

УДК 532.529

Автомодельные закономерности образования микросателлитов в процессе капиллярного распада вязких струй*

А.Л. Григорьев¹, А.А. Коротеев², А.А. Сафронов¹, Н.И. Филатов¹

¹Исследовательский центр им. М.В. Келдыша, Москва

²Московский авиационный институт

E-mail: chkt@yandex.ru

Проведено исследование процесса образования микросателлитов при капиллярном распаде струй вязких жидкостей. Предложенная аналитическая модель качественно описывает образование микросателлитов. Полученные закономерности образования зародышей микросателлитов и их отрыва от струи согласуются с результатами численного моделирования.

Ключевые слова: микросателлиты, капиллярный распад, отвод низкопотенциального тепла.

Введение

Моделирование капиллярного распада струй вязких жидкостей является актуальной задачей во многих технических приложениях. Одно из них — отвод низкопотенциального тепла в циклах космических энергетических установок нового поколения в процессе радиационного охлаждения специальным образом сформированного дисперсного потока, свободно распространяющегося в космическом пространстве. Генерация капель осуществляется методом вынужденного капиллярного распада, а сбор остывшего рабочего тела — с помощью уловителя капель [1]. К теплоносителю предъявляется требование низкой испаряемости. Все потенциально пригодные для использования в космосе рабочие тела имеют достаточно большую вязкость [2]. Закономерности распада струй таких жидкостей при числах Онезорге, близких к единице, рассматривались в работе [3]. Были получены зависимости размеров основных и сателлитных капель от волнового числа возмущения.

Результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о том, что капиллярный распад сильно вязких струй может сопровождаться образованием не только сателлитных капель, но и микросателлитов (или субсателлитов). При этом на одну основную каплю приходится несколько субсателлитов, масса которых может на несколько порядков отличаться от массы капли. Наличие микросателлитов может качественно изменить свойства дисперсного потока, например, из-за возможности их кристаллизации

* Работа выполнена при поддержке РФФ (соглашение № 14-19-00503-П).

вследствие быстрого остывания. Исследования образования микросателлитов для мало-вязких жидкостей проводились в работах [4, 5]. Экспериментальные результаты [6] свидетельствуют о том, что процесс образования микросателлитов при капиллярном распаде сложным образом зависит от числа Онезорге.

В представленной работе исследуется процесс образования микросателлитов при капиллярном распаде струй вязких высоковакуумных жидкостей.

Экспериментальные наблюдения

Образование микросателлитов наблюдалось в экспериментах по распаду жидких пленок. В результате развития неустойчивостей пленка распадалась на длинные тонкие цилиндры. В них с помощью съемки скоростной видеокамерой исследовалось развитие капиллярных неустойчивостей. На рис. 1 изображено несколько кадров видеосъемки капиллярного распада жидкого столбика, а также схема расположения образовавшихся

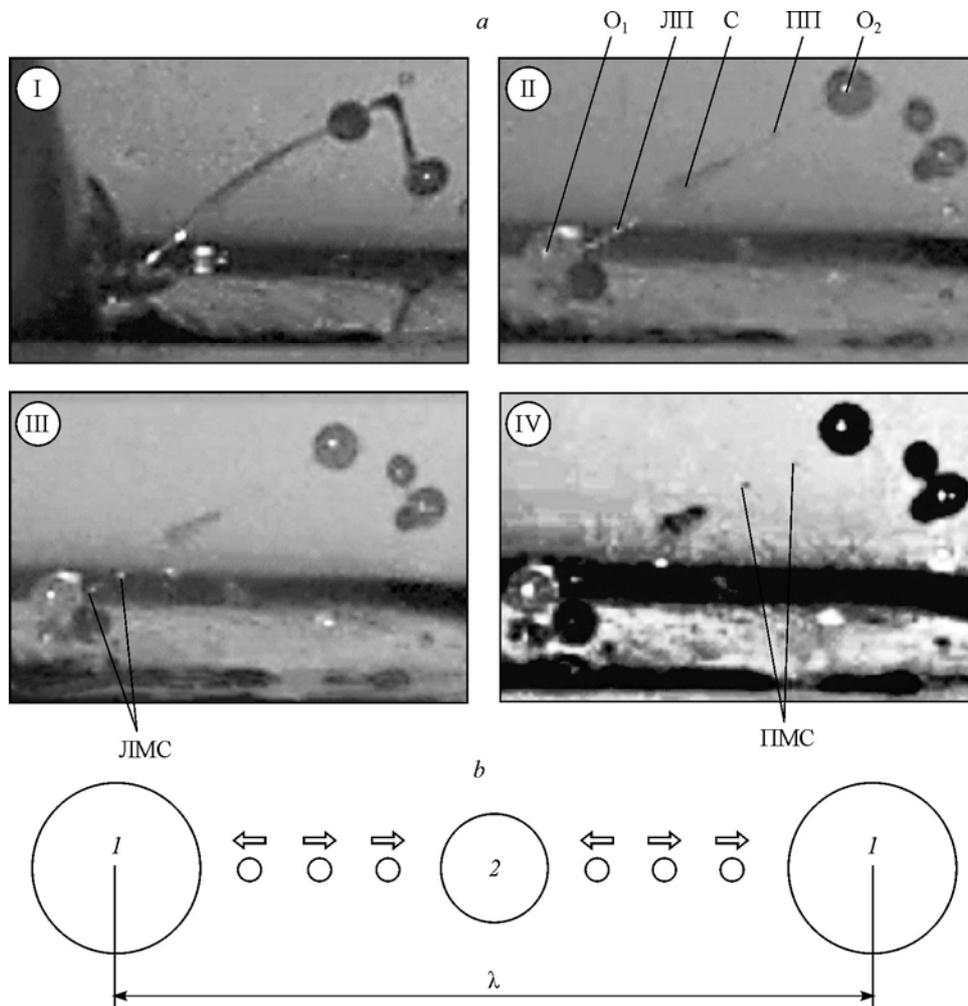


Рис. 1. Последовательные кадры видеосъемки капиллярного распада жидкого столбика (а) и схема расположения образовавшихся капель (b).

а: O_1 — левая нижняя основная капля, O_2 — правая верхняя основная капля, С — сателлитная капля, ЛП — левая перетяжка между O_1 и С, ПП — правая перетяжка между O_2 и С, ЛМС — микросателлиты, образованные в результате разрыва ЛП, ПМС — микросателлиты, образованные в результате разрыва ПП;

б: 1 — основные капли, 2 — сателлитная капля; стрелками обозначено направление движения микросателлитов.

капель. Длина волны возмущения поверхности цилиндра вакуумного масла VM-1 при температуре 37 °С составляла $\lambda \approx 7,7$ мм, начальный радиус струи $r_0 \approx 0,24$ мм, безразмерное волновое число возмущения $k = 2\pi r_0/\lambda \approx 0,2$, число Онезорге, определяемое соотношением

$$\text{On} = \mu / \sqrt{\sigma r_0 \rho}, \quad (1)$$

где μ , δ и ρ — соответственно коэффициенты динамической вязкости, поверхностного натяжения и плотность рабочего тела, имело значение 0,75. Диаметр левой нижней основной капли (O_1) равнялся 1,0 мм, правой верхней основной капли (O_2) — 1,35 мм, сателлитной капли (С) — 0,53 мм. Отличие размеров основных капель объясняется тем, что правая верхняя капля образовывалась в точке схождения двух жидких цилиндров. Экспериментально установленные размеры капель хорошо согласуются с результатами теоретической работы [3].

Видеосъемка позволила исследовать процесс образования микросателлитов. Первоначально в жидком цилиндре развивались капиллярные волны (рис. 1а, фрагмент I), формировались зародыши основных и сателлитной капель, соединенные перетяжками. Время формирования зародышей капель составляло $\sim 10^{-3}$ с. Затем происходило утончение перетяжек, соединяющих основные и сателлитную капли, которое сопровождалось развитием капиллярных неустойчивостей, приводящих к образованию микросателлитов (см. рис. 1а, фрагмент II). Характерное время утончения перетяжки составило $\sim 10^{-4}$ с. Разрыв левой перетяжки произошел раньше, нежели правой. Из каждой перетяжки образовалось по три микросателлита, движущихся в разные стороны (рис. 1б): два из них двигались в направлении сателлитной капли, один — к основной. Из этого наблюдения можно сделать вывод о том, что первоначально разрыв перетяжки происходил вблизи основной капли между микросателлитами, движущимися в противоположные стороны. Из-за движения воздуха два из шести образовавшихся микросателлитов не столкнулись с образовавшимися основными и сателлитными каплями.

Численное моделирование

Задача решалась в цилиндрических координатах (ось совпадает с осью струи). В качестве масштаба длины выбирался невозмущенный радиус струи r_0 , масштаба времени — t_0 , определяемое как

$$t_0 = \sqrt{\rho r_0^3 / \sigma}, \quad (2)$$

масштаба скорости — отношение r_0/t_0 ; затем выполнялся переход к безразмерным переменным. В условиях эксперимента, описанного выше, $r_0/t_0 \approx 0,3$ м/с.

В приближении длинных (по сравнению с радиусом струи) волн, гидродинамическая система уравнений записывается в виде

$$\partial_t u + u \partial_x u = \partial_x \left(\partial_{xx} h - \frac{1}{h} \right) + 3\text{On} \left(2 \frac{\partial_x h}{h} \partial_x u + \partial_{xx} u \right), \quad (3)$$

$$\partial_t h + u \partial_x h = -\frac{1}{2} h \partial_x u, \quad (4)$$

где u — скорость вещества в струе, h — радиус струи, x и t — аксиальная координата и время. Эти уравнения были получены в работе [7] из системы уравнений Навье–Стокса.

Образование капель при распаде струи происходит в два этапа. На первом этапе экспоненциально растет начальное возмущение и образуются зародыши капель. Рост зародышей замедляется, когда в них сосредоточивается большая часть вещества. На втором этапе происходит автомоделный разрыв тонких жидких перетяжек, связывающих зародыши.

Первый этап получил название «процесс капиллярного распада», второй — «разрыв струи». Система уравнений (3)–(4) позволяет моделировать оба процесса.

Микросателлиты образуются в области тонкого перешейка, соединяющего основную и сателлитную капли. При $On \sim 1$ силы инерции пренебрежимо малы по сравнению с силами вязкости и поверхностного натяжения. Утончение струи происходит по автомодельной закономерности и слабо зависит от начальных условий. При выводе автомодельного уравнения предполагается, что в уравнении (3) член $\partial_{xx}h$ пренебрежимо мал по сравнению с величиной $1/h$ [8, 9]. В этом случае (3) можно переписать в виде

$$\partial_x \left(\frac{1}{h} \right) = \frac{3On}{h^2} \partial_x (h^2 \partial_x u). \quad (5)$$

Получившаяся система уравнений (4)–(5) решается аналитически. Вблизи точки разрыва струи она имеет единственное решение [8]. Его квадратичное приближение запишется в виде

$$h = C_1 (t^* - t) \left(C_0 + \frac{(x^* - x)^2}{(t^* - t)^{4+2\beta}} \right), \quad (6)$$

$$u = C_2 \frac{x^* - x}{(t^* - t)^{2+\beta}}, \quad (7)$$

где C_0, C_1, C_2 — некоторые константы, x^* и t^* — координата точки и момент времени разрыва струи, $\beta \approx 0,17$ — универсальная константа автомодельного решения. В качестве автомодельной переменной в соотношениях (6) и (7) выступает величина $(x^* - x)/(t^* - t)^{2+\beta}$.

Численное решение системы уравнений (3)–(4) позволяет исследовать развитие гидродинамической неустойчивости в тонкой перетяжке, соединяющей зародыши капель. Однако для анализа этих процессов необходимо задавать малый шаг разностной схемы как по пространству, так и по времени. Весь процесс распада струи с такой степенью точности рассмотреть затруднительно. Для определения начальных условий использовались результаты работы [3], в которой исследовалось развитие волн малой амплитуды в струе и устанавливались условия сшивки асимптотического решения и автомодельной закономерности разрыва (6). Форма струи при этом задавалась в виде суперпозиции двух гармонических волн с пространственной частотой k и $2k$, амплитуда волн рассчитывалась с помощью соотношений, предложенных в работе [3]. Система уравнений (3)–(4) решалась методом конечных разностей на восьмиточечной параметрической схеме, полученной из шеститочечной схемы с добавлением двух точек для аппроксимации третьей производной h на нижнем временном слое.

В первом вычислительном эксперименте проводилось моделирование разрыва струи в условиях, аналогичных наблюдаемым в натурном эксперименте. Начальная амплитуда возмущения считалась малой и не влияющей на процесс сателлиитообразования. Расчеты проводились вплоть до момента разрыва струи. Условием разрыва считалась критически большая величина разностных производных — когда на i -ом шаге решения в одном из узлов сетки величина h_{i+1} , полученная из разностной аппроксимации уравнения (4), имела отрицательное значение. На рис. 2 изображен профиль струи в различные моменты времени.

С течением времени форма перешейка приближается к той, которая описывается автомодельной зависимостью (6). После образования перешейка на границе области автомодельного решения и основной капли происходило образование зародышей микросателлитов (рис. 3).

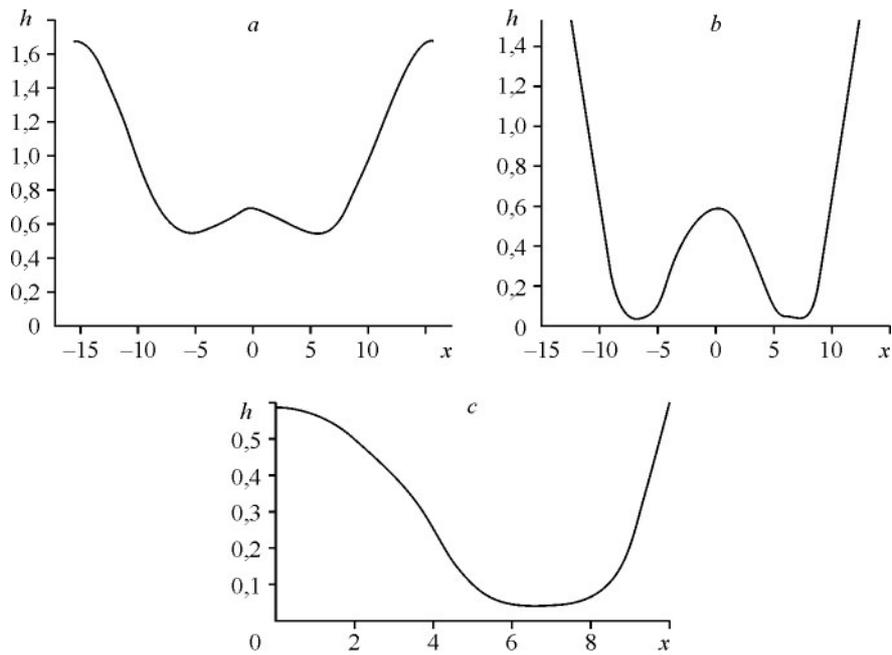


Рис. 2. Зависимость формы струи от координаты в различные моменты времени.
 $t = t^* - 3,94$ (a), $t^* - 1,05$ (b), c — фрагмент рисунка (b), показанный в крупном масштабе.

На рис. 3a и 3b изображена зависимость радиуса струи от координаты в различных масштабах в момент времени $t = t^* - 0,42$. Из анализа рисунков следует, что существует область (рис. 3b), на всем протяжении которой синхронно происходит образование зародышей микросателлитов. На рис. 3c представлена зависимость скорости жидкости струи

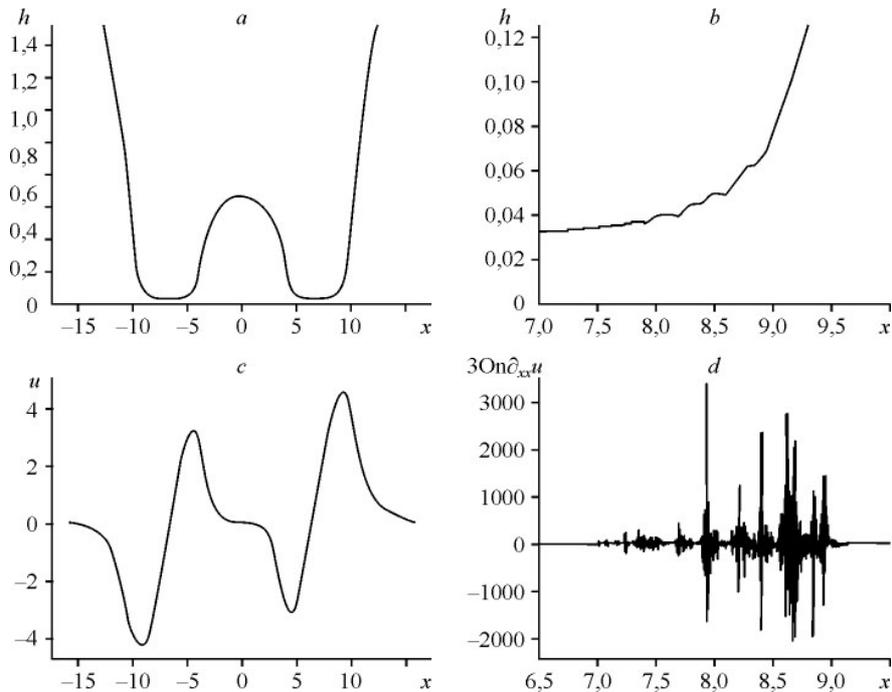


Рис. 3. Зависимости формы струи (a, b), скорости вещества в ней (c) и величины $3On\partial_{xx}u$ (d) от координаты в момент времени $t = t^* - 0,42$.

от координаты. Образование структуры волн на поверхности струи происходит в малой окрестности максимума скорости.

Для анализа влияния различных членов уравнений (3) и (4) на процесс образования микросателлитов исследовалась временная эволюция следующих величин:

$$f_1 = \frac{6}{h} \text{On} \partial_x h \partial_x u, \quad (8)$$

$$f_2 = 3 \text{On} \partial_{xx} u, \quad (9)$$

$$f_3 = u \partial_x u. \quad (10)$$

При образовании структуры волн значение модуля величин f_1 и f_3 не превышало 5. Численно полученная зависимость f_2 от координаты представлена на рис. 3d. Видно, что области появления зародышей микросателлитов характеризуются большими значениями модуля $\partial_{xx} u$.

На рис. 4 представлены результаты расчета зависимости формы струи вблизи точки ее разрыва от времени. Формирование микросателлитов характеризуется сложной динамикой. Образующаяся вблизи точки разрыва самоподобная структура формы поверхности струи обусловлена автомодельностью задачи. Из анализа рис. 4 следует, что характерный радиус микросателлитов составляет порядка $0,1r_0$. Этот результат согласуется с экспериментальными наблюдениями.

Зависимость скорости в струе от координаты, рассчитанная для момента времени $t = t^* - 0,2064$, представлена на рис. 5. Отметим, что наличие зародышей микросателлитов слабо влияет на величину скорости в струе.

Дополнительно проведена серия вычислительных экспериментов для определения условий образования зародышей микросателлитов. На рис. 6 представлены результаты

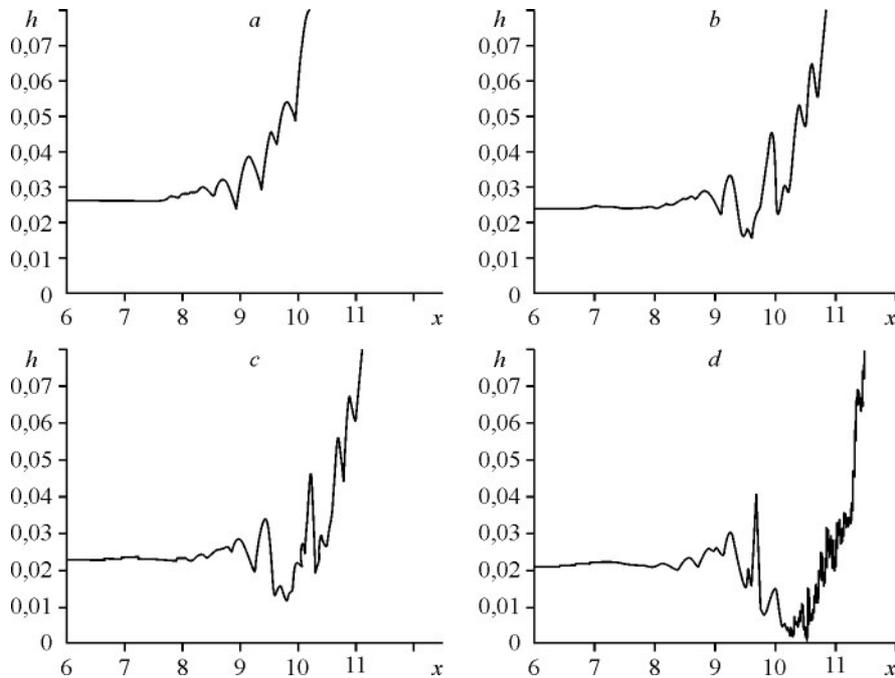
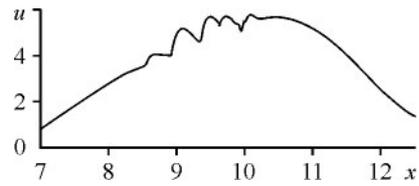


Рис. 4. Зависимость формы струи от координаты для различных моментов времени.

$t = t^* - 0,2064$ (a), $t^* - 0,0948$ (b), $t^* - 0,00624$ (c), $t^* - 0,00025$ (d);
шаг по времени — 10^{-5} , шаг по координате — $4,5 \cdot 10^{-3}$.

Рис. 5. Зависимость скорости от координаты при $t = t^* - 0,2064$.



одного из расчетов — зависимость функций $(f_1 + f_2)$, f_2 и f_3 от координаты для различных моментов Δt — разности между временем возникновения зародышей микросателлитов и текущим временем. Первоначально формируется область, в которой значение инерционного члена f_3 близко к сумме $(f_1 + f_2)$ (см. рис. 6a, область $x \in [9,25; 10]$). На графике переменной $\partial_{xx} u(x)$ в зависимости от координаты x видна волна, движущаяся в направлении к экстремуму соответствующей зависимости (рис. 6b, 6c). Затем происходит быстрый рост экстремального значения (рис. 6d) и образование зародышей микросателлитов. В момент образования зародышей микросателлитов величина $(f_1 + f_2)$ в области пика практически совпадает с f_2 , то есть в процессе образования зародышей величина $f_2 = 3\text{On}\partial_{xx} u$ имеет определяющее значение.

Форма струи в момент образования микросателлитов изображена на рис. 7.

Аналитическая модель образования микросателлитов

Образование микросателлитов происходит в области автомодельного утончения струи. Однако система уравнений (4)–(5) не имеет решений, описывающих образование структуры волн на поверхности струи [8, 9]. Это объясняется тем, что при выводе соотношения (5) не учитывался член $\partial_{xx} h$, описывающий влияние величины второго главного радиуса кривизны поверхности на капиллярные процессы. В работе используется следующее уравнение для описания процесса формирования микросателлитов в струе вязкой жидкости:

$$\partial_x (\partial_{xx} h - 1/h) + 3\text{On}\partial_{xx} u = 0. \quad (11)$$

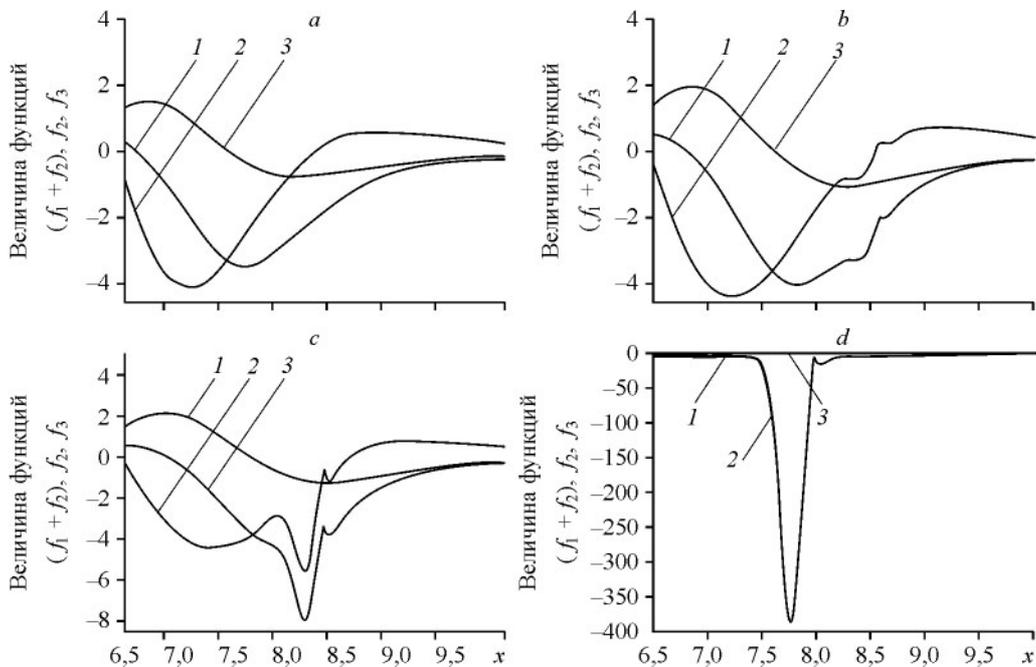


Рис. 6. Соотношение функций $(f_1 + f_2)$, f_2 и f_3 для различных моментов времени.

1 — $(f_1 + f_2)$, 2 — f_2 , 3 — f_3 ; $\Delta t = 0,135$ (a), $0,081$ (b), $0,054$ (c), 0 (d).

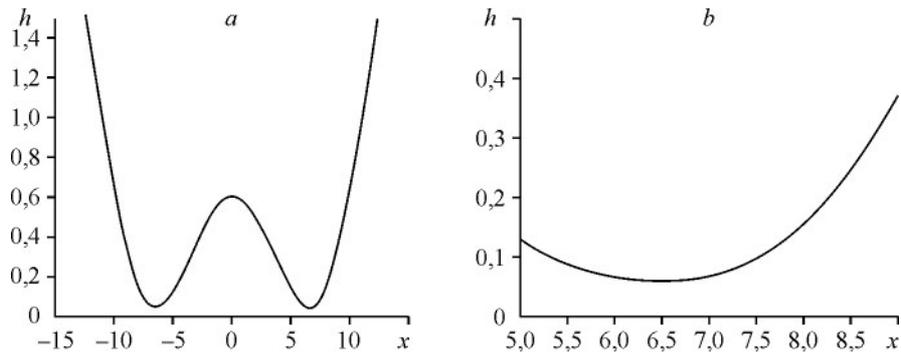


Рис. 7. Зависимость формы струи от координаты в момент образования зародышей микросателлитов в разных масштабах.

Применимость этого модельного уравнения объясняется тем, что образование структуры волн происходит в малой окрестности экстремума скорости, в которой величина $\partial_x u$, входящая в член $6\text{On} \partial_x h \partial_x u / h$ уравнения (3), мала. Анализ численного решения системы уравнений (3)–(4) подтверждает применимость предложенной модели. Уравнение (4) преобразовывается следующим образом:

$$-\frac{2}{h}(\partial_t h + u \partial_x h) = \partial_x u. \quad (12)$$

В результате интегрирования (11) примет вид

$$\partial_{xx} h - \frac{1}{h} + 3\text{On} \partial_x u = C(t), \quad (13)$$

где $C(t)$ — некоторая константа, в общем случае зависящая от времени. В результате подстановки (12) в (13) получим выражение

$$6\text{On}(\partial_t h + u \partial_x h) - h \partial_{xx} h + 1 + hC(t) = 0. \quad (14)$$

До начала формирования микросателлитов $\partial_{xx} h \ll 1/h$, поэтому константа C оценивается соотношением $C = -1/h_0$, где h_0 — радиус струи в точке, характеризующейся максимальной скоростью в момент образования зародышей микросателлитов.

Скорость слабо меняется при структурообразовании, поэтому производится замена переменной x :

$$\tilde{x} = x - ut. \quad (15)$$

Далее знак волны опускается и в новых переменных (13) записывается в виде

$$6\text{On} \partial_t h - h \partial_{xx} h + 1 - h/h_0 = 0. \quad (16)$$

Это уравнение имеет два стационарных решения. Одно из них — константа:

$$h = h_0. \quad (17)$$

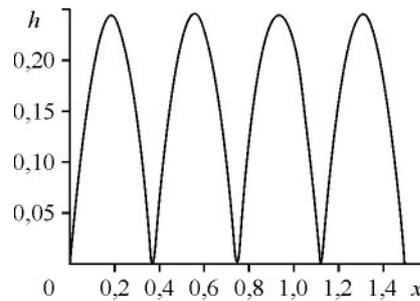
Второе стационарное решение определяется соотношением

$$\partial_{xx} h = 1/h - 1/h_0. \quad (18)$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (18) имеет периодическое решение (рис. 8). Его пространственная частота определяется величиной h_0 и амплитудой решения. Возникновение периодического решения можно пояснить следующим образом. Полагая $h = h_0(1 + H)$, где $H \ll 1$, и линеаризуя уравнение (18) относительно H , получаем уравнение линейного осциллятора.

Рис. 8. Характерный вид периодического решения уравнения (18).

$$h_0 = 0,05, h(0) = 0,0025, \partial_x h(0) = 1.$$



При исследовании структурной устойчивости периодического решения (18) по отношению к изменению величины h_0 считалось, что $h_0 = h_0(x)$ — некоторая функция. Анализ показал, что решение (18) сохраняет периодическую структуру, аналогичную изображенной на рис. 8, в случае, когда $h_0(x)$ на исследуемом промежутке положительна и изменяется достаточно медленно с координатой x (медленнее, чем периодическое решение). При некоторых условиях уравнение (18) имеет периодическое решение в случае знакопеременности $h_0(x)$ (когда длина промежутка отрицательного значения величины функции $h_0(x)$ много меньше периода решения). Если $h_0(x) < 0$ на всем исследуемом промежутке, уравнение (18) периодического решения не имеет.

Образование структуры волн происходит при потере устойчивости решения (17). Форма струи описывается соотношением $h = h_0 + \delta h$. Развитие неустойчивости в линейном приближении записывается как

$$6\text{On}\partial_t(\delta h) - h_0\partial_{xx}(\delta h) - \delta h/h_0 = 0. \quad (19)$$

Представим возмущение δh в виде

$$\delta h = e^{\omega t} \cos(2\pi x/l), \quad (20)$$

где l и ω — длина волны и фактор роста возмущения.

Дисперсионное соотношение записывается в виде

$$\omega = \frac{1}{6\text{On}h_0} \left(1 - \frac{4\pi^2 h_0^2}{l^2} \right). \quad (21)$$

Из (21) следует условие формирования зародышей микросателлитов: ширина экстремума в поле второй производной скорости $\partial_{xx} u(x)$ должна удовлетворять неравенству

$$l > 2\pi h_0. \quad (22)$$

Первоначально рост зародышей происходит в линейном режиме, согласно (20). По мере роста возмущения форма поверхности струи приближается к виду струи, изображенной на рис. 8. В малой окрестности минимума толщины (см. рис. 8) можно пренебречь величиной h/h_0 в уравнении (16). В этом приближении динамика поверхности струи вблизи точки распада описывается уравнением

$$6\text{On}\partial_t h = h\partial_{xx} h - 1. \quad (23)$$

Последнее соотношение математически эквивалентно нелинейному уравнению теплопроводности в среде с источником. Анализ автомодельного решения этого уравнения показывает, что процесс формирования микросателлита аналогичен явлению локализации тепла [10]. Действительно, решение уравнения (23) можно представить в виде:

$$h = h(0) - \frac{1}{6\text{On}} t + T(t)\Theta(x), \quad (24)$$

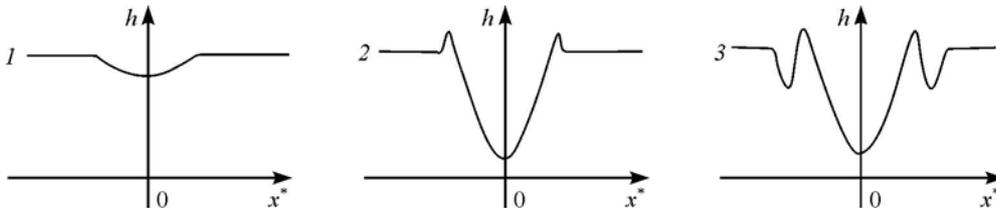


Рис. 9. Стадии формирования самоподобного профиля струи.

где $T(t)$ и $\Theta(x)$ — некоторые функции времени и координаты. Аналогично явлению локализации тепла, формирование микросателлита является локальным процессом и происходит в некоторой ограниченной области. Подстановка (24) в (23) приводит к выражению:

$$h = h(0) - \frac{1}{6On}t + \frac{1}{\tau - t/(6On)} \cdot \frac{(x^* - x)^2}{2}, \quad (25)$$

где τ — некоторая константа, $h(0)$ — начальный радиус струи.

Поскольку исследуется поведение решения вблизи минимума толщины струи, следовательно $\tau > 0$. Из условия разрыва струи запишем соотношение

$$6On h(0) = \tau. \quad (26)$$

Тогда (25) можно представить в виде

$$h = (\tau - t/(6On)) \left(1 + \frac{1}{(\tau - t/(6On))^2} \cdot \frac{(x^* - x)^2}{2} \right). \quad (27)$$

Полученное уравнение описывает альтернативную зависимости (6) автомодельную закономерность разрыва вязкой струи.

На рис. 9 показаны стадии формирования профиля струи, близкого к самоподобному. Решение (25) развивается в ограниченной области, поэтому по мере утончения струи на границе зоны автомодельного разрыва скапливается жидкость (рис. 9, стадии 1, 2). При развитии этого возмущения рядом с исходной областью образуются новые зоны автомодельного решения (рис. 9, стадия 3). В результате вблизи области разрыва формируется волновая структура, близкая к самоподобной (см. рис. 4).

Обсуждение результатов

1. Предложена аналитическая модель образования микросателлитов, которая объясняет влияние на него числа Онезорге. Эксперименты показывают [6], что в случае, когда вязкость жидкости мала ($On < 0,1$), субсателлиты не образуются, т.к. не реализуется автомодельная закономерность (6), и разрыв струи происходит по другому сценарию. При повышении значения On формируется область вязкого автомодельного утончения, в результате чего образуются микросателлиты. Когда $On \sim 1$, фактор роста зародышей ω , рассчитываемый по формуле (21), оказывается настолько малым, что микросателлиты не успевают сформироваться за время разрыва струи.

2. Получено условие формирования микросателлитов (22). Анализ результатов проведенной серии вычислительных экспериментов свидетельствует о том, что зависимость (22) с высокой точностью позволяет предсказать момент образования зародышей. Так, суммарная ширина экстремумов на рис. 6 составляет $l \approx 0,605$, радиус струи в области образования зародышей (рис. 7) $h_0 \approx 0,095$, а значение $l/h_0 \approx 6,32 \approx 2\pi$.

3. Выявлены закономерности отрыва зародыша микросателлита от струи (27). Функция $T(t) = (\tau - t / (6On))^{-1}$, описывающая рост кривизны поверхности струи, достигает бесконечно большого значения за конечный промежуток времени. Из-за этого в области отрыва микросателлита форма струи становится сингулярной: производная радиуса струи по аксиальной координате неограниченно возрастает. При реализации численного эксперимента наблюдалось формирование этой сингулярности (рис. 4).

Следует отметить необходимость дополнительных исследований влияния возмущений на образование микросателлитов и формирования волн в поле $\partial_{xx} u(x)$. Другим важным направлением дальнейших работ является определение областей параметров образования микросателлитов.

Получены закономерности образования зародышей микросателлитов, определены их формы, исследована динамика отрыва микросателлита от струи. Аналитические результаты согласуются с результатами численного моделирования.

Список литературы

1. Коротеев А.А., Сафронов А.А., Филатов Н.И. Влияние структуры капельной пелены на мощность бескаркасных космических излучателей и эффективность энергетических установок // Теплофизика высоких температур. 2016. Т. 54, № 5. С. 817–820.
2. Бондарева Н.В., Глухов Л.М., Коротеев А.А., Красовский В.А., Кустов Л.М., Нагель Ю.А., Сафронов А.А., Филатов Н.И., Черникова Е.А. Бескаркасные системы отвода низкопотенциального тепла в космосе: успехи отработок и нерешенные задачи // Изв. РАН. Энергетика. 2015. № 4. С. 130–142.
3. Сафронов А.А. Особенности капиллярного распада струй жидкости при числах Онезорга больше единицы // Инж.-физ. журнал. 2017. Т. 90, № 1. С. 176–185.
4. Tjahjadi M., Ottino J.M., Stone H.A. Satellite and subsatellite formation in capillary breakup // J. of Fluid Mechanics. 1992. Vol. 243. P. 297–317.
5. Lakdawala A.M., Thakkar R., Sharma A. DGLSM based study of temporal instability and formation of satellite drop in a capillary jet breakup // Chemical Engng Sci. 2015. Vol. 130. P. 239–253.
6. Campo D.L., Clasen C. The slow retraction method (SRM) for the determination of ultra-short relaxation times in capillary breakup extensional rheometry experiments // J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2010. Vol. 165, Iss. 23–24. P. 1688–1699.
7. Eggers J., Dupont T.F. Drop formation in a one-dimensional approximation of the Navier–Stokes equation // J. of Fluid Mechanics. 1994. Vol. 262. P. 205–221.
8. Eggers J. Drop formation — an overview // Z. Angew. Math. Mech. 2005. Vol. 85, No. 6. P. 400–410.
9. Eggers J. Stability of a viscous pinching thread // Physics of Fluids. 2012. Vol. 24. P. 072103-1–072103-11.
10. Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры // Итоги науки и техн. Сер.: Современ. проблемы матем. Новейшие достижения. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 28. С. 95–205.

*Статья поступила в редакцию 27 февраля 2018 г.,
после доработки — 28 апреля 2018 г.*