КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ИСПАРЕНИЕ КАПЛИ С ВНУТРЕННИМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Ф. Г. Волков, А. М. Головин

(*Москва*)

Рассматривается задача об испарении или росте капли с равномерно распределенными внутренними источниками тепла с учетом теплообмена с окружающим газом. Предполагается, что числа Рейнольдса $R = ua / \nu$ и Пекле $P_D = ua / D$, $P\chi = ua / \chi$ (a — радиус капли, u — скорость относительного движения, ν, D, χ — коэффициенты кинематической вязкости, диффузии и температуропроводности парогазовой среды) достаточно малы, так что поля концентрации пара и температуры сферически симметричны. Формула Максвелла — Ленгмюра для скорости диффузионного испарения [1] обобщается на случай наличия внутренних источников тепла и переноса энергии, в поглощающей излучение парогазовой среде, причем длина пробега излучения существенно превышает радиус капли. Определена зависимость радиуса от времени.

1. **Уравнение диффузии и скорость испарения.** Поверхность капли $r = a\,(t)$ делит все пространство на две области — внутреннюю и внешнюю. Все величины, относящиеся к внутренней области, обозначаются символами со штрихом, к внешней — без штриха. Величины, относящиеся к границе раздела, снабжены индексом a, к жидкости или ее парам — индексом 1, к газу — индексом 2. Суммарные величины обозначены без индексов. Так полное число молекул n в единице объема $n = n_1 + n_2$. Пусть m — масса молекулы, ρ — плотность, v — радиальная компонента скорости среды. Тогда

$$\rho_1 = m_1 n_1, \qquad \rho_2 = m_2 n_2, \qquad \rho = \rho_1 + \rho_2, \qquad \rho v = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 \tag{1.1}$$

Уравнения непрерывности имеют вид

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\rho_1 v_1 = 0, \qquad \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\rho_2 v_2 = 0 \tag{1.2}$$

Для внутренней области $n_1' \gg n_2'$, а потому $\rho' = \rho_1'$, кроме того, полагая, что $\rho' v' \gg \rho v$, можно не учитывать движение жидкости внутри капли.

В соответствии с теорией Чепмена и Энскога [2] можно написать уравнение диффузии для бинарной смеси при постоянном давлении, в отсутствие внешних сил и без учета термодиффузии

$$v_1 - v_2 = -\frac{n^2 D_0}{n_1 n_2}\frac{d}{dr}\frac{n_1}{n} \tag{1.3}$$

Воспользовавшись граничным условием при $r = a\,(t)$, $v_2 = \dot a$ ($\dot a$ — скорость движения границы раздела фаз), получим следующее выражение для плотности потока пара на поверхности капли:

$$j = \rho_{1a}(v_{1a} - \dot a) = -\left(\frac{\rho_1 n^2 D_0}{n_1 n_2}\frac{d}{dr}\frac{n_1}{n}\right)_a \qquad \left(\dot a = \frac{da}{dt}\right) \tag{1.4}$$

Таким образом для вычисления скорости движения границы раздела фаз, равной

$$\dot a = \frac{1}{\rho'}\left(\frac{\rho_1 n^2 D_0}{n_1 n_2}\frac{d}{dr}\frac{n_1}{n}\right)_a \tag{1.5}$$

требуется решить уравнение диффузии.

Из уравнений непрерывности (1.2) следует:

$$\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 = (\rho_{1a} v_{1a} + \rho_{2a}\dot a)\, a^2 / r^2 \tag{1.6}$$

Далее, исключая v_2 из уравнений (1.3) и (1.6), можно получить

$$\rho v_1 = (\rho_{1a} v_{1a} + \rho_{2a}\dot a)\frac{a^2}{r^2} - \frac{\rho_2 n^2 D_0}{n_1 n_2}\frac{d}{dr}\frac{n_1}{n} \tag{1.7}$$

Если подставить (1.7) в первое из уравнений (1.2), пренебречь членами, содержащими малый параметр ρ / ρ', то уравнение диффузии принимает вид:

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\left[\frac{\rho_1\rho_2 n^2 D_0}{\rho n_1 n_2}\frac{d}{dr}\frac{n_1}{n} + \frac{\rho^2 a^2}{\rho r^2}\left(\frac{\rho_1 n^2 D_0}{n_1 n_2}\frac{d}{dr}\frac{n_1}{n}\right)_a\right] = 0 \tag{1.8}$$

Пусть плотность пара на бесконечности равна ρ_∞, а на поверхности капли совпадает с плотностью насыщенного пара ρ_a при температуре поверхности T_a. Полагая, что

$|\rho_a - \rho_\infty| \ll \rho_a$ можно в уравнении (1.8) ограничиться учетом только членов первого порядка малости по параметру $(\rho_a - \rho_\infty) / \rho_\infty$. Кроме того, поскольку уравнение (1.8) получено в пренебрежении эффектами термобародиффузии, n в этом уравнении следует считать не зависящим от r

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) \frac{d\rho_1}{dr} = 0 \tag{1.9}$$

Решение этого уравнения позволяет вычислить плотность потока пара на поверхности капли

$$j = -\frac{\rho D}{\rho_2} \left(\frac{d\rho_1}{dr}\right)_a \qquad \left(D = \frac{m_2 n}{\rho} D_0\right) \tag{1.10}$$

Плотность насыщенного пара ρ_a является известной функцией температуры. В случае небольшого перепада температур эту функцию можно аппроксимировать линейной зависимостью

$$\rho_a = \rho_{s\infty} [1 + \beta (T_a - T_\infty) / T_\infty] \tag{1.11}$$

Перепад температур определяется из решения тепловой задачи.

2. **Уравнение энергии.** Предполагается, что перенос энергии от капли к газу происходит посредством излучения, диффузии и теплопроводности.

Так как по условию задачи длина пробега излучения существенно превышает радиус капли, то можно считать, что излучение не влияет на распределение температуры в окрестности капли.

Очевидно, что поток лучистой энергии в этой окрестности равен

$$S_r = \varepsilon\sigma (T_a^4 - T_\infty^4) a^2 / r^2 \simeq 4\varepsilon\sigma T_\infty^3 (T_a - T_\infty) a^2 / r^2 \tag{2.1}$$

где σ — постоянная Стефана — Больцмана, ε — эффективная степень черноты капли, окруженной парами.

Поток энергии, переносимый диффузией вследствие разности в энтальпиях диффундирующих веществ, как известно [2], равен

$$S_D = {}^5/_2\, kT\, (n_1 v_1 + n_2 v_2 - nv) \tag{2.2}$$

где k — постоянная Больцмана.

Формулы (1.1) и (1.3) позволяют преобразовать (2.2) к виду

$$S_D = \frac{5kT}{2m_1} \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) D \frac{d\rho_1}{dr} \tag{2.3}$$

Подставляя в (2.3) решение уравнения (1.9), получим

$$S_D = \frac{5kT}{2m_1} \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) D (\rho_a - \rho_\infty) \frac{a}{r^2} \tag{2.4}$$

Поток энергии, переносимый теплопроводностью парогазовой смеси с коэффициентом теплопроводности $\varkappa$, равен

$$S_\varkappa = -\varkappa\, dT / dr \tag{2.5}$$

Уравнение переноса энергии в парогазовой смеси при постоянном давлении, без учета членов, связанных со среднемассовым потоком и процессами внутреннего трения имеет вид

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)(S_r + S_D + S_\varkappa) = 0 \tag{2.6}$$

Для решения этого уравнения необходимо знать S_a — полный поток энергии на границе раздела фаз, который можно найти из решения внутренней задачи.

Уравнение переноса энергии для $r < a$ имеет вид

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) \varkappa' \frac{dT}{dr} + q = 0 \tag{2.7}$$

где q — интенсивность внутренних источников тепла, рассчитанная на единицу объема капли.

Поскольку предполагается, что радиус капли существенно превышает длину свободного пробега молекул газа, то можно не рассматривать скачок температуры вблизи поверхности [1]. При заданной температуре поверхности капли T_a и условии $T \neq \infty$ при $r = 0$ легко получить решение уравнения (2.7)

$$T' - T_a' = (qa^2 / 6\varkappa')(1 - r^2 / a^2) \tag{2.8}$$

из которого следует, что тепловой поток на единицу площади поверхности капли, создаваемый внутренними источниками тепла, равен

$$-\varkappa' (dT' / dr)_a = {}^1\!/_3\, qa \tag{2.9}$$

Поток энергии, переносимый излучением, диффузией и теплопроводностью в парогазовой среде определяется при $r = a$ формулой (2.9) за вычетом потока энергии, связанного с фазовым переходом

$$S_a = {}^1\!/_3 qa - Lj \tag{2.10}$$

где L — удельная теплота парообразования.

Из уравнения (2.6) и граничного условия (2.10) следует:

$$-\varkappa \frac{dT}{dr} = \frac{qa^2}{3r^2} - 4\varepsilon\sigma T_\infty^3 (T_a - T_\infty)\frac{a^2}{r^2} - \frac{\gamma a(\rho_a - \rho_\infty)}{r_2}$$
$$\gamma = D\left[\frac{\rho}{\rho_2} L - \frac{5kT_\infty}{2m_1}\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)\right] \tag{2.11}$$

Поскольку разность температур на поверхности капли и на бесконечности предполагается относительно небольшой, то $\varkappa$, D можно считать постоянными, и, кроме того, заменить ρ на ρ_a. Решение уравнения (2.11), описывающее распределение температуры в парогазовой среде, имеет вид

$$\varkappa(T - T_\infty) = \frac{qa^3}{3r} - 4\varepsilon\sigma T_\infty^3 (T_a - T_\infty)\frac{a^2}{r^2} - \frac{\gamma(\rho_a - \rho_\infty) a}{r} \tag{2.12}$$

Таким образом разность температур между поверхностью капли и температурой среды на бесконечности равна

$$T_a - T_\infty = \frac{qa^2 - 3\gamma(\rho_a - \rho_\infty)}{3(\varkappa + 4a\varepsilon\sigma T_\infty^3)} \tag{2.13}$$

3. Изменение радиуса капли со временем. Из формулы (1.11) и (2.13) следует:

$$\rho_a - \rho_\infty = \frac{(4a\varepsilon\sigma T_\infty^3 + \varkappa)(\rho_{s\infty} - \rho_\infty) + \beta\gamma\rho_{s\infty} qa^2 / 3T_\infty}{\varkappa + 4a\varepsilon\sigma T_\infty^3 + \beta\gamma\rho_{s\infty} / T_\infty} \tag{3.1}$$

Таким образом, можно рассчитать плотность потока пара на поверхность капли и получить уравнение, определяющее изменение радиуса капли со временем

$$a\dot{a} = -\frac{\rho D}{\rho_2\rho'}\left[\rho_{s\infty} - \rho_\infty + \beta\rho_{s\infty}\frac{qa^2/3T_\infty - \gamma(\rho_{s\infty} - \rho_\infty)/T_\infty}{\varkappa + 4a\varepsilon\sigma T_\infty^3 + \beta\gamma\rho_{s\infty}/T_\infty}\right] \tag{3.2}$$

Решение этого уравнения весьма громоздко, поэтому целесообразно ограничиться анализом частных случаев.

В начальной стадии испарения достаточно крупной капли, а также в случае, когда плотность пара на бесконечности совпадает с плотностью насыщенного пара, испарение капли происходит по следующему закону

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\rho_{s\infty}\rho\beta q D}{3\rho_2\rho' T_\infty(\varkappa + 4a\varepsilon\sigma T_\infty^3 + \beta\gamma\rho_{s\infty}/T_\infty)} \tag{3.3}$$

Тогда

$$a / a_0 - A \ln(a / a_0) = 1 - t / \tau_0$$
$$A = \frac{\varkappa + \beta\gamma\rho_{s\infty}/T_\infty}{4a_0\varepsilon\sigma T_\infty^3}, \qquad \tau_0 = \frac{12\rho_2\rho' a_0\varepsilon\sigma T_\infty^4}{\rho\rho_{s\infty} q\beta D} \tag{3.4}$$

По мере испарения капли уменьшается влияние внутреннего тепловыделения и переноса излучения с поверхности капли. Для достаточно больших времен испарение будет описываться формулой

$$a\dot{a} = -\frac{\rho D}{\rho_2\rho'}(\rho_{s\infty} - \rho_\infty)\left(1 - \frac{\beta\gamma\rho_{s\infty}/T_\infty}{\varkappa + \beta\gamma\rho_{s\infty}/T_\infty}\right) \quad (3.5)$$

Радиус капли при условии постоянства $\rho_{s\infty}$ и ρ_∞ изменяется со временем следующим образом:

$$(a/a_0)^2 = 1 - t/\tau_\infty$$

$$\tau_\infty = a_0^2\rho_2\rho'(1 + \beta\gamma\rho_{s\infty}/\varkappa T_\infty)/2\rho D(\rho_{s\infty} - \rho_\infty) \quad (3.6)$$

Если плотность пара пренебрежимо мала по сравнению с плотностью газа и перенос тепла излучением и диффузией мал по сравнению с потоком тепла, связанным с фазовым переходом, то (3.6) совпадает с формулой Мейсона [3].

В случае отсутствия внутренних источников тепла и переноса энергии только посредством излучения в прозрачной среде и теплопроводности уравнение (3.2) должно было бы совпадать с уравнением работы [4]. Однако в работе [4] соответствующая формула приведена в явно искаженном виде.

Если радиус капли велик по сравнению с длиной пробега излучения, то приближение лучистой теплопроводности применимо во всем пространстве, занимаемом парогазовой средой. Этот случай можно получить из (3.2), полагая $\varepsilon = 0$, $\varkappa_0 = \varkappa_r + \varkappa_g$

$$a\dot{a} = -\frac{\rho D}{\rho_2\rho'}\left[\rho_{s\infty} - \rho_\infty + \beta\rho_{s\infty}\frac{{}^1/_3 qa^2 - \gamma(\rho_{s\infty} - \rho_\infty)}{\varkappa_0 T_\infty + \beta\gamma\rho_{s\infty}}\right] \quad (3.7)$$

Откуда следует:

$$(a/a_0)^2 = \exp(-t/\tau_1) - (\tau_1/\tau_2)[1 - \exp(-t/\tau_1)]$$

$$\tau_1 = 3\varkappa_0\rho'\rho_2 T_\infty(1 + \beta\gamma\rho_{s\infty}/\varkappa_0)/2\rho\rho_{s\infty}\beta q D \quad (3.8)$$

$$\tau_2 = a_0^2\rho'\rho_2(1 + \beta\gamma\rho_{s\infty}/\varkappa_0)/2\rho(\rho_{s\infty} - \rho_\infty)D$$

Испарение и рост капли происходят за время порядка $\tau_1\tau_2/(\tau_1 + \tau_2)$.

В случае пересыщения $\rho_\infty > \rho_{s\infty}$ рост и испарение капли заканчиваются, как видно из (3.5), при достижении предельного радиуса

$$a = [3\varkappa_0 T_\infty(\rho_\infty - \rho_{s\infty})/\beta q]^{1/2} \quad (3.9)$$

Величина предельного радиуса может быть получена из общей формулы (3.2)

$$a = (6\varepsilon\sigma T_\infty^4/\beta\rho_{s\infty}q)\left[\rho_{s\infty} - \rho_\infty + \sqrt{(\rho_{s\infty} - \rho_\infty)^2 + (\rho_{s\infty} - \rho_\infty)\rho_{s\infty}\varkappa\beta q/12\varepsilon^2\sigma^2 T^7}\right] \quad (3.10)$$

которая при $\varepsilon = 0$ переходит в формулу (3.9).

Авторы благодарят В. Г. Левича за обсуждение результатов работы.

Поступила 13 9 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Н. А. Испарение и рост капель в газообразной среде. Изд-во АН СССР, 1958.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Мейсон Б. Дж. Физика облаков. Л., Гидрометеоиздат, 1961.
4. Нужный В. М., Шиманский Ю. И., Иваницкий Г. К. Некоторые вопросы диффузионной теории испарения капель летучих жидкостей. Коллоидн. ж., 1965, т. 27, № 4.