УДК 539.3

К ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИЗОТРОПНЫХ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ

В. Н. Солодовников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследуется деформирование изотропных гиперупругих тел. В качестве примера применения теории приведено решение задачи о гравитационном сжатии шара.

Ключевые слова: изотропность, гиперупругость, скорости напряжений Яумана, падающие диаграммы, гравитационное сжатие.

1. Скорости квадратов главных кратностей удлинений. В работе [1], в отличие от [2–4], доказывается, что для изотропных гиперупругих тел плотность энергии деформации может задаваться как функция не трех, а только двух аргументов — инвариантов тензоров деформаций. В [5] при исследовании диаграмм зависимостей напряжений от деформаций используются компоненты тензоров скоростей напряжений Яумана и скоростей деформаций. Найдем связь между скоростями деформаций и скоростями квадратов главных кратностей удлинений. Декартовы и криволинейные координаты, радиус-векторы, базисные векторы и метрический тензор криволинейной системы координат в исходных положениях материальных точек в начальный момент времени $\tau = 0$ обозначим через y^i, x^i, $\boldsymbol{R} = y^i\,\boldsymbol{k}_i$, $\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{R}_{,x^i} = y^n_{,x^i}\,\boldsymbol{k}_n$, $g_{ij} = \boldsymbol{l}_i \cdot \boldsymbol{l}_j$, а в текущий момент времени τ — через $\hat{y}^i$, $\hat{x}^i$, $\hat{\boldsymbol{R}} = \hat{y}^i\,\boldsymbol{k}_i$, $\hat{\boldsymbol{l}}_i = \hat{\boldsymbol{R}}_{,\hat{x}^i} = \hat{y}^n_{,\hat{x}^i}\,\boldsymbol{k}_n$, $\hat{g}_{ij} = \hat{\boldsymbol{l}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{l}}_j$ соответственно; $\boldsymbol{k}_i$ — базисные векторы декартовой системы координат; $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{R}} - \boldsymbol{R} = u^i\,\boldsymbol{l}_i = \hat{u}^i\,\hat{\boldsymbol{l}}_i$, $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{u}} = \hat{v}_i\,\hat{\boldsymbol{l}}^i$ — векторы смещений и скоростей смещений; точка обозначает дифференцирование по времени τ (в статических задачах в качестве τ может использоваться какой-либо другой монотонно возрастающий параметр, определяющий деформирование материала). Используем также базисные векторы сопутствующих систем координат $\hat{\boldsymbol{R}}_{,x^i} = \boldsymbol{l}_i + u^n_{,i}\,\boldsymbol{l}_n$, $\boldsymbol{R}_{,\hat{x}^i} = \hat{\boldsymbol{l}}_i - \hat{u}^n_{;i}\,\hat{\boldsymbol{l}}_n$. Индексы i, j, m, n принимают значения $1, 2, 3$; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3; переменные в нижнем индексе после запятой обозначают частное дифференцирование; индексы i после запятой или точки с запятой обозначают ковариантное дифференцирование по x^i и $\hat{x}^i$ соответственно ($\boldsymbol{u}_{,x^i} = u^n_{,i}\,\boldsymbol{l}_n$, $\boldsymbol{u}_{,\hat{x}^i} = \hat{u}^n_{;i}\,\hat{\boldsymbol{l}}_n$).

Пусть главные оси тензора деформаций Альманси [1] $\hat{e} = \hat{e}_{ij}\hat{\boldsymbol{l}}^i\hat{\boldsymbol{l}}^j$ в текущий момент времени τ имеют направления базисных векторов декартовой системы координат $\boldsymbol{k}_m$ и в процессе деформирования поворачиваются, оставаясь взаимно ортогональными, с угловой скоростью $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \hat{\Omega}^i\boldsymbol{k}_i$. Через малый промежуток времени в момент $\tau + \Delta\tau$ с точностью до $(\Delta\tau)^2$ оси будут иметь направления

$$\hat{\boldsymbol{K}}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau} = \boldsymbol{k}_m + \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{k}_m\Delta\tau = \boldsymbol{k}_m + (\boldsymbol{k}_n\hat{\Omega}^l - \boldsymbol{k}_l\hat{\Omega}^n)\Delta\tau$$

(m, n, l — четная перестановка индексов $1, 2, 3$; величины с индексом (m) соответствуют оси, имеющей в момент τ направление $\boldsymbol{k}_m$; малыми слагаемыми порядка $(\Delta\tau)^2$ пренебрега-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00195).

ется). Элементарные материальные волокна $\boldsymbol{k}_i\, d\hat{y}^i$, проходящие в момент τ вдоль главных осей тензора деформаций Альманси $\hat{e}$ (суммирование по i не проводится), в начальный момент времени занимают положения $(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{u})_{,\hat{y}^i}\, d\hat{y}^i$, взаимно ортогональны и проходят вдоль главных осей тензора деформаций Грина $e = e_{ij}\boldsymbol{l}^i\boldsymbol{l}^j$. Отношения квадратов длин этих волокон в текущем и исходном состояниях есть квадраты главных кратностей удлинений $\varepsilon_i = |(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{u})_{,\hat{y}^i}|^{-2}$. Рассмотрим волокна $d\hat{L}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau}\hat{\boldsymbol{K}}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau} = (\hat{\boldsymbol{R}}+\boldsymbol{v}\Delta\tau)_{,\hat{x}^i}\, d\hat{x}^{i(m)}$ длиной $d\hat{L}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau}$, проходящие вдоль главных осей в момент $\tau+\Delta\tau$. В разложении представленных векторов по базису $\hat{\boldsymbol{l}}_i$ получаем равенства

$$d\hat{x}^{i(m)} + (\boldsymbol{v}_{,\hat{x}^j}\cdot\hat{\boldsymbol{l}}^i)\Delta\tau d\hat{x}^{j(m)} = [\hat{x}^i_{,\hat{y}^m} + (\hat{x}^i_{,\hat{y}^n}\hat{\Omega}^l - \hat{x}^i_{,\hat{y}^l}\hat{\Omega}^n)\Delta\tau]\, d\hat{L}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau}. \qquad (1.1)$$

Отбрасывая слагаемые, содержащие $\Delta\tau$, определяем $d\hat{x}^{i(m)} = \hat{x}^i_{,\hat{y}^m}\, d\hat{L}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau}$. Подставим эти значения в слагаемые с $\Delta\tau$ в (1.1) и найдем величины приращений координат с точностью до $(\Delta\tau)^2$:

$$d\hat{x}^{i(m)} = \{\hat{x}^i_{,\hat{y}^m} + [\hat{x}^i_{,\hat{y}^n}\hat{\Omega}^l - \hat{x}^i_{,\hat{y}^l}\hat{\Omega}^n - (\boldsymbol{v}_{,\hat{y}^m}\cdot\hat{\boldsymbol{l}}^i)]\Delta\tau\}\, d\hat{L}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau}.$$

В момент τ рассматриваемые волокна имеют вид $\hat{\boldsymbol{l}}_i\, d\hat{x}^{i(m)} = [\boldsymbol{k}_m + (\boldsymbol{k}_n\hat{\Omega}^l - \boldsymbol{k}_l\hat{\Omega}^n - \boldsymbol{v}_{,\hat{y}^m})\Delta\tau]\, d\hat{L}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau}$, а в начальный момент $\tau = 0$ —

$$(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{u})_{,\hat{x}^i}\, d\hat{x}^{i(m)} = \{(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{u})_{,\hat{y}^m} + [(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{u})_{,\hat{y}^n}\hat{\Omega}^l - (\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{u})_{,\hat{y}^l}\hat{\Omega}^n -$$
$$-(\boldsymbol{v}_{,\hat{y}^m}\cdot\boldsymbol{k}_j)(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{u})_{,\hat{y}^j}]\Delta\tau\}\, d\hat{L}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau}. \qquad (1.2)$$

Отношения квадратов их длин, заданных в момент $\tau+\Delta\tau$, к начальным длинам $\varepsilon_{m(\tau+\Delta\tau)} = d\hat{L}^{(m)\,2}_{\tau+\Delta\tau}|(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{u})_{,\hat{x}^i}\, d\hat{x}^{i(m)}|^{-2}$ есть значения квадратов главных кратностей удлинений в рассматриваемой материальной точке в момент $\tau+\Delta\tau$. С использованием декартовых компонент тензора скоростей деформаций $\hat{\eta}_{ij} = [(\boldsymbol{v}_{,\hat{y}^i}\cdot\boldsymbol{k}_j) + (\boldsymbol{v}_{,\hat{y}^j}\cdot\boldsymbol{k}_i)]/2$ получаем выражения $\varepsilon_{m(\tau+\Delta\tau)} = \varepsilon_m(1 + 2\hat{\eta}_{mm}\Delta\tau)$. Скорости квадратов главных кратностей удлинений находятся предельным переходом

$$\dot{\varepsilon}_m = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\,(\varepsilon_{m(\tau+\Delta\tau)} - \varepsilon_m) = 2\varepsilon_m\hat{\eta}_{mm}. \qquad (1.3)$$

Таким образом, в декартовой системе координат с координатными линиями, направленными вдоль главных осей тензора деформаций Альманси, значения диагональных компонент тензора скоростей деформаций вычисляются по формулам [6] $\hat{\eta}_{mm} = \dot{\varepsilon}_m/(2\varepsilon_m)$. Величины $\dot{\varepsilon}_m$ не зависят от скорости вращения главных осей и являются также скоростями квадратов кратностей удлинений материальных волокон, проходящих в момент τ вдоль этих осей. Действительно, за время с момента τ до момента $\tau+\Delta\tau$ волокна $\boldsymbol{k}_m\, d\hat{y}^m$ (суммирование по m не проводится) переходят в положения $(\hat{\boldsymbol{R}}+\boldsymbol{v}\Delta\tau)_{,\hat{y}^m}\, d\hat{y}^m$. Отношения квадратов длин данных волокон в моменты $\tau+\Delta\tau$ и τ равны отношениям их квадратов кратностей удлинений в эти моменты времени $|(\hat{\boldsymbol{R}}+\boldsymbol{v}\Delta\tau)_{,\hat{y}^m}|^2 = \varepsilon_{m(\tau+\Delta\tau)}\varepsilon_m^{-1} = 1 + 2\hat{\eta}_{mm}\Delta\tau$. Отсюда, устремляя $\Delta\tau$ к нулю, найдем те же значения $\dot{\varepsilon}_m$, что и в (1.3). Из условия ортогональности векторов (1.2) определяем скорость вращения главных осей $\hat{\Omega}^l = \omega^l + (\varepsilon_m+\varepsilon_n)(\varepsilon_m-\varepsilon_n)^{-1}\hat{\eta}_{mn}$ ($\boldsymbol{\omega} = \omega^i\boldsymbol{k}_i$ — скорость вращения окрестности материальной точки как абсолютно твердого целого; $\omega^l = [(\boldsymbol{v}_{,\hat{y}^m}\cdot\boldsymbol{k}_n) - (\boldsymbol{v}_{,\hat{y}^n}\cdot\boldsymbol{k}_m)]/2$).

2. Скорости напряжений. Пусть главные оси тензора напряжений Коши $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{ij}\,\hat{\boldsymbol{l}}_i\hat{\boldsymbol{l}}_j$ в момент τ имеют направления $\boldsymbol{k}_m$ и, оставаясь взаимно ортогональными, поворачиваются с угловой скоростью $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \tilde{\Omega}^i\,\boldsymbol{k}_i$. Тогда в момент $\tau+\Delta\tau$ с точностью до $(\Delta\tau)^2$ оси будут иметь направления $\hat{\boldsymbol{N}}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau} = \boldsymbol{k}_m + (\boldsymbol{k}_n\tilde{\Omega}^l - \boldsymbol{k}_l\tilde{\Omega}^n)\Delta\tau$ (m, n, l — четная перестановка индексов $1, 2, 3$). Рассмотрим материальные площадки, имеющие в момент $\tau + \Delta\tau$ нормали $\hat{\boldsymbol{N}}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau}$ и площади $d\hat{S}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau}$. Полагая нормали к этим материальным площадкам в момент τ в первом приближении равными $\boldsymbol{k}_m$, находим [5] $d\dot{\hat{S}}^{(m)} = (J^{-1}\dot{J} - \hat{\eta}_{mm})d\hat{S}^{(m)}$, $\dot{\hat{\boldsymbol{N}}}^{(m)} = \hat{\eta}_{mm}\boldsymbol{k}_m - (\boldsymbol{v}_{,\hat{x}^i}\cdot\boldsymbol{k}_m)\hat{\boldsymbol{l}}^i$, где J — отношение объемов материальных частиц в текущем и исходном состояниях (якобиан преобразования исходных декартовых координат материальных точек в текущие); $\dot{J} = J\,\hat{\eta}^i_i$. С использованием формул $d\hat{S}^{(m)} = d\hat{S}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau} - d\dot{\hat{S}}^{(m)}\,\Delta\tau$, $\hat{\boldsymbol{N}}^{(m)} = \hat{\boldsymbol{N}}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau} - \dot{\hat{\boldsymbol{N}}}^{(m)}\Delta\tau$ находим площади и нормали к площадкам в момент τ с точностью до $(\Delta\tau)^2$:

$$
\begin{gathered}
d\hat{S}^{(m)} = [1 - (J^{-1}\dot{J} - \hat{\eta}_{mm})\Delta\tau]\, d\hat{S}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau},\\
\hat{\boldsymbol{N}}^{(m)} = (1 - \hat{\eta}_{mm}\Delta\tau)\boldsymbol{k}_m + [\boldsymbol{k}_n\tilde{\Omega}^l - \boldsymbol{k}_l\tilde{\Omega}^n + (\boldsymbol{v}_{,\hat{x}^i}\cdot\boldsymbol{k}_m)\hat{\boldsymbol{l}}^i]\Delta\tau.
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Площади и нормали $dS^{(m)}$, $\boldsymbol{N}^{(m)} = N^{(m)}_i\boldsymbol{l}^i$ в начальный момент $\tau = 0$ находятся из равенства [5] $\boldsymbol{N}^{(m)}J\,dS^{(m)} = (\hat{\boldsymbol{N}}^{(m)}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}_{,x^i})\boldsymbol{l}^i\,d\hat{S}^{(m)}$, где

$$
N^{(m)}_i = \frac{d\hat{S}^{(m)}}{JdS^{(m)}}\,\{(1 - \hat{\eta}_{mm}\Delta\tau)\hat{y}^m_{,x^i} + [\tilde{\Omega}^l\hat{y}^n_{,x^i} - \tilde{\Omega}^n\hat{y}^l_{,x^i} + (\boldsymbol{v}_{,x^i}\cdot\boldsymbol{k}_m)]\Delta\tau\}. \tag{2.2}
$$

Определим усилия, действующие на единицу площади рассмотренных материальных площадок в момент $\tau + \Delta\tau$:

$$
\hat{\boldsymbol{q}}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau} = (\sigma^{ij} + \dot{\sigma}^{ij}\Delta\tau)(\hat{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{v}\Delta\tau)_{,x^i}N^{(m)}_j\,dS^{(m)}(d\hat{S}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau})^{-1}.
$$

Перейдем от второго симметричного тензора напряжений Пиола — Кирхгофа $\sigma = \sigma^{ij}\,\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{l}_j$ к тензору напряжений Коши $\hat{\sigma}^{mn} = J^{-1}\sigma^{ij}\hat{x}^m_{,x^i}\hat{x}^n_{,x^j}$ и введем тензор $\hat{s} = \hat{s}^{mn}\,\hat{\boldsymbol{l}}_m\hat{\boldsymbol{l}}_n$ ($\hat{s}^{mn} = J^{-1}\dot{\sigma}^{ij}\,\hat{x}^m_{,x^i}\hat{x}^n_{,x^j}$). Используя (2.1), (2.2) и пренебрегая малыми слагаемыми порядка $(\Delta\tau)^2$, получаем выражения

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{q}}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau} = \{(1 - J^{-1}\dot{J}\Delta\tau)\hat{y}^m_{,\hat{x}^i} + [\tilde{\Omega}^l\hat{y}^n_{,\hat{x}^i} - \tilde{\Omega}^n\hat{y}^l_{,\hat{x}^i} + (\boldsymbol{v}_{,\hat{x}^i}\cdot\boldsymbol{k}_m)]\Delta\tau\}\hat{\sigma}^{ij}\,\hat{\boldsymbol{l}}_j +{}&\\
+ (\hat{\sigma}^{ij}\boldsymbol{v}_{,\hat{x}^i} + \hat{s}^{ij}\,\hat{\boldsymbol{l}}_i)\,\hat{y}^m_{,\hat{x}^j}\Delta\tau&
\end{aligned}
$$

(m, n, l — четная перестановка индексов $1, 2, 3$). В декартовой системе координат с координатными линиями, направленными вдоль главных осей тензора $\hat{\sigma}$, выражения принимают вид

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{q}}^{(m)}_{\tau+\Delta\tau} = (1 - J^{-1}\dot{J}\Delta\tau)\hat{\sigma}_m\boldsymbol{k}_m + [\tilde{\Omega}^l\hat{\sigma}_n\boldsymbol{k}_n - \tilde{\Omega}^n\hat{\sigma}_l\boldsymbol{k}_l + (\boldsymbol{v}_{,\hat{y}^i}\cdot\boldsymbol{k}_m)\hat{\sigma}_i\boldsymbol{k}_i +{}&\\
+ \hat{\sigma}_m\boldsymbol{v}_{,\hat{y}^m} + \hat{s}^{mi}\,\boldsymbol{k}_i]\Delta\tau,&
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где $\hat{s} = \hat{s}^{ij}\,\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j$.

Проекции векторов (2.3) на нормали и касательные к площадкам, на которых они определяются, $Q^{ij}_{\tau+\Delta\tau} = \hat{\boldsymbol{q}}^{(i)}_{\tau+\Delta\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{N}}^{(j)}_{\tau+\Delta\tau}$ есть действующие на этих площадках напряжения, удовлетворяющие условиям $Q^{ij}_{\tau+\Delta\tau} = Q^{ji}_{\tau+\Delta\tau}$. Нормальные напряжения принимают значения главных компонент напряжений в момент $\tau + \Delta\tau$: $Q^{ii}_{\tau+\Delta\tau} = \hat{\sigma}_{i(\tau+\Delta\tau)} = \hat{\sigma}_i + \hat{\Sigma}^{ii}\Delta\tau$ (суммирование по i не проводится). Из условия равенства нулю касательных напряжений $Q^{mn}_{\tau+\Delta\tau} = [\hat{\Sigma}^{mn} + (\hat{\sigma}_n - \hat{\sigma}_m)(\tilde{\Omega}^l - \omega^l)]\Delta\tau = 0$ (m, n, l — четная перестановка индексов $1, 2, 3$) находится скорость вращения главных осей $\tilde{\Omega}^l = \omega^l + (\hat{\sigma}_m - \hat{\sigma}_n)^{-1}\hat{\Sigma}^{mn}$. Здесь

$\hat{\Sigma}^{ii} = \hat{s}^{ii} + \hat{\sigma}_i(2\hat{\eta}_{ii} - J^{-1}\dot{J})$, $\hat{\Sigma}^{mn} = \hat{s}^{mn} + (\hat{\sigma}_m + \hat{\sigma}_n)\hat{\eta}_{mn}$ — компоненты тензора скоростей напряжений Яумана [7] $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}^{ij}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j$ в декартовой системе координат с координатными линиями, направленными вдоль главных осей $\hat{\sigma}$. Диагональные компоненты $\hat{\Sigma}^{ii}$ принимают значения скоростей главных компонент напряжений:

$$\hat{\Sigma}^{ii} = \dot{\hat{\sigma}}_i = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{1}{\Delta\tau}\,(\hat{\sigma}_{i(\tau+\Delta\tau)} - \hat{\sigma}_i). \qquad (2.4)$$

В изотропном гиперупругом теле главные компоненты напряжений определяются из уравнений [5]

$$\hat{\sigma}_i = \hat{\mu}\,\varepsilon_i\,(\varepsilon_i - \hat{\chi}) + p, \qquad (2.5)$$

где $\hat{\mu} = \beta I_1^{-2}J^{-1}$; $\beta = \Psi_{,\Upsilon}$; $p = \Psi_{,J} = (\hat{\sigma}_m + \hat{\sigma}_n + \hat{\sigma}_l)/3$ — гидростатическое давление; $\Psi = \Psi(\Upsilon, J)$ — плотность энергии деформации; $\hat{\chi} = 2I_1(\Upsilon + 1/3)$;

$$J = (\varepsilon_m\varepsilon_n\varepsilon_l)^{1/2}, \qquad \Upsilon = \frac{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_n^2 + \varepsilon_l^2}{(\varepsilon_m + \varepsilon_n + \varepsilon_l)^2} - \frac{1}{3}, \qquad I_1 = \frac{1}{2}\,(\varepsilon_m + \varepsilon_n + \varepsilon_l)$$

(m, n, l — четная перестановка индексов $1, 2, 3$). Из приведенных выше формул для компонент тензора скоростей напряжений Яумана в случае изотропных гиперупругих тел получим следующие выражения:

$$\hat{\Sigma}^{ii} = [(\dot{J}\beta_{,J} + \dot{\Upsilon}\beta_{,\Upsilon})\beta^{-1} - 2I_1^{-1}\dot{I}_1 - J^{-1}\dot{J} + 2\hat{\eta}_{ii}](\hat{\sigma}_i - p) + \\ + \hat{\mu}\varepsilon_i(2\varepsilon_i\hat{\eta}_{ii} - \dot{\hat{\chi}}) + \dot{J}p_{,J} + \dot{\Upsilon}p_{,\Upsilon}. \qquad (2.6)$$

Подставив в (2.6) $\hat{\eta}_{ii} = \dot{\varepsilon}_i/(2\varepsilon_i)$, придем к значениям $\hat{\Sigma}^{ii} = \dot{\hat{\sigma}}_i$, получаемым также дифференцированием $\hat{\sigma}_i$ в (2.5) по τ. Используемые в [5] для главных осей условия убывания диаграмм зависимости напряжений от деформаций $\hat{\Sigma}^{ii}\hat{\eta}_{ii} < 0$ (суммирование по i не проводится) представимы теперь в виде [8–12] $\dot{\hat{\sigma}}_i\dot{\varepsilon}_i < 0$. В соответствии с этим диаграмма зависимости $\hat{\sigma}_i$ от ε_i считается падающей, если удлинение проходящего вдоль рассматриваемой главной оси волокна сопровождается уменьшением действующего в нем напряжения, а укорочение волокна — возрастанием напряжения. Отметим, что матрица коэффициентов при $\dot{\varepsilon}_i$ в (2.6) не является симметричной, в отличие от симметричной матрицы в уравнениях для скоростей главных компонент тензора напряжений Пиола — Кирхгофа σ: $\sigma_i = 2\Psi_{,\varepsilon_i} = J\varepsilon_i^{-1}\hat{\sigma}_i$, $\dot{\sigma}_i = 2\Psi_{,\varepsilon_i\varepsilon_m}\dot{\varepsilon}_m$.

Внедиагональные компоненты тензоров скоростей напряжений Яумана и скоростей деформаций $\hat{\Sigma}^{mn}$, $\hat{\eta}_{mn}$, умноженные на $\Delta\tau$, представляют собой приращения сдвигающих напряжений и сдвиговых деформаций на материальных площадках, на которых в момент τ действуют главные компоненты напряжений, а касательные напряжения и сдвиговые деформации равны нулю. Поэтому получаемые приращения являются также напряжениями и деформациями в момент времени $\tau + \Delta\tau$. В изотропных гиперупругих телах они связаны равенствами

$$\hat{\Sigma}^{mn} = B_l\hat{\eta}_{mn}, \qquad B_l = \frac{\hat{\mu}(\varepsilon_m + \varepsilon_n)}{\varepsilon_m + \varepsilon_n + \varepsilon_l}\,[2\varepsilon_m\varepsilon_n + (\varepsilon_m + \varepsilon_n)\varepsilon_l - \varepsilon_l^2]$$

(m, n, l — четная перестановка индексов $1, 2, 3$).

В исходном недеформированном состоянии материала $B_l = 2\mu_0 > 0$, μ_0 — модуль сдвига. Для того чтобы вызываемые скоростями $\hat{\Sigma}^{mn}$, $\hat{\eta}_{mn}$ сдвигающие напряжения и сдвиговые деформации имели одинаковое направление, требуется положительность коэффициентов B_l. Из условий $B_l > 0$, $\beta > 0$ следуют неравенства [5]

$$\varepsilon_l < (\varepsilon_m + \varepsilon_n)/2 + [(\varepsilon_m + \varepsilon_n)^2/4 + 2\varepsilon_m\varepsilon_n]^{1/2}, \qquad (2.7)$$

не зависящие от вида функции $\Psi(\Upsilon, J)$. Согласно (2.7) для главных компонент напряжений должны выполняться неравенства $\hat{\sigma}_m < \hat{\sigma}_n < \hat{\sigma}_l$, если $\varepsilon_m < \varepsilon_n < \varepsilon_l$. Отметим, что найденные скорости вращения главных осей тензоров $\hat{\sigma}$, $\hat{e}$ вследствие (2.5) и выражений для $\hat{\Sigma}^{mn}$ совпадают: $\hat{\mathbf{\Omega}} = \tilde{\mathbf{\Omega}}$.

3. Геометрия области, определяемой неравенствами (2.7). В трехмерном пространстве с декартовыми координатами $\varepsilon_i \geqslant 0$ неравенствами (2.7) определяется конус с вершиной в начале координат $\varepsilon_i = 0$. Найдем сечение этого конуса девиаторной плоскостью $\varepsilon_m + \varepsilon_n + \varepsilon_l = 3a$ (m, n, l — четная перестановка индексов $1, 2, 3$), отстоящей от начала координат на расстояние $a\sqrt{3}$. Точки девиаторной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\varepsilon_i \geqslant 0$, находятся внутри равностороннего треугольника (рис. 1) с вершинами на осях координат и сторонами длиной $3a\sqrt{2}$, лежащими в координатных плоскостях. Ниже эти стороны называются линиями $\varepsilon_i = 0$. Введем полярную систему координат (b, α) с началом в центре треугольника (b — радиус; α — полярный угол). В этой системе координат $\varepsilon_l = a(1 + \upsilon\cos\alpha)$, $\varepsilon_m = a[1 - \upsilon\cos(\alpha + \pi/3)]$, $\varepsilon_n = a[1 - \upsilon\cos(\alpha - \pi/3)]$, где $0 \leqslant \upsilon = (b/a)\sqrt{2/3} \leqslant 2$; $0 \leqslant \Upsilon = \upsilon^2/6 \leqslant 2/3$; $b = [(\varepsilon_m - a)^2 + (\varepsilon_n - a)^2 + (\varepsilon_l - a)^2]^{1/2}$; при $1 < \upsilon \leqslant 2$ углы изменяются в интервалах $-\pi + \alpha_* \leqslant \alpha \leqslant -\pi/3 - \alpha_*$, $-\pi/3 + \alpha_* \leqslant \alpha \leqslant \pi/3 - \alpha_*$, $\pi/3 + \alpha_* \leqslant \alpha \leqslant \pi - \alpha_*$ ($\alpha_* = \arccos(1/\upsilon)$). С использованием данных выражений равенство в (2.7) $\varepsilon_l = (\varepsilon_m + \varepsilon_n)/2 + [(\varepsilon_m + \varepsilon_n)^2/4 + 2\varepsilon_m\varepsilon_n]^{1/2}$ преобразуется к виду $\cos\alpha = 1/\upsilon - \upsilon/2$ и задает в декартовых координатах $X = b\cos\alpha$, $Y = b\sin\alpha$ дугу окружности $(X + a\sqrt{3/2})^2 + Y^2 = 9a^2/2$, соединяющей средние точки линий $\varepsilon_m = 0$, $\varepsilon_n = 0$, центр которой ($X = -a\sqrt{3/2}$, $Y = 0$) находится в средней точке линии $\varepsilon_l = 0$. Таким образом, в девиаторной плоскости неравенствами (2.7) определяется криволинейный треугольник со сторонами, являющимися дугами окружностей (рис. 1). Для выполнения неравенств $B_l > 0$ значения квадратов главных кратностей удлинений ε_i должны находиться в области внутри конической поверхности с образующими, пересекающими девиаторные плоскости по сторонам криволинейных треугольников.

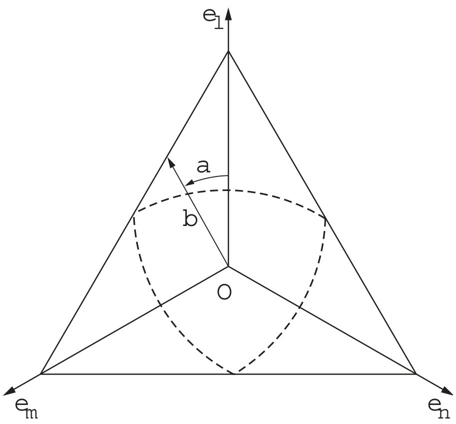

Рис. 1

4. Гравитационное сжатие шара. Определим сферически-симметричные состояния равновесия шара. Обозначим через r, $\hat{r}$ исходные и текущие радиальные координаты материальных точек ($\hat{r} = \hat{r}(r)$, $0 \leqslant r \leqslant R$); $\varepsilon_1 = (\hat{r}_{,r})^2$, $\varepsilon_2 = (\hat{r}/r)^2$ — квадраты главных кратностей удлинений; $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ — радиальное и окружные напряжения; $J = \varepsilon_2\varepsilon_1^{1/2}$; выполняются неравенства $\hat{r} \geqslant 0$, $\hat{r}_{,r} > 0$. Плотность материала шара изменяется от начального постоянного значения ρ до значения $\hat{\rho} = \rho J^{-1}$ в сжатом состоянии. Имеем уравнение равновесия

$$(\hat{r}^2\hat{\sigma}_1)_{,r} - \hat{\sigma}_2(\hat{r}^2)_{,r} + qr^2 = 0. \qquad (4.1)$$

В каждой материальной точке действие гравитационных сил со стороны всего шара сводится к силе притяжения $q = -G\rho M\hat{r}^{-2}$, определяемой на единицу исходного объема материала и направленной к центру шара (G — гравитационная постоянная; $M = (4/3)\pi r^3\rho$). На поверхности $r = R$ задается нулевое напряжение $\hat{\sigma}_1 = 0$; в центре шара $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ при $r = 0$.

Материал шара будем считать изотропным гиперупругим с определяющей функцией [5] $\Psi = \beta\Upsilon + 0{,}5KJ^{-1}(J - 1)^2$, непрерывно переходящей при стремлении деформаций

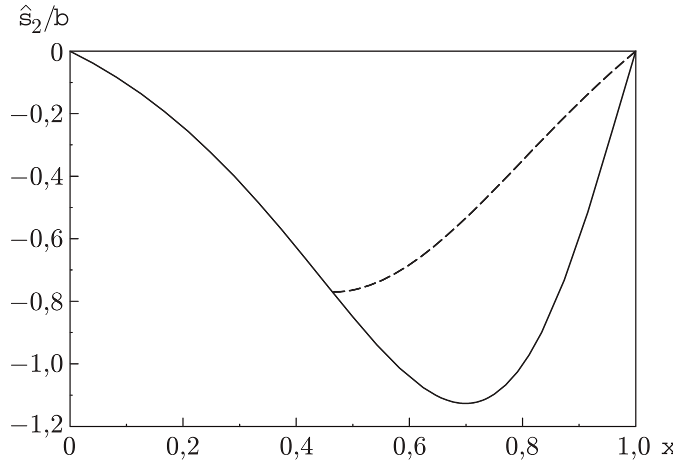

Рис. 2

к нулю в определяющую функцию закона Гука, с теми же двумя константами материала, что и в законе Гука: $\beta = 9\mu_0/4$, $\mu_0 = E_0/(2(1+\nu))$, $K = E_0/(3(1-2\nu))$ (E_0, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона). При $\hat\sigma_2 = \hat\sigma_3$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ из (2.5) находим

$$\hat\sigma_1 = \frac{8\beta\varepsilon_1^{1/2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)^3} + p, \qquad \hat\sigma_2 = \frac{1}{2}\,(3p-\hat\sigma_1), \quad p = \frac{K}{2}\Big(1-\frac{1}{J^2}\Big). \tag{4.2}$$

Согласно (4.2) на поверхности шара реализуются состояния, описываемые функциями $\gamma = 16\xi(\xi^2-1)/(3-\xi)^3$, $J = \gamma/c + [(\gamma/c)^2+1]^{1/2}$, $c = K/\beta = 8(1+\nu)/(27(1-2\nu))$, $\varepsilon_1 = J^{2/3}((1+\xi)/(1-\xi))^{2/3}$, $\varepsilon_2 = J^{2/3}((1-\xi)/(1+\xi))^{1/3}$, $p = \beta\gamma/J$, $\hat\sigma_1 = 0$, $\hat\sigma_2 = 3p/2$, зависящими от параметра $0 \leqslant \xi = (\varepsilon_1-\varepsilon_2)/(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \leqslant 1$ (в [5] ξ имеет противоположный знак). Напряжение $\hat\sigma_2$ по абсолютной величине возрастает и достигает максимума (порядка величины модуля сдвига μ_0) при $\xi = \xi_* = (2\sqrt{7}+1)/9$, после чего $\hat\sigma_2 \to 0$, $J \to 1$ при $\xi \to 1$ (сплошная кривая на рис. 2). (Кривые на рис. 2, 3 получены при $\nu = 0{,}3$.) При $\xi > \xi_*$ выполняется условие убывания зависимости напряжения от деформации $\hat\sigma_{2,\xi}\,\varepsilon_{2,\xi} < 0$.

В момент $\xi = \xi_{**} = 2\sqrt{3}-3 < \xi_*$ от данного решения при $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ответвляются решения уравнений (2.5) с несимметричным относительно радиального луча деформированием, в которых $\hat\sigma_1 = 0$, $\hat\sigma_2 = \hat\sigma_3 = 3\beta\gamma_1/(2J)$, $B_1 = 0$, $\gamma_1 = -4\zeta/(3+\sqrt{1+\zeta})^2$, $J = \gamma_1/c + [(\gamma_1/c)^2+1]^{1/2}$, $\varepsilon_1 = \zeta_1(1+\sqrt{1+\zeta}\,)$, $\varepsilon_2 = \zeta_1(1-\sqrt{1-\zeta/2}\,)$, $\varepsilon_3 = \zeta_1(1+\sqrt{1-\zeta/2}\,)$, $\zeta_1 = (\varepsilon_2+\varepsilon_3)/2 = (2J^2/(\zeta(1+\sqrt{1+\zeta}\,)))^{1/3}$, значение ζ уменьшается от 2 до 0. Несимметричное деформирование происходит при уменьшающемся напряжении $\hat\sigma_2$, причем меньшем, чем в решении с $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ (штриховая кривая на рис. 2). Ниже для сферически-симметричных состояний равновесия шара задаются значения параметра $\xi < \xi_{**}$. Величины ξ_*, ξ_{**} не зависят от констант материала.

Подставим $q = -(4/3)\pi G\rho^2 r\varepsilon_2^{-1}$ и выражения для $\hat\sigma_1$, $\hat\sigma_2$ из (4.2) в (4.1). Используя уравнение $\varepsilon_{2,r} = (2/r)(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}-\varepsilon_2)$, в безразмерных переменных получим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varepsilon_{1,r'} + \frac{1}{f_1}\Big(\frac{f_2}{r'} - \frac{Ar'}{\varepsilon_2}\Big) = 0, \qquad \varepsilon_{2,r'} = \frac{1}{r'}\,f_3 \tag{4.3}$$

относительно двух искомых функций ε_1, ε_2, где

$$f_1 = \frac{4\varepsilon_2(11\varepsilon_1\varepsilon_2 - 3\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_2^2)}{\sqrt{\varepsilon_1}(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)^4} + \frac{c}{2\varepsilon_1^2\varepsilon_2}, \qquad f_3 = 2(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}-\varepsilon_2),$$

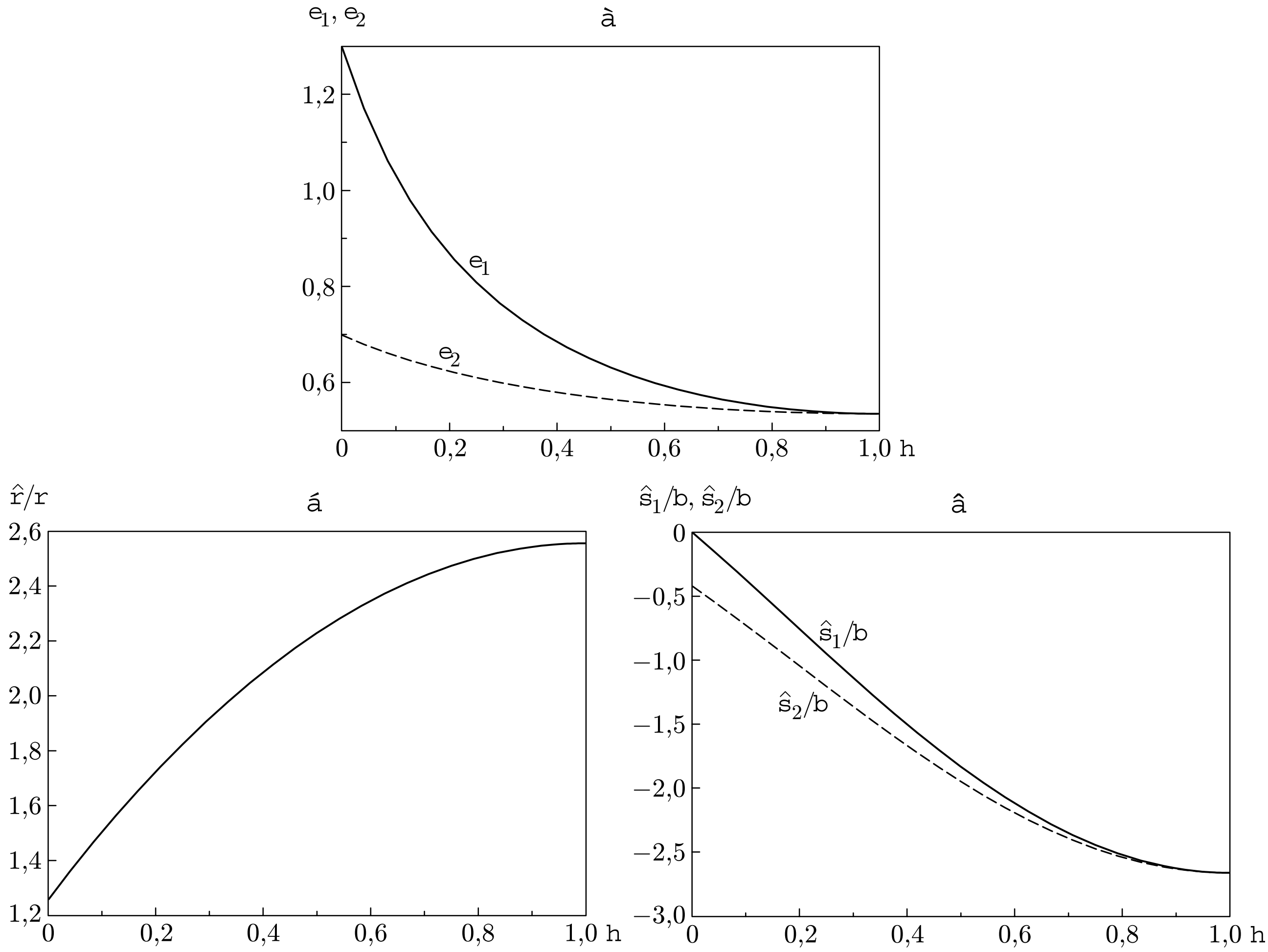

Рис. 3

$$f_2 = \Big(\frac{8\sqrt{\varepsilon_1}\varepsilon_2(4\varepsilon_2 - 7\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^4} + \frac{c}{\varepsilon_1\varepsilon_2^2}\Big) f_3 + \frac{24\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^3},$$

с константами $c = 8(1+\nu)/(27(1-2\nu))$, $A = 4G\pi\rho^2R^2/(3\beta)$ при $0 \leqslant r' = r/R \leqslant 1$. Решение системы (4.3), удовлетворяющее сформулированным выше краевым условиям, вычисляется методом Рунге — Кутты как решение задачи с начальными условиями, задаваемыми при $r' = 1$. Для исключения неопределенности в центре шара вычисления ведутся только на отрезке от $r' = 1$ до $r' = r'_\delta = 0{,}0001$. Задается значение ξ и по приведенным выше формулам вычисляются значения ε_1, ε_2 на поверхности шара. Решая систему (4.3) с заданными начальными условиями от $r' = 1$ до r'_δ, итерациями находим значение A, обеспечивающее вычисление решения до точки r'_δ, в которой с достаточной точностью выполняется равенство $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Следует отметить, что значение A необходимо определять с высокой точностью (10–12 цифр после запятой в представлении значения A для выполнения равенства $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ в точке r'_δ с точностью до 10^{-7}). В результате находится решение со значением A, при котором реализуется заданное значение ξ.

На рис. 3,*а*–*в* представлены зависимости квадратов главных кратностей удлинений ε_1, ε_2, отношение плотностей $\hat\rho/\rho$, напряжения $\hat\sigma_1/\beta$, $\hat\sigma_2/\beta$ в зависимости от $h = 1 - r'$ при $\nu = 0{,}3$; $\xi = 0{,}3$; $A = 2{,}292\,137\,324\,8$ (последние несколько цифр в значении A могут изменяться, если в (4.3) в качестве независимой взять другую переменную, например r'^2 вместо r').

Следует отметить, что линеаризация (4.1), (4.2) с использованием равенств $\varepsilon_1 = 1 + 2e_1$, $\varepsilon_2 = 1 + 2e_2$ при условии малости деформаций e_1, e_2, смещений $u = \hat{r} - r$ и их производных $u_{,r}$ приводит к уравнениям, формулируемым в линейной теории упругости:

$$\sigma_{1,r} + \frac{2}{r}(\sigma_1 - \sigma_2) - A\frac{\beta r}{R^2} = 0, \qquad e_1 = u_{,r}, \qquad e_2 = \frac{u}{r},$$

$$\sigma_1 = \frac{8\beta}{9(1-2\nu)}[(1-\nu)e_1 + 2\nu e_2], \qquad \sigma_2 = \frac{8\beta}{9(1-2\nu)}(e_2 + \nu e_1).$$

Из решения этих уравнений с краевыми условиями $\sigma_1 = 0$ на поверхности и $u = 0$ в центре шара находятся напряжения

$$\sigma_1 = \frac{(3-\nu)\beta A}{10(1-\nu)}\Big(\frac{r^2}{R^2} - 1\Big), \qquad \sigma_2 = \frac{\beta A}{10(1-\nu)}\Big[(1+3\nu)\frac{r^2}{R^2} - (3-\nu)\Big],$$

меньшие, чем в нелинейной теории, что объясняется неучетом изменений площадей материальных площадок и расстояний между материальными точками при сжатии шара. Так, при $\nu = 0{,}3$; $A \approx 2{,}29$ в центре шара получается значение давления $\sigma_1/\beta = \sigma_2/\beta \approx -0{,}88$, почти в три раза меньшее, чем на рис. 3,*в*.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Солодовников В. Н.** Определяющие уравнения изотропного гиперупругого тела // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 6. С. 178–183.
2. **Прагер В.** Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
3. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1986.
4. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
5. **Солодовников В. Н.** Устойчивость деформирования изотропных гиперупругих тел // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 142–151.
6. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
7. **Коробейников С. Н.** Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
8. **Хилл Р.** Некоторые вопросы поведения изотропных упругих тел при наложении малой деформации на конечную // Проблемы механики деформированного твердого тела: К 60-летию акад. В. В. Новожилова. Л.: Судостроение, 1970. С. 459–466.
9. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988.
10. **Трусдел К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды. М.: Мир, 1975.
11. **Hill R.** On constitutive inequalities for simple materials. 1 // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16, N 4. P. 130–135.
12. **Черных К. Ф.** Определяющие неравенства упругих тел // Механика сплошных сред и родственные проблемы анализа: К 80-летию акад. Н. И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1972. С. 623–633.

Поступила в редакцию 10/VI 2002 г.,
в окончательном варианте — 21/IV 2003 г.