))] \right|. \quad (2.10)$$

Амплитуда прогиба пластины определяется из (1.1) соотношением $|w(x)| = |\varphi_y(x, 0)|$ и выражением (2.8). Второй член в выражении (2.8) представляет собой волны, идущие от точки приложения нагрузки, и совпадает с прогибом бесконечной пластины, а первый член в (2.8) — волны, отраженные от края. Амплитуда прогиба пластины на бесконечности вычисляется по формуле

$$w_\infty = \frac{\alpha_0 \operatorname{th}(\alpha_0 H)}{K_2'(\alpha_0)} \left| e^{-i\alpha_j x_*} - \frac{a - b\alpha_0 + L_-(\alpha_0)}{K_+(\alpha_0)} \right|.$$

3. Решение без учета осадки. Согласно сделанным предположениям $\delta \ll 1$, поэтому в уравнении (1.5) параметром δ можно пренебречь. При $\delta \rightarrow 0$ имеем

$$A_{11} = K_+'(0), \quad A_{12} = A_{21} = K_+(0), \quad A_{22} = 0,$$

$$C_1 = -(K_+(0)L_-(0))', \quad C_2 = -K_+(0)L_-(0).$$

Тогда получим

$$a = -L_-(0) = \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j x_*} K_1(\alpha_j)}{K_2'(\alpha_j)K_+(\alpha_j)\alpha_j}, \quad b = -L_-'(0) = \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j x_*} K_1(\alpha_j)}{K_2'(\alpha_j)K_+(\alpha_j)\alpha_j^2}.$$

Подставляя коэффициенты a и b в (2.10), с учетом соотношения

$$|K_+(\gamma)| = \sqrt{\frac{2\gamma(\gamma - \alpha_0)|K_1'(\gamma)|}{(\gamma + \alpha_0)|K_2(\gamma)|}}$$

получим

$$\eta_\infty = \sqrt{\frac{2\gamma(\gamma - \alpha_0)}{(\gamma + \alpha_0)\beta K_1'(\gamma)}} \left| \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j x_*} K_1(\alpha_j)}{K_2'(\alpha_j)K_+(\alpha_j)\alpha_j^2(\alpha_j - \gamma)} \right|.$$

Из (2.8) находим

$$w(x) = i \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j \operatorname{th}(\alpha_j H)}{K_2'(\alpha_j)} \left[e^{i\alpha_j |x-x_*|} + \frac{\alpha_j^2 e^{i\alpha_j x}}{K_+(\alpha_j)} \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_n x_*} K_1(\alpha_n)}{K_2'(\alpha_n)K_+(\alpha_n)\alpha_n^2(\alpha_n + \alpha_j)} \right].$$

Рассмотрим далее случай распределенной нагрузки. Пусть на пластину действует внешнее периодическое по времени давление интенсивности $q(x)$, $x \in [x_1, x_2]$. В этом случае, умножая полученное решение на $q(x_*)$ и интегрируя по x_* , находим

$$\eta_\infty = \sqrt{\frac{2\gamma(\gamma - \alpha_0)}{(\gamma + \alpha_0)\beta K_1'(\gamma)}} \left| \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{A_j K_1(\alpha_j)}{K_2'(\alpha_j)K_+(\alpha_j)\alpha_j^2(\alpha_j - \gamma)} \right|,$$

$$w(x) = i \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j \operatorname{th}(\alpha_j H)}{K_2'(\alpha_j)} \left[B_j(x) + \frac{\alpha_j^2 e^{i\alpha_j x}}{K_+(\alpha_j)} \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{A_n K_1(\alpha_n)}{K_2'(\alpha_n) K_+(\alpha_n) \alpha_n^2 (\alpha_n + \alpha_j)} \right],$$

$$B_j(x) = \int_{x_1}^{x_2} e^{i\alpha_j |x-x_*|} q(x_*) dx_*, \quad A_j = \int_{x_1}^{x_2} e^{i\alpha_j x_*} q(x_*) dx_*,$$

$$w_{\infty} = \frac{\alpha_0 \operatorname{th}(\alpha_0 H)}{K_2'(\alpha_0)} \left| \bar{A}_0 + \frac{\alpha_0^2}{K_+(\alpha_0)} \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{A_n K_1(\alpha_n)}{K_2'(\alpha_n) K_+(\alpha_n) \alpha_n^2 (\alpha_n + \alpha_0)} \right|$$

(черта обозначает комплексное сопряжение).

4. Численные результаты. Проведены расчеты для полубесконечной ледяной пластины в океане при следующих параметрах: $E = 6 \cdot 10^9$ Н/м², $\rho = 1025$ кг/м³, $\rho_0 = 922,5$ кг/м³. Зависимость внешней нагрузки на пластину от x принималась в виде

$$q(x) = \begin{cases} q_0 [1 - (x - x_0)^2/d^2], & |x - x_0| < d, \\ 0, & |x - x_0| > d, \end{cases}$$

где d — полуширина области давления; x_0 — центр приложения нагрузки. В этом случае

$$A_j = \frac{4}{\alpha_j^2 d} \left[\frac{\sin(\alpha_j d)}{\alpha_j d} - \cos(\alpha_j d) \right].$$

Толщина пластины, глубина жидкости, а также частота, центр и площадь приложения нагрузки менялись.

Расчеты показали, что каждый из указанных выше параметров является существенным в данной задаче. На рис. 1 представлены точное (сплошные кривые) и приближенное (штриховые кривые) решения при $H_0 = 100$ м, $x_0 = 20$ м, $d = 2$ м, $h = 5$ м. Кривые 1 соответствуют амплитуде возвышения свободной поверхности на бесконечности η_{∞} , кривые 2 — амплитуде прогиба пластины на кромке $|w(0)|$, кривые 3 — амплитуде в центре приложения нагрузки $|w(x_0)|$, кривые 4 — амплитуде уходящей волны в пластине w_{∞} . Из рис. 1 следует, что параметр δ оказывает более существенное влияние на амплитуду возвышения свободной поверхности при больших частотах, чем на амплитуду прогиба пластины. Амплитуды колебаний пластины малы при высокочастотных внешних воздействиях. Приближенное решение, полученное в явном виде, может быть использовано для оценки прогиба пластины.

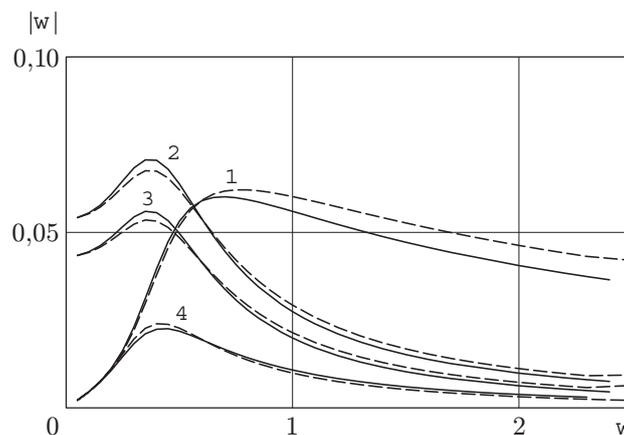


Рис. 1

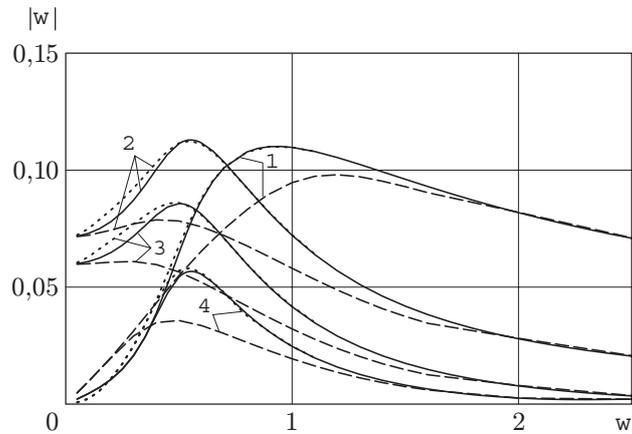


Рис. 2

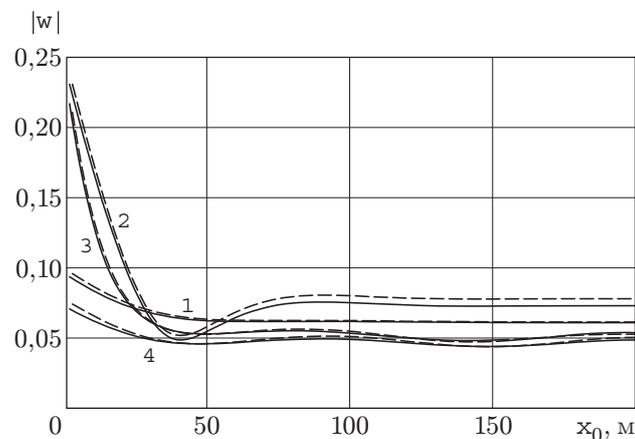


Рис. 3

Влияние глубины жидкости на амплитуды колебаний существенно в области малых глубин и частот. С увеличением глубины решение достаточно быстро достигает асимптотики бесконечно глубокой жидкости, и далее изменение глубины мало влияет на решение. Влияние глубины жидкости на амплитуду колебаний оказывается более значительным для толстых пластин. На рис. 2 приведены зависимости от частоты амплитуды возвышения свободной поверхности на бесконечности (кривые 1), прогиба пластины на кромке (кривые 2), прогиба пластины в центре приложения нагрузки (кривые 3), а также зависимость от частоты амплитуды уходящей волны в пластине на бесконечности (кривые 4) при $h = 1,5$ м, $x_0 = 20$ м, $d = 2$ м. Сплошные кривые соответствуют глубине $H_0 = 100$ м, штриховые — $H_0 = 20$ м, пунктирные — $H_0 = 1000$ м. Для глубин $H_0 = 100, 1000$ м различие кривых небольшое и наблюдается только в области малых частот. На рис. 1, 2 видно, что амплитуды колебаний свободной поверхности и пластины немонотонно зависят от частоты. На некоторой частоте амплитуды достигают максимума и затем с увеличением частоты уменьшаются. Значение частоты, соответствующей максимальной амплитуде, зависит от всех параметров задачи. Во всех расчетах оно не превышало 1 с^{-1} .

Максимальные амплитуды прогиба пластины наблюдаются или в точке максимальной нагрузки, или на кромке пластины. Изменение положения центра приложения нагрузки на пластине может изменить их соотношение. Амплитуды деформаций пластины максимальны в центре приложения нагрузки. На рис. 3 приведена зависимость амплитуд колебаний жидкости и пластины от положения центра приложения нагрузки при $\omega = 0,5 \text{ с}^{-1}$, $h = 1,5$ м, $d = 2$ м, $H_0 = 100$ м. Обозначения кривых те же, что на рис. 1, 2. Сплош-

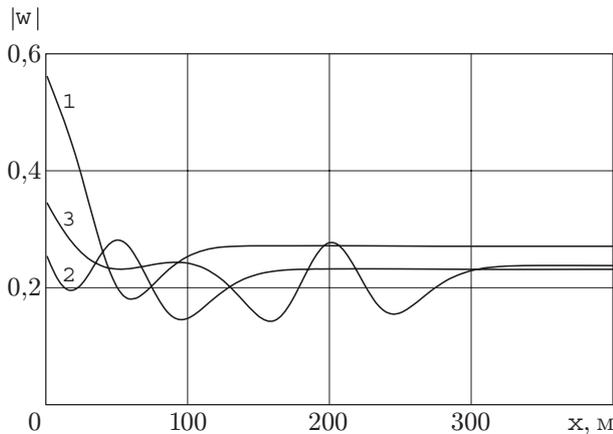


Рис. 4

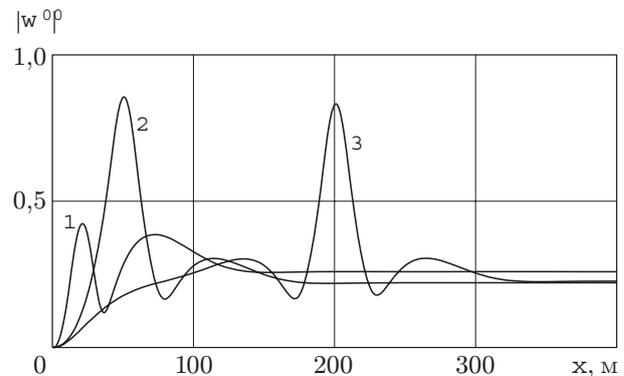


Рис. 5

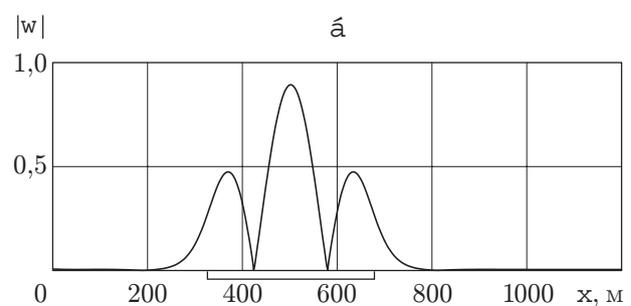
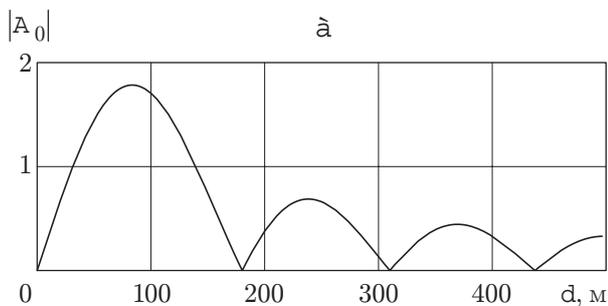


Рис. 6

ные кривые соответствуют полному решению, штриховые — решению без учета осадки. Видно, что при больших расстояниях от кромки амплитуды поверхностных волн η_∞ и кромки пластины $|w(0)|$ стабилизируются, а амплитуды прогиба в центре приложения нагрузки $|w(x_0)|$ и на бесконечности w_∞ меняются по гармоническому закону. Это следует также из полученных формул.

На рис. 4 представлены амплитуды прогиба пластины, на рис. 5 — безразмерные амплитуды деформаций $|w''(x)|$ при $\omega = 0,5 \text{ с}^{-1}$, $h = 1,5 \text{ м}$, $d = 10 \text{ м}$, $H_0 = 100 \text{ м}$ для различных положений центра нагрузки (кривые 1 — $x_0 = 20 \text{ м}$, кривые 2 — $x_0 = 50 \text{ м}$, кривые 3 — $x_0 = 200 \text{ м}$). С увеличением площади приложения нагрузки амплитуды колебаний жидкости и пластины меняются немонотонно. Уровень колебаний жидкости и пластины в основном определяется величиной $|A_0|$. Действительно, величина $|A_0|$ определяет амплитуду волны, распространяющейся в пластине от области приложения нагрузки, и амплитуды отраженных от края волн. Зависимость $|A_0|$ от площади приложения нагрузки d при $\omega = 0,5 \text{ с}^{-1}$, $h = 1,5 \text{ м}$, $H_0 = 100 \text{ м}$ представлена на рис. 6,а. Пропорционально этой величине меняются амплитуды колебаний свободной поверхности, пластины на бесконечности и на кромке. Если область приложения нагрузки находится достаточно далеко от края, то $|A_j| \ll 1$ при $j \neq 0$. При этом если $A_0 = 0$, то колебания пластины будут такими же, как для бесконечной пластины: стоячие волны сосредоточены вблизи области приложения нагрузки, а остальная часть пластины и жидкость практически не возмущены. На рис. 6,б приведен пример таких колебаний при $\omega = 0,5 \text{ с}^{-1}$, $h = 1,5 \text{ м}$, $d = 180 \text{ м}$, $H_0 = 100 \text{ м}$, $x_0 = 500 \text{ м}$. Если $A_0 \neq 0$, то всегда будут существовать отраженные от края волны. Таким образом, частота и характер распределения интенсивности нагрузки оказывают существенное влияние на амплитуды поверхностных волн и прогиба

пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.
2. **Черкесов Л. В.** Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наук. думка, 1973.
3. **Squire V. A., Hosking R. G., Kerr A. D., et al.** Moving loads on ice plates. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
4. **Meylan M.** The forced vibrations of a thin plate floating on an infinite liquid // J. Sound Vibr. 1997. V. 205, N 5. P. 581–591.
5. **Kim J. W., Ertekin R. C.** An eigenfunction expansion method for predicting hydroelastic behavior of a shallow-draft VLFS // Hydroelasticity in marine technology: Proc. of the 2nd Intern. conf., Fukuoka, Japan, Dec. 1–3, 1998. Fukuoka: Res. Inst. Appl. Mech. Kyushi Univ., 1998. P. 47–59.
6. **Kashivagi M.** Research on hydroelastic responses of VLFS: recent progress and future work // J. Offshore Polar Engng. 2000. V. 10, N 2. P. 17–26.
7. **Стурова И. В.** Воздействие периодических поверхностных давлений на плавающую упругую платформу // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 1. С. 87–94.
8. **Нобл Б.** Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
9. **Fox C., Squire V. A.** Reflection and transmission characteristics at the edge of short fast sea ice // J. Geophys. Res. 1990. V. 95, N C7. P. 11.629–11.639.
10. **Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.** Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.

Поступила в редакцию 18/VIII 2003 г.
