УДК 539.3

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Г. Ф. Филатов

(Воронеж)

Вопросам распространения поверхностней сильного разрыва в упругих средах посвящены работы [1-3]. В [1] изучается несжимаемая среда, в [2, 3] рассматривается упругое тело, которое соответствует квазигуковой зависимости между напряжениями и компонентами деформации Альманси. В данной работе для среды с упругим потенциалом, который может быть представлен в виде ряда по основным инвариантам тензора деформаций Альманси, анализируется возможность существования продольных ударных волн. Изучается влияние предварительной деформации. При деформациях сдвига перед поверхностью сильного разрыва установлена возможность распространения чисто поперечной ударной волны. На этой ударной волне термодинамическое условие совместности [2] выполняется тождественно, скорость распространения тангенциальной поверхности сильного разрыва не зависит от модуля волнового вектора.

Предположим, что в упругом пространстве движется со скоростью G поверхность сильного разрыва S. Прямоугольную неподвижную систему отсчета $x_1x_2x_3$ выберем так, чтобы направление оси x_3 совпало с направлением внешней нормали к S. Все соотношения будем считать записанными в этой системе координат.

1. Рассмотрим упругое тело с потенциалом W, который можно представить в виде

$$W = \sum_{l, m, n} A_{lmn} J_1{}^l J_2{}^m J_3{}^n, \qquad A_{lmn} = \text{const} \tag{1.1}$$

$$J_1 = e_{kk}, \quad J_2 = {}^1/_2 (e_{kk}e_{jj} - e_{ij}e_{ij}), \quad J_3 = |e_{ij}|, \quad 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j} \tag{1.2}$$

Здесь u_i — компоненты вектора смещений, e_{ij}— тензор деформаций Альманси, A_{lmn} — упругие модули.

Связь между напряжениями и деформациями имеет вид [4]

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = \rho / \rho_0 \{(W_1 + W_2J_1 + W_3J_2 - 2W_3J_3)\,\delta_{ij} - (2W_1 + W_2 + \\ + 2J_1W_2 + W_3J_1)\,e_{ij} + (2W_2 + W_3)\,e_{ik}k_{kj}\} \\ W_k = \partial W / \partial J_k \quad (k = 1,\,2,\,3), \quad \rho = \rho_0 (1 - 2J_1 + 4J_2 - 8J_3)^{1/2}\end{gathered} \tag{1.3}$$

где ρ, ρ_0 — плотность тела в текущем и начальном состояниях соответственно, W — упругий потенциал.

Пусть S является продольной ударной волной. Тогда геометрические и кинематические условия совместности [5]

$$[u_{i,j}] = \omega_i\delta_{j3}, \qquad [\partial u_i / \partial t] = -G\omega_i \tag{1.4}$$

примут вид

$$[u_{i,j}] = B\mu_{ij}, \quad [\partial u_i / \partial t] = -GB\delta_{i3}, \quad \mu_{ij} = \delta_{i3}\delta_{j3}, \quad B = \omega_3 \tag{1.5}$$

Здесь ω_i — волновой вектор, $|B|$ — интенсивность продольной волны, а $[p] = p^- - p^+$, где p^- и p^+ представляют собой значения p на задней и передней сторонах S соответственно.

Пусть

$$v_i = \partial u_i / \partial t + v_k \partial u_i / \partial x_k, \quad v_i{}^+ = 0, \quad u_{i,j}{}^+ = x\mu_{ij} \tag{1.6}$$

Тогда

$$e_{ij}{}^+ = (x - {}^1/_2 x^2)\,\mu_{ij} = c\mu_{ij} \tag{1.7}$$

На ударной волне кроме соотношений (1.4) должны быть выполнены условия сохранения массы, импульса [5] и неравенство, вытекающее из законов термодинамики [2]

$$[\rho\theta] = 0, \quad [\rho\theta v_i] = -[\sigma_{i3}], \quad \theta = G - v_3 \tag{1.8}$$

$$\rho^+ (\theta^+)^2 [W'] \leqslant [\sigma_{i3}] ({}^1/_2 [\sigma_{i3}] + \sigma_{i3}{}^+) \tag{1.9}$$

где W' — упругий потенциал, отнесенный к единице объема деформированного тела впереди S.

Для продольной ударной волны соотношения (1.8), (1.9) упростятся

$$[\rho\theta] = 0, \quad \rho^+\theta^+ [v_3] = -[\sigma_{33}], \quad \rho^+ = \rho_0 (1 - x) \tag{1.10}$$

$$2(1 - x)(1 - x - B)[W] \leqslant B([\sigma_{33}] + 2\sigma_{33}^+) \tag{1.11}$$

Применяя условия (1.5), из (1.1), (1.2), (1.6), (1.7) найдем

$$\begin{gathered}
[e_{ij}] = (B - Bx - {}^1\!/_2 B^2)\mu_{ij} = a\mu_{ij}, \quad [\rho] = -\rho_0 B \\
[J_1] = a, \quad [J_2] = [J_3] = 0, \quad [J_1{}^k] = (a + c)^k - c^k = \varphi_k = a\psi_k \\
[W] = \sum_{n=2} \alpha_n \varphi_n, \quad [W_1] = \sum_{n=2} n\alpha_n \varphi_{n-1}, \quad [W_2] = \sum_{n=1} \beta_n \varphi_n \\
(1 - x - B)[v_3] = -GB, \quad \alpha_n = A_{n00}, \quad \beta_n = A_{n10}, \quad \alpha_0 = \alpha_1 = 0
\end{gathered} \tag{1.12}$$

Учитывая (1.12), из (1.3) получим

$$[\sigma_{33}] = B\left\{(1 - x - B)(1 - x - {}^1\!/_2 B)\sum_{n=2} n\alpha_n (\psi_{n-1} - 2\psi_n) - (1 - x)^2 \sum_{n=2} n\alpha_n c^{n-1}\right\} \tag{1.13}$$

Подставляя (1.12), (1.13) в соотношения (1.10) и (1.11), можно найти

$$\rho^+ G^2 = (1 - x - B)\sum_{n=2} n\alpha_n \{(1 - x - {}^1\!/_2 B)(1 - x - B)(\psi_{n-1} - 2\psi_n) - (1 - x)^2 c^{n-1}\} \tag{1.14}$$

$$\sum_{n=2} \alpha_n \{(1 - x - B)(1 - x + nB)\varphi_n - {}^1\!/_2 Bn (1 - x - B)\varphi_{n-1} - an (1 - x)^2 c^{n-1}\} \leqslant 0 \tag{1.15}$$

Из (1.14) следует, что скорость продольной ударной волны, распространяющейся в упругом теле при условиях (1.6), определяется лишь упругими модулями α_n. Только эти коэффициенты входят в неравенство (1.15). На значения $[\sigma_{11}]$, $[\sigma_{22}]$ оказывают влияние и постоянные β_n. Все остальные модули упругости A_{ijk} из (1.1) в рассматриваемой задаче никак не выявляются.

Из соотношений (1.14), (1.15), которые должны быть выполнены на ударной волне произвольной интенсивности, для некоторого фиксированного значения B может быть найдено $x = x_*$ такое, что при $x > x_*$ либо не выполняется неравенство (1.15), либо квадрат скорости ударной волны G^2 в (1.14) становится отрицательным числом. Рассмотрим, например, распространение продольных ударных волн сжатия слабой интенсивности в упругом теле с пятиконстантным потенциалом Мурнагана [4] ($\alpha_n = 0$ при $n \geqslant 4$, $|B| \ll x$), если $x \geqslant 0.1$ Так как $\alpha_2 > 0$, то при $\alpha_3 < 0$ найдем, что $x_* = 0.225$, т. е. лишь при $x \leqslant 0.225$ слабые ударные волны могут распространяться в теле. Если $\alpha_3 > 0$, то $x_* = 0.225 + \mu$, где μ зависит от отношения α_3/α_2.

2. Рассмотрим возможность распространения в упругом теле с потенциалом (1.1) поверхности сильного разрыва S, на которой $[J_1] = [J_2] = [J_3] = 0$. Заметим, что некоторые виды статических деформаций, которые возможны в любом несжимаемом упругом теле при условии постоянства инвариантов тензора деформаций, предложены в [6].

Предположим, что $u^+_{1,3} = z$, $u^+_{2,3} = y$, а все остальные $u^+_{ij} = 0$. Используя (1.4) и (1.2), из условия постоянства J_1, J_2, J_3 при переходе через S получим

$$\omega_3 = 0, \quad (\omega_1 + z)^2 + (\omega_2 + y)^2 = z^2 + y^2 \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что конец волнового вектора должен лежать в плоскости (ω_1, ω_2) на окружности радиуса $(z^2 + y^2)^{1/2}$ с центром в точке $(-z, -y)$. Для разрывов скоростей, принимая во внимание (1.4) и (2.1), найдем

$$[v_1] = -G\omega_1, \; [v_2] = -Gw_2, \quad [v_3] = 0 \tag{2.2}$$

а для разрывов напряжений из (1.3) будем иметь

$$\begin{gathered}
[\sigma_{\alpha 3}] = Q\omega_\alpha \quad (\alpha = 1, 2), \quad [\sigma_{33}] = 0, \quad 4d = -(x^2 + y^2) \\
Q = -\left\{2 \sum_{\substack{l=1 \\ m=0}} lA_{lm0}(2d)^{l-1} d^m + \sum_{\substack{l=0 \\ m=1}} mA_{lm0}(2d)^l d^{m-1}\right\}
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Из динамических условий совместности (1.8), учитывая (2.2) и (2.3), получим

$$\rho G^2 = Q \tag{2.4}$$

Так как $[W] = 0$ и

$$[\sigma_{i3}]\,([\sigma_{i3}] + 2\sigma_{i3}^{+}) = Q^2\,(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\,z\omega_1 + 2\,y\omega_2) = 0$$

то термодинамическое условие совместности (1.9) на тангенциальной поверхности сильного разрыва выполняется тождественно.

Таким образом, поперечная волна является вырождающейся ударной волной, так как она подобно звуковым волнам не сопровождается разрывом энтропии. Кроме того, как следует из (2.4), скорость поперечной ударной волны от интенсивности не зависит и определяется упругими модулями A_{lm_0} и значениями деформации сдвига перед волной. Интенсивность этой волны может меняться от 0 до $-8\,d$. При $z = y = 0$ должны выполняться равенства $\omega_1 = \omega_2 = 0$, т. е. при отсутствии деформации сдвига впереди S поперечная ударная волна не может распространяться в упругом теле.

Поступила 1 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Boa-Teh Chu. Transverse shock waves in incompressible elastic solids. J. Mech. and Phys. Solids, 1967, vol. 15, No. 1, pp. 1—14.
2. Черных Е. М. Термодинамические соотношения на поверхности сильного разрыва в упругой среде при конечных деформациях. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 3.
3. Чернышев А. Д. О распространении ударных волн в упругом пространстве при конечных деформациях. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
4. Murnaghan F. D. Finite deformations of an elastic solid. Amer. J. Math., 1937, vol. 59, No. 2, pp. 235—260.
5. Thomas T. Y. Plastic flow and fracture in solids. New York — London, Acad. Press., 1961.
(Рус. перев.: Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.)
6. Singh M., Pipkin A. C. Note on Ericksen's problem. Z. angew. Math. und Phys., 1965, Bd 16, fsc. 5, S. 706—709.

УДК 539.31

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ГРАДУИРОВОЧНОЙ КРИВОЙ В НАКОВАЛЬНЯХ БРИДЖМЕНА

П. И. Перлин

(Москва)

При проведении экспериментов или осуществлении того или иного технологического процесса в области высоких давлений необходимо достаточно точно знать величины напряжений в той части, где расположено исследуемое или обрабатываемое вещество. Функциональная связь между указанным напряжением и непосредственно определяемой величиной — суммарным усилием, приложенным в установке,— называется градуировочной кривой. Достоверность знания градуировочной кривой и определяет надежность работы любой установки высокого давления, поскольку непосредственные замеры давления практически исключены.

В установках высокого давления, использующих в качестве рабочей среды жидкость, построение градуировочной кривой осуществляется достаточно просто. Иначе обстоит дело в установках, использующих в качестве рабочей среды пластическое вещество (при нынешнем уровне экспериментальной техники в области физики высоких давлений именно указанные установки позволяют получать максимальные давления). В данной работе этот вопрос рассматривается на примере достаточно характерной установки — наковален Бриджмена.