



**ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАЯТНИКОВЫХ ВОЛН
ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ ПОДЗЕМНОЙ ВЫРАБОТКИ**

Н. И. Александрова

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: nialex@misd.ru,
Красный проспект, 54, г. Новосибирск 630091, Россия*

Численно исследуется распространение поверхностных маятниковых волн при нестационарном воздействии на свободную поверхность полости, находящейся в блочном полупространстве. Предложена математическая модель нестационарного вязкоупругого деформирования блочной среды, основанная на представлении, что динамическое поведение блочной среды может быть приближенно описано как движение жестких блоков за счет податливости прослоек между ними. Для описания вязкоупругого поведения межблочных прослоек используется модель внутреннего трения с коэффициентом добротности материала, как определяющим параметром. Среда моделируется трехмерной решеткой масс, соединенных упругими пружинами и вязкими демпферами в осевых и диагональных направлениях. Проанализировано влияние коэффициента добротности, а также глубины залегания полости в полупространстве на амплитуды скоростей блоков для продольной и релеевской волны.

Блочная среда, волновое движение, полупространство, полость, численное моделирование, вязкоупругое деформирование

**THREE-DIMENSIONAL MODELING OF PENDULUM WAVES PROPAGATION
UNDER DYNAMIC LOADING OF UNDERGROUND EXCAVATION SURFACE**

N. I. Aleksandrova

*Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
E-mails: nialex@misd.ru, Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*

The propagation of surface pendulum waves under nonstationary loading on the free surface of a cavity located in a block half-space is studied numerically. A mathematical model of transient viscoelastic deformation of the block medium is proposed. This model is based on the idea that dynamic behavior of the block medium can be approximately described as the movement of rigid blocks due to the compliance of interlayers between them. To describe the viscoelastic behavior of the interlayers, an internal friction model is used with the merit factor of the material as the determining parameter. The medium is modeled by a three-dimensional lattice of masses connected by elastic springs and viscous dampers in axial and diagonal directions. The influence of the merit factor and the cavity depth on the amplitudes of block velocities on the surface of the half-space is investigated for the longitudinal and Rayleigh waves.

Block medium, wave motion, half-space, cavity, numerical simulation, viscoelastic deformation

Согласно фундаментальной концепции М.А. Садовского [1], массив горных пород представляет собой систему блоков разного масштабного уровня, соединенных между собой прослойками, состоящими из более слабых трещиноватых пород. Наличие прослоек с ослабленными

механическими свойствами приводит к тому, что деформирование блочного горного массива происходит преимущественно за счет их деформирования. Как показали лабораторные эксперименты на физических моделях блочных сред [2–4], высокочастотные волны быстро затухают и основное сейсмическое воздействие оказывают низкочастотные маятниковые волны, обладающие низкой скоростью распространения, большой длиной волны и слабым затуханием. В [4, 5] показано, что представление блоков как массивных жестких тел дает возможность описать низкочастотные волны, возникающие при ударном воздействии. В [5, 6] проведен теоретический анализ влияния блочно-иерархической структуры породного массива на процесс распространения волн и спектральные характеристики возмущений и показано, что простую модель блочной среды можно получить, если считать блоки сосредоточенными массами, соединенными вязкоупругими пружинами. Различные варианты такой модели использованы для описания деформирования блочных сред в [4–9].

В данной работе блочная среда представлена как трехмерная решетка масс, соединенных пружинами и демпферами в осевых и диагональных направлениях координатных плоскостей. Для описания поведения межблочных прослоек используется модель внутреннего трения с коэффициентом добротности Q как определяющим параметром, предложенная в [10].

ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ БЛОЧНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

Продемонстрируем модель блочной среды на примере одномерной цепочки масс. Блоки — жесткие тела массы M . Модель прослоек между ними состоит из двух элементов Максвелла и одного элемента Фойгта, соединенных параллельно [10]. Каждый из этих элементов состоит из пружины и демпфера, причем элементы Максвелла соединены последовательно, а элемент Фойгта — параллельно. Уравнения одномерного движения блоков с данной реологической моделью прослоек имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_j &= K[(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \beta(\dot{u}_{j+1} - 2\dot{u}_j + \dot{u}_{j-1}) - \\ &- \alpha_1\gamma_1(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}) - \alpha_2\gamma_2(\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1})], \quad j = 1, 2, \dots, \\ M\ddot{u}_0 &= K[(u_1 - u_0) + \beta(\dot{u}_1 - \dot{u}_0) - \alpha_1\gamma_1(\psi_1 - \psi_0) - \alpha_2\gamma_2(\varphi_1 - \varphi_0)] + P(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\psi_j = e^{-\gamma_1 t} \int_0^t e^{\gamma_1 \tau} u_j(\tau) d\tau, \quad \varphi_j = e^{-\gamma_2 t} \int_0^t e^{\gamma_2 \tau} u_j(\tau) d\tau,$$

$$\alpha_1 = \frac{k_1}{K}, \quad \alpha_2 = \frac{k_2}{K}, \quad \gamma_1 = \frac{k_1}{\lambda_1}, \quad \gamma_2 = \frac{k_2}{\lambda_2}, \quad \beta = \frac{\lambda}{K}, \quad K = k + k_1 + k_2,$$

где $P(t)$ — действующая нагрузка, приложенная к блоку $j = 0$; u_j — перемещения жестких блоков; k , k_1 , k_2 — жесткости пружин в элементе Фойгта и в двух элементах Максвелла, соответственно; λ , λ_1 , λ_2 — вязкости демпферов в элементе Фойгта и в двух элементах Максвелла. Здесь введены две дополнительные переменные φ_j и ψ_j , зависящие от функции смещения u_j .

Применим преобразование Фурье по времени к уравнениям (1). В частотной области ω сила, действующая на блок со стороны прослойки, может быть выражена формулой:

$$\tilde{P} = K \left[\left(1 - \frac{\alpha_1 \gamma_1^2}{\omega^2 + \gamma_1^2} - \frac{\alpha_2 \gamma_2^2}{\omega^2 + \gamma_2^2} \right) + i\omega \left(\beta + \frac{\alpha_1 \gamma_1}{\omega^2 + \gamma_1^2} + \frac{\alpha_2 \gamma_2}{\omega^2 + \gamma_2^2} \right) \right] \tilde{u}(\omega) = K \tilde{F}(\omega) \tilde{u}(\omega).$$

Внутреннее затухание в среде обычно определяется коэффициентом добротности материала $Q(\omega)$ или его обратной величиной $Q^{-1}(\omega)$, который описывается формулой:

$$Q^{-1}(\omega) = \frac{\text{Im} \tilde{F}(\omega)}{\text{Re} \tilde{F}(\omega)}, \quad (2)$$

где $\text{Re} \tilde{F}(\omega)$, $\text{Im} \tilde{F}(\omega)$ — действительная и мнимая части нормированной функции импеданса $\tilde{F}(\omega)$ [11].

Чтобы связать параметры α_1 , α_2 , γ_1 , γ_2 и β реологической модели с $Q^{-1}(\omega)$ с помощью простых, не зависящих от частоты приближений, введены новые безразмерные параметры:

$$\hat{\alpha}_1 = \alpha_1 Q_0, \quad \hat{\alpha}_2 = \alpha_2 Q_0, \quad \hat{\gamma}_1 = \gamma_1 / \omega_{\max}, \quad \hat{\gamma}_2 = \gamma_2 / \omega_{\max}, \quad \hat{\beta} = \beta \omega_{\max} Q_0, \quad \hat{\omega} = \omega / \omega_{\max},$$

где ω_{\max} — максимальная частота, представляющая интерес для моделирования; Q_0 — заданный целевой коэффициент добротности материала. Переходя в выражении (2) к безразмерным параметрам, можно увидеть, что коэффициенты $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\beta}$ не зависят от ω_{\max} . Отсюда следует, что для заданной постоянной Q_0^{-1} , они должны вычисляться только один раз.

Задача вычисления параметров $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\beta}$ решена с допуском, так чтобы фактический коэффициент добротности оставался бы достаточно близким к целевому значению. Этот допуск, который принимается как 5% от целевого значения, должен выполняться в пределах 4–100% от ω_{\max} , т. е. параметры $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\beta}$ определены для заданного коэффициента добротности Q_0 прямой проверкой на компьютере условия:

$$\left[Q^{-1}(\hat{\omega}, Q_0^{-1}) Q_0 - 1 \right]^2 < 0.05^2 \quad \forall \hat{\omega}: \quad 0.04 \leq \hat{\omega} \leq 1. \quad (3)$$

Параметры, рассчитанные из условия (3) для $Q_0^{-1} = 0.2$, имеют следующие значения: $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = 0.28$, $\hat{\gamma}_1 = 0.026$, $\hat{\gamma}_2 = 0.23$, $\hat{\beta} = 0.14$.

ПОСТАНОВКА ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Исследуется нестационарная пространственная задача об импульсном воздействии на поверхность выработки в блочном полупространстве. Блочная среда моделируется однородной трехмерной решеткой, состоящей из точечных масс, соединенных пружинами и демпферами в направлениях осей x , y , z и в диагональных направлениях плоскостей $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$, как показано на рис. 1а. Здесь использованы обозначения: u , v , w — перемещения в направлениях осей x , y , z ; n , m , k — номера блоков в направлениях x , y , z . Длина пружин в направлениях осей x , y , z одинакова и равна l . Начало координат находится на поверхности полупространства, которому соответствует значение $k = 0$. Полость будем моделировать, как поверхность куба с вершинами, находящимися в точках $A_1(l, l, -h-l)$, $A_2(0, l, -h-l)$, $A_3(0, 0, -h-l)$, $A_4(l, 0, -h-l)$, $A_5(l, l, -h)$, $A_6(0, l, -h)$, $A_7(0, 0, -h)$, $A_8(l, 0, -h)$. Здесь h — расстояние от поверхности блочного полупространства до полости. Будем предполагать, что связи между массами, находящимися в вершинах этого куба, отсутствуют. На рис. 1б эти связи отмечены штриховыми линиями. В вершинах куба приложены силы, равные по величине и направленным от центра симметрии куба, находящегося в точке $O(l/2, l/2, -h-l/2)$. Такое нагружение моделирует воздействие типа “центр расширения”, приложенное к полости в блочной среде. На рис. 1в представлена общая схема постановки задачи.

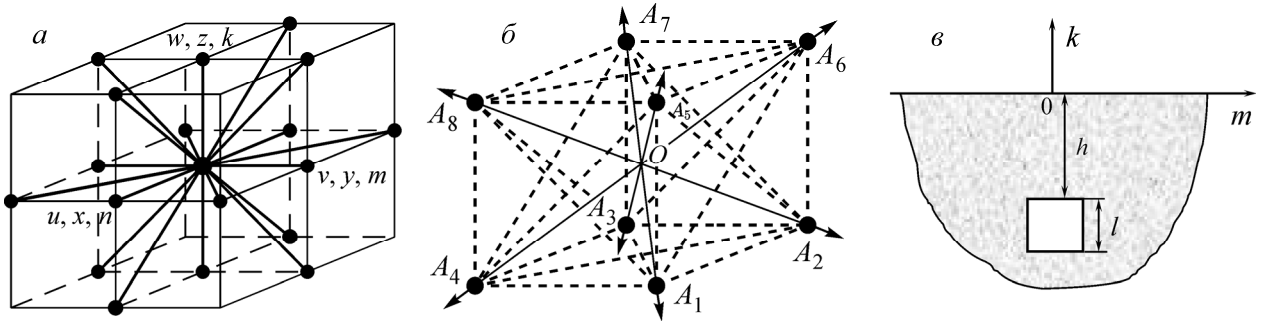


Рис. 1. Схемы: *a* —соединения масс пружинами и демпферами в трехмерной модели блочной среды; *б* — приложения нагрузки; *в* — постановки задачи

В качестве реологической модели прослоек используется модель с двумя элементами Максвелла и одним элементом Фойгта, которая показана на примере одномерной модели. Будем полагать, что жесткости пружин и вязкости демпферов в осевых и диагональных направлениях совпадают. Кроме того, будем полагать, что параметры $M, k, k_1, k_2, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$, имеют одни и те же значения во всех точках среды.

С учетом внутреннего трения и обозначений

$$\begin{aligned}\Lambda_{nn}f_{n,m,k} &= f_{n+1,m,k} - 2f_{n,m,k} + f_{n-1,m,k}, \\ \Phi_{nm}f_{n,m,k} &= (f_{n+1,m+1,k} + f_{n-1,m-1,k} - 4f_{n,m,k} + f_{n+1,m-1,k} + f_{n-1,m+1,k})/2, \\ \Psi_{nm}f_{n,m,k} &= (f_{n+1,m+1,k} + f_{n-1,m-1,k} - f_{n+1,m-1,k} - f_{n-1,m+1,k})/2, \\ \psi_{n,m,k}^u &= e^{-\gamma_1 t} \int_0^t e^{\gamma_1 \tau} u_{n,m,k}(\tau) d\tau, & \varphi_{n,m,k}^u &= e^{-\gamma_2 t} \int_0^t e^{\gamma_2 \tau} u_{n,m,k}(\tau) d\tau, \\ \psi_{n,m,k}^v &= e^{-\gamma_1 t} \int_0^t e^{\gamma_1 \tau} v_{n,m,k}(\tau) d\tau, & \varphi_{n,m,k}^v &= e^{-\gamma_2 t} \int_0^t e^{\gamma_2 \tau} v_{n,m,k}(\tau) d\tau, \\ \psi_{n,m,k}^w &= e^{-\gamma_1 t} \int_0^t e^{\gamma_1 \tau} w_{n,m,k}(\tau) d\tau. & \varphi_{n,m,k}^w &= e^{-\gamma_2 t} \int_0^t e^{\gamma_2 \tau} w_{n,m,k}(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

уравнения движения блока с координатами n, m, k , находящегося внутри полупространства ($k < 0$), имеют вид:

$$\begin{aligned}M\ddot{u}_{n,m,k} &= K\{(\Lambda_{nn} + \Phi_{nk} + \Phi_{nm})u_{n,m,k} + \Psi_{nm}v_{n,m,k} + \Psi_{nk}w_{n,m,k} \\ &+ \beta[(\Lambda_{nn} + \Phi_{nk} + \Phi_{nm})\dot{u}_{n,m,k} + \Psi_{nm}\dot{v}_{n,m,k} + \Psi_{nk}\dot{w}_{n,m,k}] \\ &- \alpha_1\gamma_1[(\Lambda_{nn} + \Phi_{nk} + \Phi_{nm})\psi_{n,m,k}^u + \Psi_{nm}\psi_{n,m,k}^v + \Psi_{nk}\psi_{n,m,k}^w] \\ &- \alpha_2\gamma_2[(\Lambda_{nn} + \Phi_{nk} + \Phi_{nm})\varphi_{n,m,k}^u + \Psi_{nm}\varphi_{n,m,k}^v + \Psi_{nk}\varphi_{n,m,k}^w]\},\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}M\ddot{v}_{n,m,k} &= K\{\Psi_{nm}u_{n,m,k} + (\Lambda_{mm} + \Phi_{mk} + \Phi_{nm})v_{n,m,k} + \Psi_{mk}w_{n,m,k} \\ &+ \beta[\Psi_{nm}\dot{u}_{n,m,k} + (\Lambda_{mm} + \Phi_{mk} + \Phi_{nm})\dot{v}_{n,m,k} + \Psi_{mk}\dot{w}_{n,m,k}] \\ &- \alpha_1\gamma_1[\Psi_{nm}\psi_{n,m,k}^u + (\Lambda_{mm} + \Phi_{mk} + \Phi_{nm})\psi_{n,m,k}^v + \Psi_{mk}\psi_{n,m,k}^w] \\ &- \alpha_2\gamma_2[\Psi_{nm}\varphi_{n,m,k}^u + (\Lambda_{mm} + \Phi_{mk} + \Phi_{nm})\varphi_{n,m,k}^v + \Psi_{mk}\varphi_{n,m,k}^w]\},\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}M\ddot{w}_{n,m,k} &= K\{\Psi_{nk}u_{n,m,k} + \Psi_{mk}v_{n,m,k} + (\Lambda_{kk} + \Phi_{mk} + \Phi_{nk})w_{n,m,k} \\ &+ \beta[\Psi_{nk}\dot{u}_{n,m,k} + \Psi_{mk}\dot{v}_{n,m,k} + (\Lambda_{kk} + \Phi_{mk} + \Phi_{nk})\dot{w}_{n,m,k}] \\ &- \alpha_1\gamma_1[\Psi_{nk}\psi_{n,m,k}^u + \Psi_{mk}\psi_{n,m,k}^v + (\Lambda_{kk} + \Phi_{mk} + \Phi_{nk})\psi_{n,m,k}^w] \\ &- \alpha_2\gamma_2[\Psi_{nk}\varphi_{n,m,k}^u + \Psi_{mk}\varphi_{n,m,k}^v + (\Lambda_{kk} + \Phi_{mk} + \Phi_{nk})\varphi_{n,m,k}^w]\}.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь K — суммарная жесткость пружин (1). Начальные условия для уравнений (4)–(6) нулевые.

Поскольку плоскости $n = 0$, $m = 0$ являются плоскостями симметрии волнового процесса, то на них выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} u_{0,m,k} &= -u_{1,m,k}, & v_{0,m,k} &= v_{1,m,k}, & w_{0,m,k} &= w_{1,m,k}, \\ u_{n,0,k} &= u_{n,1,k}, & v_{n,0,k} &= -v_{n,1,k}, & w_{n,0,k} &= w_{n,1,k}. \end{aligned}$$

Далее, в силу симметрии, будем рассчитывать процесс распространения волн только в области $n \geq 1$, $m \geq 1$. Переменная k меняется в области $k \leq 0$.

Как показано в [9], при отсутствии внутреннего трения ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\beta = 0$) данной модели блочной среды соответствуют следующие скорости продольных c_p и релеевских c_R волн:

$$c_p = l \sqrt{\frac{3K}{M}}, \quad c_R = l \sqrt{\frac{K}{M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}. \quad (7)$$

Масса блоков, длина пружин и суммарная жесткость приняты за единицы: $M = 1$, $l = 1$, $K = 1$. Единицей скорости будет величина $l \sqrt{K/M}$, единицей времени — $\sqrt{M/K}$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

С использованием уравнений (4)–(6) численно решается задача распространения маятниковых волн в трехмерной блочной среде с учетом внутреннего трения при действии на поверхность заглубленной полости нагружения типа “центр расширения”. Исследуется реакция блочной среды на импульс Гаусса: $P(t) = P_0 \exp[-(t - 4\sigma)^2 / (2\sigma^2)]$, где $P(t)\sqrt{3}$ — амплитуда сил, действующих в вершинах куба в момент времени t (рис. 1б).

На рис. 2 представлены в безразмерном виде результаты расчетов зависимости от времени радиальных $\dot{u}_{n,1,0}$ и вертикальных $\dot{w}_{n,1,0}$ скоростей блоков на поверхности полупространства. Параметры задачи имеют следующие значения: $P_0 = 1$, $n = 100$, $\sigma = 5$, $\tau = \pi / 20$. Здесь τ — шаг по времени разностной схемы.

На рис. 2а, б приведены графики, рассчитанные при $h = 10$. Сплошные кривые соответствуют значению $Q_0^{-1} = 0$, штриховые — $Q_0^{-1} = 0.2$, вертикальные линии — моментам времени прихода фронтов продольных и релеевских волн в точку с координатами $(n, 1, 0)$: $t_p = \sqrt{h^2 + n^2} / c_p$, $t_R = h / c_p + n / c_R$, где c_p и c_R определены в (7).

Сравнение расчетов, проведенных с учетом и без учета внутреннего трения показывает, что влияние внутреннего трения приводит к уменьшению амплитуд скоростей блоков и к замедлению скорости распространения волн.

На рис. 2в, г приведены графики, рассчитанные при $Q_0^{-1} = 0.2$ и различных значениях параметра h , характеризующего заглубление полости. Сплошные кривые соответствуют значению $h = 20$, штриховые — $h = 10$ и штрих-пунктирные кривые — $h = 5$.

Анализ рис. 2в, г показывает, что амплитуды радиальных и вертикальных скоростей перемещений блоков на поверхности полупространства в продольной волне практически не зависят от величины заглубления полости h , в то время как в релеевской волне с ростом h амплитуда скоростей блоков заметно уменьшается. Видно, что в зависимости от h и расстояния от места воздействия амплитуды радиальных и вертикальных скоростей блоков в продольной волне могут быть как выше, так и ниже, чем в релеевской волне.

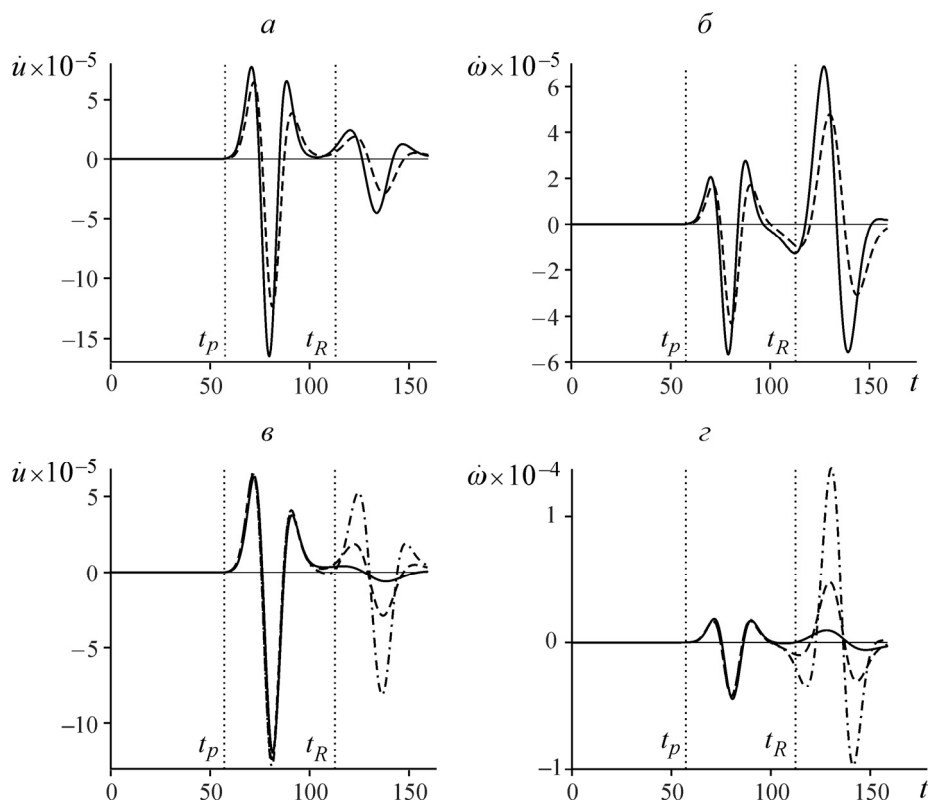


Рис. 2. Зависимости от времени радиальной (*а*, *в*) и вертикальной (*б*, *г*) скорости блоков на поверхности полупространства: *а*, *б* — $h = 10$ и $Q_0^{-1} = 0, 0,2$; *в*, *г* — $Q_0^{-1} = 0,2$ и $h = 5, 10, 20$

ВЫВОДЫ

Предложена трехмерная математическая модель блочной горной породы. Эта модель основана на представлении, что динамическое поведение блочной среды может быть приближенно описано как движение жестких блоков за счет податливости прослоек между ними и что деформацию прослоек можно приближенно описать реологической моделью с двумя элементами Максвелла и одним элементом Фойгта.

С использованием данной модели численно решена задача о нестационарном воздействии типа “центр расширения” на поверхность полости, заглубленной в блочном полупространстве. Показано, что основной вклад в волновой процесс на поверхности блочной среды вносят низкочастотные продольные и релеевские маятниковые волны. В зависимости от величины заглубления полости и расстояния от места воздействия амплитуды радиальных и вертикальных скоростей блоков в продольной волне могут быть как выше, так и ниже, чем в релеевской волне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Sadovskiy M. A.** Natural block size of rock and crystal units, Proceedings of the Academy of Sciences, DAN USSR, 1979, vol. 247, pp. 22–24. [Садовский М. А. Естественная кусковатость горной породы // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 4. — С. 829–832.]
2. **Kurlenya M. V., Oparin V. N., and Vostrikov V. I.** Origination of elastic wave packets in block structured medium under impulse input. Pendulum-type waves U_μ , Proceedings of the Academy of Sciences, 1993, vol. 333, no. 4, pp. 3–13. (in Russian) [Курленя М. В., Опарин В. Н., Востриков В. И. О формировании упругих волновых пакетов при импульсном возбуждении блочных сред. Волны маятникового типа U_μ // Доклады Академии наук. — 1993. — Т. 333. — № 4. — С. 3–13.]

3. **Kurlenya M. V., Oparin V. N., and Vostrikov V. I.** Pendulum-type waves. Part II. Experimental methods and main results of physical modeling, *Journal of Mining Science*, 1996, vol. 32, pp. 245–273. doi:10.1007/BF02046215. [Курленя М. В., Опарин В. Н., Востриков В. И. Волны маятникового типа. Ч. II. Методика экспериментов и основные результаты физического моделирования // ФТПРПИ. — 1996. — № 4. — С. 3–38.]
4. **Aleksandrova N. I. and Sher E. N.** Modeling of wave propagation in block media, *Journal of Mining Science*, 2004, vol. 40, pp. 579–587. doi:10.1007/s10913-005-0045-9. [Александрова Н. И., Шер Е. Н. Моделирование процесса распространения волн в блочных средах // ФТПРПИ. — 2004. — № 6. — С. 49–57.]
5. **Aleksandrova N. I.** Elastic wave propagation in block medium under impulse loading, *Journal of Mining Science*, 2003, vol. 39, no. 6, pp. 556–564. doi:10.1023/B:JOMI.0000036223.58270.42. [Александрова Н.И. О распространении упругих волн в блочной среде при импульсном нагружении // ФТПРПИ. — 2003. — № 6. — С. 38–47.]
6. **Aleksandrova N. I.** The discrete Lamb problem: Elastic lattice waves in a block medium, *Wave Motion*, 2014, vol. 51, pp. 818–832. doi:10.1016/j.wavemoti.2014.02.002.
7. **Alessandrini B. and Raganell V.** The propagation of elastic waves in a discrete medium, *Eur. J. Mech. A Solids*, 1989, vol. 8, no. 2, pp. 129–160.
8. **Jensen J. S.** Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass – spring structures, *J. Sound Vib.*, 2003, vol. 266, pp. 1053–1079. doi:10.1016/S0022-460X(02)01629-2.
9. **Aleksandrova N. I.** Seismic waves in a three-dimensional block medium, *Proc. R. Soc. A*, 2016, vol. 472, no. 2192, Article ID 20160111. doi: 10.1098/rspa.2016.0111.
10. **Bielak J., Karaoglu H., and Taborda R.** Memory-efficient displacement-based internal friction for wave propagation simulation, *Geophysics*, 2011, vol. 76, no. 6, T131-T145. doi: 10.1190/geo2011-0019.1.
11. **Toksöz M., Johnston D.** Seismic wave attenuation: 1980, SEG Tulsa.