$\mathcal{AMS}$ subject classification: 65G50, 65H10

Полулокальная сходимость для супер-метода Галлея

М. Прашант, Д.К. Гупта, С. Сингх

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Kharagpur, 721302, India

E-mails: maroju.prashanth@gmail.com (Прашант М.), dkg@maths.iitkgp.ernet.in (Гупта Д.К.), sukhjitmath@gmail.com (Сингх С.)

Прашант М., Гупта Д.К., Сингх С. Полулокальная сходимость для супер-метода Галлея // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 1. — С. 83–99.

Полулокальная сходимость супер-метода Галлея для решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах устанавливается при предположении, что вторая производная Фреше удовлетворяет условию ω-непрерывности. Это условие является более слабым, чем условия непрерывности Липшица и Гельдера. Важность нашей работы заключается в том, что при помощи численных примеров можно показать, что наш подход является успешным даже в тех случаях, когда условия непрерывности Липшица–Гельдера не удовлетворяются. Также можно избежать трудностей при вычислении второй производной Фреше, используя вместо нее разделенную разность, содержащую только первые производные Фреше. Получен ряд рекуррентных отношений, зависящих от двух параметров. Установлена теорема сходимости для определения границ априорной ошибки, а также области существования и единственности решений. Показано, что R-порядок сходимости метода по крайней мере 3. Представлено два численных примера для демонстрации эффективности нашего метода. В обоих примерах наблюдается улучшение областей существования и единственности решения по сравнению с [7].

Ключевые слова: *нелинейные операторные уравнения, условие ω-непрерывности, рекуррентные отношения, R-порядок сходимости, границы априорной ошибки.*

Prashanth M., Gupta D.K., Singh S. Semilocal convergence for the Super-Halley's method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 1. — P. 83–99.

The semilocal convergence of Super-Halley's method for solving nonlinear equations in Banach spaces is established under the assumption that the second Frёchet derivative satisfies the ω-continuity condition. This condition is milder than the well known Lipschitz and Hölder continuity conditions. The importance of our work lies in the fact that numerical examples can be given to show that our approach is successful even in cases where the Lipschitz and Hölder continuity conditions fail. Difficult computation of the second Frёchet derivative is also avoided by replacing it with a divided difference containing only the first Frёchet derivatives. A number of recurrence relations based on two parameters are derived. A convergence theorem is established to estimate a priori error bounds along with the domains of existence and uniqueness of the solutions. The R-order of convergence of the method is shown to be at least three. Two numerical examples are worked out to demonstrate the efficiency of our method. It is observed that in both examples the existence and uniqueness regions of solution are improved when compared with those obtained in [7].

Key words: *nonlinear operator equations, ω-continuity condition, recurrence relations, R-order of convergence, a priori error bounds.*

1. Введение

Цель данной статьи — проанализировать полулокальную сходимость супер-метода Галлея для решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах.

Пусть X и Y — два банаховых пространства, а Ω — непустое открытое выпуклое подмножество X. Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

где $F : \Omega \subseteq X \to Y$ — непрерывно дифференцируемый оператор из банахова пространства X со значениями в банаховом пространстве Y. Для решения (1) обычно используется хорошо известный метод Ньютона с квадратичной сходимостью. Теорема Канторовича [1] обеспечивает достаточные условия сходимости к решению с любого начального приближения в виде системы оценок ошибок. Для этой теоремы в основном даются два различных доказательства. Одно из них основано на рекуррентных отношениях, а другое — на мажорирующих функциях. Основное преимущество рекуррентных отношений состоит в том, что задача в банаховых пространствах легко сводится к более простым задачам с действительными последовательностями и функциями. Таким образом получена система действительных последовательностей и ограничений априорной ошибки, а также области существования и единственности решений для исследования сходимости метода.

В недавних работах эти нелинейные уравнения решались с использованием итерационных методов третьего порядка. Ясно, что чем выше порядок метода, тем выше будет скорость сходимости. Благодаря этому мы ищем компромисс между высокой скоростью сходимости и стоимостью вычислений. Конечно, для методов третьего порядка требуется большая стоимость вычислений, чем для других более простых методов, что делает их в общем невыгодными. Однако в некоторых случаях возможно их практическое применение. Эти методы также являются важными, поскольку для многих приложений, таких как жесткие системы уравнений, необходима быстрая сходимость методов их решения. Существует много итерационных методов третьего порядка, таких как методы Чебышева и Галлея для решения уравнения (1), повышающих квадратичный порядок сходимости до кубического. Анализ сходимости этих методов обычно выполняется в условиях Липшица, Гельдера и условиях ω-непрерывности первых/вторых производных Фреше соответствующих операторов. Анализ сходимости метода Чебышева с использованием рекуррентных отношений при условии непрерывности Гельдера на F'' выполнен в [5, 6]. Используя рекуррентные отношения, Жао и Ву [9] выполнили анализ сходимости метода Галлея при условии непрерывности Гельдера на F''. Анализ сходимости других итерационных методов третьего порядка для решения (1) с использованием рекуррентных отношений проведен в [8, 10] при наличии производных Фреше второго порядка, удовлетворяющих условиям непрерывности Липшица, Гельдера и условию ω-непрерывности. Здесь следует отметить, что не так много исследований было проведено по супер-методу Галлея для решения (1). Гутьеррес и Хернандес [3] установили сходимость супер-метода Галлея при предположении, что F'' удовлетворяет условию непрерывности Липшица. В нашей недавней работе [11] мы установили полулокальную сходимость супер-метода Галлея для решения (1) при предположении, что производная Фреше второго порядка удовлетворяет условию непрерывности Гельдера. Однако можно построить численные примеры, чтобы показать, что условия непрерывности как Липшица, так и Гельдера могут не выполняться.

Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение смешанного типа [2]:

$$F(x(s)) = x(s) + \sum_{i=1}^{m} \int_a^b k_i(s,t) l_i(x(t))\, dt - u(s), \quad s \in [a, b],$$

где $-\infty < a < b < \infty$, u, l_i и k_i для $i = 1, 2, \dots, m$ — известные функции, а x — непрерывная функция. Если $l_i''(x(t))$ является L_i-Липшиц непрерывной в Ω, $L_i \geq 0$ для $i = 1, 2, \dots, m$, то F'' не удовлетворяет условию Липшица при использовании супремум-нормы. В этом случае

$$\|F''(x) - F''(y)\| = \sum_{i=1}^{m} L_i \|x - y\|, \quad x, y \in \Omega.$$

Аналогичным образом, если $l_i''(x(t))$ является (L_i, p_i)-непрерывной по Гельдеру в Ω, $L_i \geq 0$, $p_i \in (0, 1]$ для $i = 1, 2, \dots, m$, мы имеем

$$\|F''(x) - F''(y)\| = \sum_{i=1}^{m} L_i \|x - y\|^{p_i}, \quad x, y \in \Omega.$$

Здесь также F'' не является непрерывной по Гельдеру при использовании супремум-нормы.

Эскуэрро и Хернандес [7] рассмотрели более общее условие для исследования полулокальной сходимости метода Галлея с использованием рекуррентных отношений

$$\|F''(x) - F''(y)\| \leq \omega \|x - y\|, \quad x, y \in \Omega, \tag{2}$$

где $\omega(x)$ является неубывающей непрерывной вещественной функцией для $x > 0$, такой что $\omega(x) \geq 0$ на F''. Видно, что если $\omega(x) = Lx^p$, $p \in (0, 1]$, это условие сводится к условию Гельдера, а при $\omega(x) = Lx$ — к условию непрерывности Липшица. Это послужило стимулом для нашей работы.

Статья построена следующим образом. Пункт 1 — введение. В пункте 2 описан супер-метод Галлея третьего порядка для решения (1). С использованием рекуррентных отношений в п. 3 выполнен анализ сходимости метода, представленного в п. 2, при предположении, что производная Фреше второго порядка F'' удовлетворяет условию ω-непрерывности. В пункте 4 представлены два численных примера и проводится сравнение их результатов с результатами, полученными в [7]. Выводы даны в п. 5.

2. Супер-метод Галлея

В данном пункте дано описание супер-метода Галлея [3] и семейства рекуррентных отношений. Начиная с правильно выбранной начальной аппроксимации x_0, мы можем записать этот метод для $n = 0, 1, 2, \dots$ в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &y_n = x_n - F'(x_n)^{-1} F(x_n), \\ &x_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} L_F(x_n) \big(I - L_F(x_n)\big)^{-1} (y_n - x_n), \\ &L_F(x) = F'(x)^{-1} F''(x) F'(x)^{-1} F(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Из формулы Тейлора мы получим

$$F'(z_n) = F'(x_n) + F''(x_n)(z_n - x_n) + \int_{x_n}^{z_n} F'''(x)(z_n - x)\, dx, \tag{4}$$

где $z_n = x_n + \theta(y_n - x_n)$ и $\theta \in (0, 1]$. Пренебрегая последним членом в (4), мы имеем

$$F''(x_n)(y_n - x_n) \approx \frac{1}{\theta}\big[F'(z_n) - F'(x_n)\big]. \tag{5}$$

Используя (5), из (3) для $n = 0, 1, 2, \ldots$ получим

$$\left.\begin{aligned}
&y_n = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n),\\
&z_n = x_n + \theta(y_n - x_n), \quad \theta \in (0, 1],\\
&x_{n+1} = y_n - \frac{1}{2}Q(x_n, y_n)\big[I + Q(x_n, y_n)\big]^{-1}(y_n - x_n),\\
&Q(x, y) = \frac{1}{\theta}F'(x)^{-1}\big[F'(x + \theta(y - x)) - F'(x)\big], \quad x, y \in \Omega.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Интересная черта итерационного метода (6) — его простота, обусловленная тем, что он не требует вычисления производной Фреше второго порядка F'' от F. В действительности, при использовании рекуррентных отношений сходимость этого метода установлена Эскуэрро и Хернандесом [4] при предположении, что производная Фреше второго порядка удовлетворяет условию непрерывности Липшица. Пусть F — нелинейный оператор дважды дифференцируемый по Фреше, Ω — открытое выпуклое подмножество, а $F'(x_0)^{-1} \in BL(Y, X)$ существует в некоторой точке $x_0 \in \Omega$, где $BL(Y, X)$ — множество ограниченных линейных операторов из Y в X. Предположим, что следующие условия выполняются на F:

C1. $\|F'(x_0)^{-1}\| \le \beta$,

C2. $\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \le \eta$,

C3. $\|F''(x)\| \le M \quad \forall\, x \in \Omega$,

C4. $\|F''(x) - F''(y)\| \le \omega(\|x - y\|) \quad \forall x, y \in \Omega$, где $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная неубывающая вещественная функция такая, что $\omega(0) \ge 0$,

C5. Существует непрерывная и неубывающая функция $h : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\omega(tx) \le h(t)\omega(x)$ при $t \in [0, 1]$ и $x \in \mathbb{R}_+$. (7)

Приведенное выше условие C4 более мягкое, чем условие непрерывности Липшица–Гельдера, поскольку для $\omega(x) = Nx$ и $\omega(x) = Nx^p$, $p \in (0, 1]$, оно сводится к условиям непрерывности Липшица и Гельдера соответственно.

Замечание. Условие C5 не требует никаких ограничений, поскольку вследствие неубывания функции ω всегда существует функция h, такая что $h(t) = 1$. Можно рассмотреть $h(t) = \sup_{x>0}\omega(tx)/\omega(x)$ для того, чтобы сделать границы ошибки данной задачи более жесткими.

Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ определим вещественные последовательности:

$$c_n = f(a_n)g(a_n, b_n), \qquad a_{n+1} = a_n f(a_n)c_n, \qquad b_{n+1} = b_n f(a_n)c_n h(c_n), \tag{8}$$

где

$$f(x) = \frac{2(1 - x)}{2 - 4x + x^2}, \tag{9}$$

$$g(x, y) = \frac{x^3}{8(1 - x)^2} + \Big[A_1 + \frac{A_2}{2} + \frac{A_3}{2}\Big(\frac{x}{1 - x}\Big)\Big]y \tag{10}$$

для A_1, A_2 и A_3, задаваемых путем

$$A_1 = \int_0^1 h(t)(1 - t)\,dt, \qquad A_2 = \int_0^1 h(\theta t)\,dt, \qquad A_3 = \int_0^1 h((1 - \theta)t)\,dt. \tag{11}$$

Пусть $a_0 = M\beta\eta$ и $b_0 = \beta\eta\omega(\eta)$ — два параметра, а $y_0 \in \Omega$ существует, поскольку существует $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$. Теперь мы получим

$$\|Q(x_0, y_0)\| \leq M\|\Gamma_0\| \, \|y_0 - x_0\| \leq M\beta\eta = a_0 < 1$$

и

$$\|x_1 - x_0\| \leq \left\| I + \frac{1}{2} Q(x_0, y_0)\big(I + Q(x_0, y_0)\big)^{-1} \right\| \|y_0 - x_0\|.$$

Используя лемму Банаха, мы получим

$$\left\|(I + Q(x_0, y_0))^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - a_0}.$$

Следовательно,

$$\|x_1 - x_0\| \leq \frac{2 - a_0}{2(1 - a_0)} \|y_0 - x_0\|.$$

Кроме того,

$$\|\Gamma_0\| \, \|y_0 - x_0\| \omega\big(\|y_0 - x_0\|\big) \leq \beta\eta\omega(\eta) = b_0.$$

На основании предположений, представленных в (7), для всех $n \geq 1$ можно доказать следующее:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{(I)} & \|\Gamma_n\| = \left\|F'(x_n)^{-1}\right\| \leq f(a_{n-1}) \|\Gamma_{n-1}\|, \\
\text{(II)} & \|y_n - x_n\| = \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq c_{n-1} \|y_{n-1} - x_{n-1}\|, \\
\text{(III)} & \|Q(x_n, y_n)\| \leq M\|\Gamma_n\| \, \|y_n - x_n\| \leq a_n, \\
\text{(IV)} & \|x_{n+1} - x_n\| \leq \dfrac{(2 - a_n)}{2(1 - a_n)} \|y_n - x_n\|, \\
\text{(V)} & \|\Gamma_n\| \, \|y_n - x_n\| \omega(\|y_n - x_n\|) \leq b_n.
\end{array}\right\} \tag{12}$$

Используем математическую индукцию, чтобы доказать (I)–(V). Предположим, что $x_1 \in \Omega$ и $a_0 \in (0, 2 - \sqrt{2})$. Отсюда

$$\|I - \Gamma_0 F'(x_1)\| \leq M\||\Gamma_0\| \, \|x_0 - x_1\| \leq \frac{a_0(2 - a_0)}{2(1 - a_0)} < 1.$$

При использовании леммы Банаха $\Gamma_1 = F'(x_1)^{-1}$ существует и

$$\|\Gamma_1\| \leq \frac{\|\Gamma_0\|}{1 - M\|\Gamma_0\| \, \|x_0 - x_1\|} \leq \frac{2(1 - a_0)}{2 - 4a_0 + a_0^2} \|\Gamma_0\| = f(a_0)\|\Gamma_0\|. \tag{13}$$

Теперь мы видим, что y_1 существует, поскольку Γ_1 существует. Из

$$x_{n+1} - y_n = -\frac{1}{2} Q(x_n, y_n) \left\|(I + Q(x_n, y_n))^{-1}\right\| \|y_n - x_n\|,$$

используя разложение в ряд Тейлора для $y_0 \in \Omega$, мы получим

$$
\begin{aligned}
F(x_1) = F(y_0) + F'(y_0)(x_1 - y_0) + \int_{y_0}^{x_1} F''(x)(x_1 - x)\,dx \\
= \int_0^1 \big[F''\big(x_0 + t(y_0 - x_0)\big) - F''(x_0)\big](1-t)\,dt\,(y_0 - x_0)^2 + \\
\frac{1}{2}\int_0^1 \big[F''(x_0) - F''\big(x_0 + \theta t(y_0 - x_0)\big)\big]\,dt\,(y_0 - x_0)^2 + \\
\frac{1}{2}\int_0^1 \big[F''(x_0 + \theta t(y_0 - x_0)) - F''\big(x_0 + t(y_0 - x_0)\big)\big]\,dt\,\times \\
(y_0 - x_0)Q(x_0, y_0)\big[I + Q(x_0, y_0)\big]^{-1}(y_0 - x_0) + \\
\int_0^1 F''\big(y_0 + t(x_1 - y_0)\big)(1-t)\,dt\,(x_1 - y_0)^2.
\end{aligned}
$$

Это дает

$$
\begin{aligned}
\|F(x_1)\| \le \omega\big(\|y_0 - x_0\|\big)\|y_0 - x_0\|^2\int_0^1 h(t)(1-t)\,dt + \frac{1}{2}\omega\big(\|y_0 - x_0\|\big)\|y_0 - x_0\|^2\int_0^1 h(\theta t)\,dt + \\
\frac{1}{2}\omega\big(\|y_0 - x_0\|\big)\|y_0 - x_0\|^2 \int_0^1 h\big((1-\theta)t\big)\,dt\frac{a_0}{1-a_0} + \frac{M}{8}\frac{a_0^2}{(1-a_0)^2}\|y_0 - x_0\|^2 \\
= \frac{a_0^2}{8(1-a_0)^2}M\|y_0 - x_0\|^2 + \left(A_1 + \frac{A_2}{2} + \frac{A_3 a_0}{2(1-a_0)}\right)\omega\big(\|y_0 - x_0\|\big)\|y_0 - x_0\|^2.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\|y_1 - x_1\| &\le \|\Gamma_1 F(x_1)\| \le \|\Gamma_1\|\,\|F(x_1)\| \\
&\le f(a_0)\left[\frac{a_0^2}{8(1-a_0)^2} + \left(A_1 + \frac{A_2}{2} + \frac{A_3 a_0}{2(1-a_0)}\right)b_0\right]\|y_0 - x_0\| \\
&\le f(a_0)g(a_0, b_0)\|y_0 - x_0\| = c_0\|y_0 - x_0\| \qquad (14)
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\|Q(x_1, y_1)\| &\le \frac{1}{\theta}\,\|\Gamma_1\|\,\|F'(x_1 + \theta(y_1 - x_1)) - F'(x_1)\| \\
&\le Mf(a_0)\|\Gamma_0\|\,\|y_0 - x_0\|c_0 \le a_0 f(a_0)c_0 = a_1. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\|x_2 - x_1\| \le \left\|I + \frac{1}{2}\,Q(x_1, y_1)\big(I + Q(x_1, y_1)\big)^{-1}\right\|\,\|y_1 - x_1\| \le \frac{(2 - a_1)}{2(1 - a_1)}\|y_1 - x_1\| \qquad (16)
$$

и

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma_1\|\,\|y_1 - x_1\|\,\omega(\|y_1 - x_1\|) &\le \|\Gamma_0\|f(a_0)c_0\|y_0 - x_0\|\,\omega(c_0\|y_0 - x_0\|) \\
&\le f(a_0)c_0 h(c_0)\|\Gamma_0\|\,\|y_0 - x_0\|\,\omega(\|y_0 - x_0\|) \\
&\le b_0 f(a_0)c_0 h(c_0) = b_1. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Итак, (I)–(V) следуют для $n = 1$ из (13)–(17). Пусть они имеют место для $n = k$. Действуя таким же образом, как указано выше, можно легко доказать, что они также справедливы для $n = k + 1$. Значит, (I)–(V) справедливы для всех $n \ge 1$.

3. Анализ сходимости

В данном пункте проводится анализ сходимости супер-метода Галлея, представленного в п. 2. Пусть $r_0 = 0.5$ — наименьший положительный ноль многочлена $r(x) = (2x-1)(x-2)(x^2-6x+4)$. Для представления некоторых свойств последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ потребуются следующие леммы:

Лемма 1. *Пусть f и g определяются при помощи (9) и (10). Тогда для $x \in (0, r_0]$*

(i) *f возрастает и $f(x) > 1$,*

(ii) *g возрастает для обоих аргументов при $y > 0$,*

(iii) *$f(\delta x) < f(x)$ и $g(\delta x, \delta y) < \delta g(x,y)$ для $\delta \in (0,1)$.*

Доказательство является простым, и поэтому мы его не приводим.

Лемма 2. *Пусть f и g определяются из (9) и (10) и $h(t) \le 1 \ \ \forall t \in [0,1]$. Определим функцию*

$$\Phi(x) = \frac{(2x-1)(x-2)(x^2-6x+4)}{4(1-x)\big(2A_1(1-x)+A_2(1-x)+A_3x\big)}, \tag{18}$$

где A_1, A_2 и A_3 задаются в (11). Если $a_0 \in (0, r_0]$ и $0 \le b_0 \le \Phi(a_0)$, то

(i) *$c_n f(a_n) \le 1$,*

(ii) *$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ являются убывающими и $a_n < 1$, $c_n < 1 \ \ \forall n$.*

Доказательство. Эта лемма может быть доказана методом индукции. Используя f и g, мы получим

$$c_n f(a_n) = f(a_n)^2 g(a_n, b_n) \le 1,$$

если и только если

$$b_n \le \frac{(2a_n-1)(a_n-2)(a_n^2-6a_n+4)}{4(1-a_n)\big(2A_1(1-a_n)+A_2(1-a_n)+A_3a_n\big)} = \Phi(a_n).$$

Из $0 < a_0 < r_0$ и $0 \le b_0 \le \Phi(a_0)$ получим $c_0 f(a_0) \le 1$. С использованием (8) это дает

$$a_1 = a_0 f(a_0) c_0 \le a_0 < 1.$$

Поскольку $f(x) > 1$ в $(0, r_0]$ и $h(t) \le 1 \ \ \forall t \in [0,1]$, мы получим

$$b_1 = b_0 f(a_0) c_0 h(c_0) \le b_0 f(a_0) c_0 \le b_0,$$
$$c_1 = f(a_1) g(a_1, b_1) \le f(a_0) g(a_0, b_0) = c_0 < c_0 f(a_0) \le 1.$$

Следовательно, лемма 2 доказана для $n = 1$. Пусть (i) и (ii) справедливы для $n = k$. Действуя аналогичным образом, можно легко доказать, что они также справедливы для $n = k+1$. Значит, лемма 2 доказана для всех $n \ge 1$. □

Лемма 3. *Пусть $a_0 \in (0, r_0)$, $0 < b_0 < \Phi(a_0)$ и $h(t) \le 1 \ \ \forall t \in [0,1]$. Определим $\gamma = a_1/a_0$. Тогда для $n \ge 1$ имеем:*

(i) $a_n \le \gamma^{2^{n-1}} a_{n-1} \le \gamma^{2^n - 1} a_0$, где неравенство строго справедливо для $n \ge 2$,

(ii) $b_n < \gamma^{2^{n-1}} b_{n-1} < \gamma^{2^n-1} b_0$,

(iii) $c_n < \gamma^{2^n} / f(a_0)$.

Доказательство. Докажем (i) и (ii) методом индукции. Поскольку $a_1 = \gamma a_0$ и $a_1 < a_0$ вследствие леммы 2 (i), мы получим $\gamma < 1$. Используя леммы 1 (i) и 2 (i), мы имеем

$$b_1 = b_0 f(a_0) c_0 h(c_0) = b_0 f(a_0)^2 g(a_0, b_0) h(c_0) \le f(a_0)^2 g(a_0, b_0) b_0 = \gamma b_0.$$

Следовательно, (i) и (ii) справедливы для $n = 1$. Пусть (i) и (ii) справедливы для $n = k$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k f(a_k) c_k = a_k f(a_k)^2 g(a_k, b_k) \\ &< \gamma^{2^{k-1}} a_{k-1} f\big(\gamma^{2^{k-1}} a_{k-1}\big)^2 g\big(\gamma^{2^{k-1}} a_{k-1}, \gamma^{2^{k-1}} b_{k-1}\big) \\ &< \gamma^{2^{k-1}} a_{k-1} f\big(a_{k-1}\big)^2 \gamma^{2^{k-1}} g\big(a_{k-1}, b_{k-1}\big) = \gamma^{2^k} a_k \end{aligned}$$

и

$$b_{k+1} = b_k f(a_k) c_k h(c_k) \le b_k f(a_k) c_k = b_k \frac{a_{k+1}}{a_k} < \gamma^{2^k} b_k$$

для $f(x) > 1$ в $(0, r_0)$. Это дает

$$a_{k+1} < \gamma^{2^k} a_k < \gamma^{2^k} \gamma^{2^{k-1}} \cdots \gamma^{2^0} a_0 = \gamma^{2^{k+1}-1} a_0$$

и

$$b_{k+1} < \gamma^{2^k} b_k < \gamma^{2^k} \gamma^{2^{k-1}} \cdots \gamma^{2^0} b_0 = \gamma^{2^{k+1}-1} b_0.$$

Следовательно, (i) и (ii) справедливы для всех $n \ge 1$. Из $\gamma = a_1/a_0 = f(a_0)^2 g(a_0, b_0)$ получим

$$c_n = f(a_n) g(a_n, b_n) < f\big(\gamma^{2^n-1} a_0\big) g\big(\gamma^{2^n-1} a_0, \gamma^{2^n-1} b_0\big) < \gamma^{2^n-1} f(a_0) g(a_0, b_0) = \frac{\gamma^{2^n}}{f(a_0)}.$$

Значит, (iii) справедливо. □

Пусть $\gamma = \dfrac{a_1}{a_0}$, $\Delta = \dfrac{1}{f(a_0)}$, $R = \dfrac{2 - a_0}{2(1 - a_0)(1 - \gamma\Delta)}$ и $\overline{\mathcal{B}}(x_0, R\eta)$, $\mathcal{B}(x_0, R\eta)$ — замкнутый и открытый шары с центром x_0 и радиусом $R\eta$ соответственно. Теперь из (12) получим

$$\|y_n - x_n\| \le c_{n-1} \|y_{n-1} - x_{n-1}\| \le \ldots \le \|y_0 - x_0\| \prod_{j=0}^{n-1} c_j \le \Big(\prod_{j=0}^{n-1} c_j\Big) \eta \tag{19}$$

и

$$\begin{aligned} \|x_{m+n} - x_m\| &\le \|x_{m+n} - x_{m+n-1}\| + \ldots + \|x_{m+1} - x_m\| \\ &\le \frac{2 - a_{m+n-1}}{2(1 - a_{m+n-1})} \|y_{m+n-1} - x_{m+n-1}\| + \ldots + \frac{2 - a_m}{2(1 - a_m)} \|y_m - x_m\| \\ &< \frac{(2 - a_{m+n-1})}{2(1 - a_{m+n-1})} \Big(\prod_{j=0}^{m+n-2} c_j\Big) \eta + \ldots + \frac{(2 - a_{m+n-1})}{2(1 - a_{m-1})} \Big(\prod_{j=0}^{n-1} c_j\Big) \eta \\ &< \frac{(2 - a_m)\Delta^m}{2(1 - a_m)} \bigg[\Big(\prod_{j=0}^{m+n-2} c_j\Big) + \ldots + \Big(\prod_{j=0}^{m+n-1} c_j\Big)\bigg] \eta. \end{aligned} \tag{20}$$

Следующая теорема устанавливает сходимость последовательности итераций $\{x_n\}$ и дает для нее границы априорной ошибки. Пусть $0 < a_0 \le r_0$ и $0 \le b_0 \le \Phi(a_0)$, где r_0 — наименьший положительный ноль многочлена $r(x) = (2x - 1)(x - 2)(x^2 - 6x + 4)$, а $\Phi(x)$ — функция, определяемая уравнением (18).

Теорема. *Пусть F — дважды непрерывно дифференцируемый по Фреше нелинейный оператор и предположения* C1–C5 *в* (7) *справедливы. Для $\overline{\mathcal{B}}(x_0, R\eta) \subseteq \Omega$ метод* (6), *начинающийся с x_0, генерирует последовательность итераций $\{x_n\}$, сходящихся к корню $x^*(1)$ с R-порядком по крайней мере 2. Кроме того, x_n, y_n и x^* лежат в $\overline{\mathcal{B}}(x_0, R\eta)$ и решение является единственным в $\mathcal{B}\big(x_0, 2/(M\beta) - R\eta\big)$. Граница ошибки на x^* задается как*

$$\|x^* - x_n\| \le \frac{2 - a_0\gamma^{2^n - 1}}{2(1 - a_0\gamma^{2^n-1})} \frac{\Delta^n \gamma^{2^n - 1}}{(1 - \gamma^{2^n}\Delta)}\, \eta. \tag{21}$$

Доказательство. Чтобы доказать, что $\{x_n\}$ сходится, достаточно показать, что $\{x_n\}$ является последовательностью Коши. Мы имеем $b_0 = \Phi(a_0) = 0$ и $c_0 f(a_0) = 1$ для $a_0 = r_0$. Следовательно, из (8) имеем: $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_0$, $c_n = c_{n-1} = \ldots = c_0$ и $b_n = b_{n-1} = \ldots = b_0 = 0$. Теперь из (12) мы получим

$$\|y_n - x_n\| \le c_{n-1}\|y_{n-1} - x_{n-1}\| = c_0\|y_{n-1} - x_{n-1}\| \le \ldots \le c_0^n\|y_0 - x_0\| = \Delta^n\eta$$

и

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le \frac{2 - a_n}{2(1 - a_n)}\|y_n - x_n\| \le \frac{2 - a_0}{2(1 - a_0)}\Delta^n\eta.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\|x_{m+n} - x_m\| &\le \|x_{m+n} - x_{m+n-1}\| + \ldots + \|x_{m+1} - x_m\| \\ &\le \frac{2 - a_0}{2(1 - a_0)}\Big[\Delta^{m+n-1} + \ldots + \Delta^m\Big]\eta = \frac{(2 - a_0)\Delta^m}{2(1 - a_0)}\left(\frac{1 - \Delta^n}{1 - \Delta}\right)\eta. \end{aligned}\tag{22}$$

Для $m = 0$ мы получим $x_n \in \overline{\mathcal{B}}(x_0, R\eta)$. Аналогичным образом можно доказать, что $y_n \in \overline{\mathcal{B}}(x_0, R\eta)$. Из (22) можно заключить, что $\{x_n\}$ — последовательность Коши, поскольку $\Delta = 1/f(a_0) < 1$. Пусть $0 < a_0 < r_0$ и $b_0 < \Phi(a_0)$. Теперь из (12) и пункта (iii) леммы 3 для $n \ge 1$ имеем

$$\|y_n - x_n\| \le c_{n-1}\|y_{n-1} - x_{n-1}\| \le \ldots \le \|y_0 - x_0\|\prod_{j=0}^{n-1} c_j < \prod_{j=0}^{n-1}\big(\gamma^{2^j}\Delta\big)\eta = \gamma^{2^n-1}\Delta^n\eta,$$

где $\gamma = a_1/a_0 < 1$ и $\Delta = 1/f(a_0) < 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\|x_{m+n} - x_m\| &\le \|x_{m+n} - x_{m+n-1}\| + \ldots + \|x_{m+1} - x_m\| \\ &\le \frac{2 - a_{m+n-1}}{2(1 - a_{m+n-1})}\|y_{m+n-1} - x_{m+n-1}\| + \ldots + \frac{2 - a_m}{2(1 - a_m)}\|y_m - x_m\| \\ &< \frac{(2 - a_{m+n-1})}{2(1 - a_{m+n-1})}\gamma^{2^{m+n-1}-1}\Delta^{m+n-1}\eta + \ldots + \frac{2 - a_m}{2(1 - a_m)}\gamma^{2^m-1}\Delta^m\eta \\ &< \frac{(2 - a_m)\Delta^m}{2(1 - a_m)}\Big[\gamma^{2^{m+n-1}-1}\Delta^{n-1} + \ldots + \gamma^{2^m-1}\Big]\eta \\ &< \frac{(2 - a_0\gamma^{2^m-1})\gamma^{2^m-1}\Delta^m}{2(1 - \gamma^{2^m-1}a_0)}\Big[\gamma^{2^m[2^{n-1}-1]}\Delta^{n-1} + \ldots + \gamma^{2^m[2-1]}\Delta + 1\Big]\eta.\end{aligned}$$

Используя неравенство Бернулли, для каждого вещественного числа $x > -1$ и каждого целого числа $k \geq 0$ имеем $(1+x)^k - 1 \geq kx$. Таким образом,

$$\|x_{m+n} - x_m\| < \frac{(2 - a_0\gamma^{2^m-1})\gamma^{2^m-1}\Delta^m}{2(1-\gamma^{2^m-1}a_0)} \, \frac{1-\gamma^{2^m n}\Delta^n}{(1-\gamma^{2^m}\Delta)}\,\eta. \tag{23}$$

Для $m = 0$ мы получим

$$\|x_n - x_0\| < \frac{2-a_0}{2(1-a_0)} \, \frac{1-\gamma^n\Delta^n}{1-\gamma\Delta}\,\eta < R\eta. \tag{24}$$

Следовательно, $x_n \in \mathcal{B}(x_0, R\eta)$. Кроме того, $y_n \in \mathcal{B}(x_0, R\eta)$ очевидно вытекает из следующего результата:

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - x_0\| &\leq \|y_{n+1} - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| + \ldots + \|x_1 - x_0\| \\
&\leq \|y_{n+1} - x_{n+1}\| + \frac{2-a_n}{2(1-a_n)}\|y_n - x_n\| + \ldots + \frac{2-a_0}{2(1-a_0)}\|y_0 - x_0\| \\
&< \frac{2-a_{n+1}}{2(1-a_{n+1})}\|y_{n+1} - x_{n+1}\| + \ldots + \frac{2-a_0}{2(1-a_0)}\|y_0 - x_0\| \\
&< \ldots < \frac{2-a_0}{2(1-a_0)} \, \frac{1-\gamma^{n+1}\Delta^{n+1}}{1-\gamma\Delta}\,\eta < R\eta.
\end{aligned}$$

Находя предел при $n \to \infty$ в (22) и (24), мы получим $x^* \in \overline{\mathcal{B}}(x_0, R\eta)$. Теперь нам нужно показать, что x^* — решение $F(x) = 0$. Мы имеем $\|F(x_n)\| \leq \|F'(x_n)\|\,\|\Gamma_n F(x_n)\|$ и последовательность $\{\|F'(x_n)\|\}$ ограничена, поскольку

$$\|F'(x_n)\| \leq \|F'(x_0)\| + M\|x_n - x_0\| < \|F'(x_0)\| + MR\eta.$$

Найдя предел при $n \to \infty$, мы получим $F(x^*) = 0$, поскольку F непрерывно. Чтобы показать, что нулевое x^* единственно, будем считать, что y^* — другой корень (1) в $\mathcal{B}(x_0, 2/(M\beta) - R\eta) \cap \Omega$. Тогда

$$0 = F(y^*) - F(x^*) = \int_0^1 F'\big(x^* + t(y^* - x^*)\big)\,dt\,(y^* - x^*).$$

Это приводит к $y^* = x^*$, если оператор $P = \displaystyle\int_0^1 F'\big(x^* + t(y^* - x^*)\big)\,dt$ является обратимым. Из

$$\begin{aligned}
\|I - \Gamma_0 P\| = \|\Gamma_0(F'(x_0) - P)\| &= \left\|\Gamma_0 \int_0^1 \big[F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\big]\,dt\right\| \\
&\leq M\beta \int_0^1 \big((1-t)\|x^* - x_0\| + t\|y^* - x_0\|\big)\,dt < \frac{M\beta}{2}\Big(R\eta + \frac{2}{M\beta} - R\eta\Big) = 1
\end{aligned}$$

и в соответствии с теоремой Банаха [1] P является обратимым. □

3.1. R-порядок сходимости $(2+p)$

В данном пункте мы устанавливаем, что R-порядок сходимости метода равен $(2+p)$, а не 2, как установлено в п. 3, поскольку сам метод третьего порядка. Для $h(t) = t^p$, $p \in (0,1]$, мы получим: $A_1 = \int_0^1 h(t)(1-t)\,dt = \frac{1}{(1+p)(2+p)}$, $A_2 = \int_0^1 h(\theta t)\,dt = \frac{\theta^p}{(1+p)}$, $A_3 = \int_0^1 h((1-\theta)t)\,dt = \frac{(1-\theta)^p}{(1+p)}$. Следовательно, последовательность b_n сводится к

$$b_{n+1} = b_n f(a_n)^{2+p} g(a_n, b_n)^{1+p} \tag{25}$$

при

$$g(x,y) = \frac{x^3}{8(1-x)^2} + \frac{2+\theta^p(2+p)}{2(1+p)(2+p)} + \frac{(1-\theta)^p xy}{2(1+p)(1-x)}. \tag{26}$$

Это дает $g(\delta x, \delta^{p+1} y) < \delta^{p+1} g(x,y)$ для $x \in (0, r_0]$ и $\delta \in (0,1)$.

Лемма 4. *Пусть* $0 < a_0 < r_0$, $0 < b_0 < \Phi_p(a_0)$, $h(t) \le t^p \le 1$ *и* $\gamma = \dfrac{a_1}{a_0}$. *Для* $n \ge 1$ *получим*:

(i) $a_n \le \gamma^{(2+p)^{n-1}} a_{n-1} \le \gamma^{((2+p)^n - 1)/(1+p)} a_0, \quad n \ge 2,$

(ii) $b_n \le (\gamma^{(2+p)^{n-1}})^{1+p} b_{n-1} \le \gamma^{(2+p)^n - 1} b_0, \quad n \ge 2,$

(iii) $c_n \le \dfrac{\gamma^{(2+p)^n}}{f(a_0)}, \quad n \ge 0.$

Доказательство. Мы можем доказать (i) и (ii) методом индукции. Поскольку $a_1 = \gamma a_0$ и $a_1 < a_0$, мы получим $\gamma < 1$. Используя (i) леммы 1, мы имеем

$$b_1 = b_0 f(a_0)^{p+2} g(a_0, b_0)^{p+1} < \big(f(a_0)^2 g(a_0, b_0)\big)^{1+p} b_0 = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{1+p} b_0 = \gamma^{1+p} b_0.$$

Предположим, что (i) и (ii) справедливы для $n = k$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{k+1} = a_k f(a_k)^2 g(a_k, b_k) &\le \gamma^{(p+2)^{k-1}} a_{k-1} f(a_{k-1})^2 g\Big(\gamma^{(2+p)^{k-1}} a_{k-1}, \big(\gamma^{(2+p)^{k-1}}\big)^{1+p} b_{k-1}\Big) \\ &\le \gamma^{(p+2)^{k-1}} a_{k-1} f(a_{k-1})^2 \big(\gamma^{(2+p)^{k-1}}\big)^{1+p} g(a_{k-1}, b_{k-1}) = \gamma^{(2+p)^k} a_k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_{k+1} \le \gamma^{(2+p)^k} a_k \le \gamma^{(2+p)^k} \gamma^{(2+p)^{k-1}} \cdots \gamma^{(2+p)^0} a_0 = \gamma^{((p+2)^{k+1} - 1)/(p+1)} a_0.$$

Из $f(x) > 1$ на $(0, r_0]$ получим

$$b_{k+1} = b_k f(a_k)^{p+2} g(a_k, b_k)^{p+1} \le b_k \big(f(a_k)^2 g(a_k, b_k)\big)^{p+1} = b_k \Big(\frac{a_{k+1}}{a_k}\Big)^{p+1} \le \big(\gamma^{(p+2)^k}\big)^{p+1} b_k.$$

Следовательно,

$$b_{k+1} = \big(\gamma^{(p+2)^k}\big)^{p+1} b_k < \big(\gamma^{(p+2)^k}\big)^{p+1} \big(\gamma^{(p+2)^{k-1}}\big)^{p+1} \cdots \big(\gamma^{(p+2)^0}\big)^{p+1} b_0 = \gamma^{(p+2)^{k+1} - 1} b_0.$$

Таким образом, (i) и (ii) справедливы в соответствии с методом индукции, (iii) следует из

$$\begin{aligned} c_n = f(a_n) g(a_n, b_n) &\le f\big(\gamma^{((p+2)^n - 1)/(p+1)} a_0\big) g\big(\gamma^{((p+2)^n - 1)/(p+1)} a_0, \gamma^{(p+2)^n - 1} b_0\big) \\ &\le \gamma^{(p+2)^n} \frac{f(a_0) g(a_0, b_0)}{\gamma} = \frac{\gamma^{(p+2)^n}}{f(a_0)}, \end{aligned}$$

поскольку $\gamma = a_1/a_0 = f(a_0)^2 g(a_0, b_0)$. Теперь из (19) и пункта (iii) леммы 4 получим

$$\|y_n - x_n\| \le \left(\prod_{j=0}^{n-1} c_j\right)\eta < \left(\prod_{j=0}^{n-1} \big(\gamma^{(p+2)^j} \Delta\big)\right)\eta = \gamma^{((p+2)^n - 1)/(p+1)} \Delta^n \eta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|x_{m+n}-x_m\| &\leq \frac{2-a_m}{2(1-a_m)}\Bigg[\prod_{j=0}^{m+n-2} f(a_j)g(a_j,b_j)+\ldots+\prod_{j=0}^{m-1} f(a_j)g(a_j,b_j)\Bigg]\eta \\ &\leq \frac{2-a_m}{2(1-a_m)}\Delta^m\Big[\gamma^{((p+2)^{m+n-1}-1)/(p+1)}\Delta^{n-1}+\ldots+\gamma^{((p+2)^m-1)/(p+1)}\Big]\eta \\ &\leq \frac{2-\gamma^{((p+2)^m-1)/(p+1)}a_0}{2\big(1-\gamma^{((p+2)^m-1)/(p+1)}a_0\big)}\Delta^m\gamma^{((p+2)^m-1)/(p+1)}\times \\ &\quad\Big[\gamma^{(p+2)^m((p+2)^{n-1}-1)/(p+1)}\Delta^{n-1}+\ldots+\gamma^{(p+2)^m((p+2)^{n-1}-1)/(p+1)}\Delta^{n-1}+1\Big].\end{aligned}$$

В соответствии с неравенством Бернулли для каждого вещественного числа $x > -1$ и каждого целого числа $k \geq 0$ имеем $(1+x)^k - 1 \geq kx$. Это дает

$$\|x_{m+n}-x_m\| \leq \frac{(2-\gamma^{((p+2)^m-1)/(p+1)}a_0)}{2\big(1-\gamma^{((p+2)^m-1)/(p+1)}a_0\big)}\Delta^m\gamma^{((p+2)^m-1)/(p+1)}\frac{1-\gamma^{(p+2)^m}n\Delta^n}{1-\gamma^{(p+2)^m}\Delta}\,\eta. \tag{27}$$

Таким образом, границы ошибки на $\{x_n\}$ задаются как

$$\|x^*-x_n\| \leq \frac{(2-\gamma^{((2+p)^n-1)/(1+p)}a_0)}{2\big(1-\gamma^{((2+p)^n-1)/(1+p)}a_0\big)}\,\gamma^{((2+p)^n-1)/(1+p)}\frac{\Delta^n}{1-\gamma^{(2+p)^n}\Delta}\,\eta. \tag{28}$$

□

4. Численные примеры

Пример 1. Пусть $\mathbb{X} = C[a,b]$ — пространство непрерывных функций на $[a,b]$. Рассмотрим задачу нахождения решений нелинейных интегральных уравнений $F(x) = 0$ смешанного типа [2], задаваемых так:

$$F(x)(s) = x(s) - f(s) - \lambda\int_a^b G(s,t)\big[x(t)^{2+p} + x(t)^3\big]\,dt, \quad p\in(0,1],\ \lambda\in\mathbb{R}, \tag{29}$$

где f и x — непрерывные функции, такие что $f(s) > 0$, $s\in[a,b]$, и функция ядра G непрерывна и неотрицательна в $[a,b]\times[a,b]$.

Используя норму в качестве супремум-нормы и $G(s,t)$ в качестве функции Грина:

$$G(s,t) = \begin{cases} (b-s)(t-a)/(b-a), & t\leq s,\\ (s-a)(b-t)/(b-a), & s\leq t,\end{cases}$$

вычислим скалярные величины M, β, η и функцию $\omega(x)$. Первую и вторую производные F можно легко получить и задать как

$$F'(x)u(s) = u(s) - \lambda\int_a^b G(s,t)\big[(2+p)x(t)^{1+p} + 3x(t)^2\big]u(t)\,dt, \quad u\in\Omega,$$

$$F''(x)(uv)(s) = -\lambda\int_a^b G(s,t)\big[(1+p)(2+p)x(t)^p + 6x(t)\big](uv)(t)\,dt, \quad u,v\in\Omega.$$

Для $p\in(0,1)$ здесь следует отметить, что вторая производная F'' не удовлетворяет условию непрерывности Липшица–Гельдера, поскольку

$$\begin{aligned}\|F''(x)-F''(y)\| &= \left\|\lambda\int_a^b G(s,t)\big[(1+p)(2+p)(x(t)^p-y(t)^p)+6(x(t)-y(t))\big]\,dt\right\|\\ &\le |\lambda|\max_{s\in[a,b]}\left|\int_a^b G(s,t)\,dt\right|\big[(1+p)(2+p)\|x(t)^p-y(t)^p\|+6\|x(t)-y(t)\|\big]\\ &\le |\lambda|\,\|l\|\big[(1+p)(2+p)\|x-y\|^p+6\|x-y\|\big]\quad \forall x,y\in\Omega,\end{aligned}$$

где

$$\|l\|=\max_{s\in[a,b]}\left|\int_a^b G(s,t)\,dt\right|.$$

Например, для $p=1/2$ приведенное выше условие примет следующий вид:

$$\|F''(x)-F''(y)\|\le|\lambda|\,\|l\|\left[\frac{15}{4}\|x-y\|^{1/2}+6\|x-y\|\right]\quad\forall x,y\in\Omega,$$

что показывает, что F'' не удовлетворяет ни условию непрерывности Липшица, ни условию непрерывности Гельдера. Однако оно удовлетворяет условию ω-непрерывности, задаваемому путем

$$\|F''(x)-F''(y)\|\le\omega(\|x-y\|)\quad\forall x,y\in\Omega,$$

где $\omega(x)=|\lambda|\,\|l\|\big[(1+p)(2+p)x^p+6x\big]$. Это приводит к $\omega(tx)\le t^p\omega(x)$ для $p\in(0,1)$ и $t\in[0,1]$. Таким образом,

$$A_1=\int_0^1 h(t)(1-t)\,dt=\frac{1}{(p+1)(p+2)},\qquad A_2=\frac{\theta^p}{(1+p)},\qquad A_3=\frac{(1-\theta)^p}{(1+p)}.$$

Легко вычислить

$$\|F(x_0)\|\le\|x_0-f\|+|\lambda|\,\|l\|\big[\|x_0\|^{2+p}+\|x_0\|^3\big]$$

и

$$\|F''(x)\|\le|\lambda|\,\|l\|\big[(1+p)(2+p)\|x\|^p+6\|x\|\big].$$

Это дает

$$M=|\lambda|\,\|l\|\big[(1+p)(2+p)\|x\|^p+6\|x\|\big].$$

Кроме того,

$$\|I-F'(x_0)\|\le|\lambda|\,\|l\|\big[(2+p)\|x_0\|^{1+p}+3\|x_0\|^2\big].$$

Если $|\lambda|\,\|l\|\big[(2+p)\|x_0\|^{1+p}+3\|x_0\|^2\big]<1$, то, согласно теореме Банаха [1], мы получим

$$\|\Gamma_0\|=\|F'(x_0)^{-1}\|\le\frac{1}{1-|\lambda|\,\|l\|\big[(2+p)\|x_0\|^{1+p}+3\|x_0\|^2\big]}=\beta$$

и

$$\|\Gamma_0F(x_0)\|\le\frac{\|x_0-f\|+|\lambda|\,\|l\|\big[\|x_0\|^{2+p}+\|x_0\|^3\big]}{1-|\lambda|\,\|l\|\big[(2+p)\|x_0\|^{1+p}+3\|x_0\|^2\big]}=\eta.$$

Для $a = 0$ и $b = 1$ мы получим

$$\|l\| = \max_{s\in[0,1]} \left| \int_0^1 G(s,t)\,dt \right| = \frac{1}{8}.$$

Для $\lambda = 1/3$, $p = 1/2$, $f(s) = 1$, $\theta = 1/2$ и начальной точки $x_0 = x_0(s) = 1$ в $[0,1]$ мы получим $\|\Gamma_0\| \le \beta = 1.2973$, $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \le \eta = 0.108108$, $\omega(\eta) = 0.0784017$ и $b_0 = \beta\eta\omega(\eta) = 0.0109957$. Теперь найдем область вида $\Omega = \mathcal{B}(x_0, S)$ такую, что $\Omega = \mathcal{B}(x_0, S) \subseteq C[0,1] = \mathbb{X}$.

Таким образом, мы получим $M = M(S) = 0.15625S^p + 0.25S$ и $a_0 = a_0(S) = M(S)\beta\eta = 0.0219138S^p + 0.03506208S$. Для вычисления S из условий теоремы необходимо, чтобы $\overline{\mathcal{B}}(x_0, R\eta) \subseteq \Omega$. Для этого достаточно проверить, что $S - (R(S)\eta + 1) > 0$ и $\Phi(a_0(S)) - b_0 > 0$. Следовательно, $S \in (1.4689, 11.9076)$, что очевидно из рисунка (часть (а)). Кроме того, $a_0(S) < r_0 = 0.5$, если и только если $S < 12.0875$. Следовательно, если мы возьмем $S = 5.0$, то получим $\Omega = \mathcal{B}(1, 5.0)$, $M = 1.599385$, $a_0 = 0.22431$ и $b_0 = 0.0109957 < 0.472289 = \Phi(0.184076)$. Таким образом, условия теоремы удовлетворяются. Значит, решение (29) существует в шаре $\overline{\mathcal{B}}(1, 0.386765) \subseteq \Omega$ и единственно в шаре $\mathcal{B}(1, 0.5771451) \cap \Omega$.

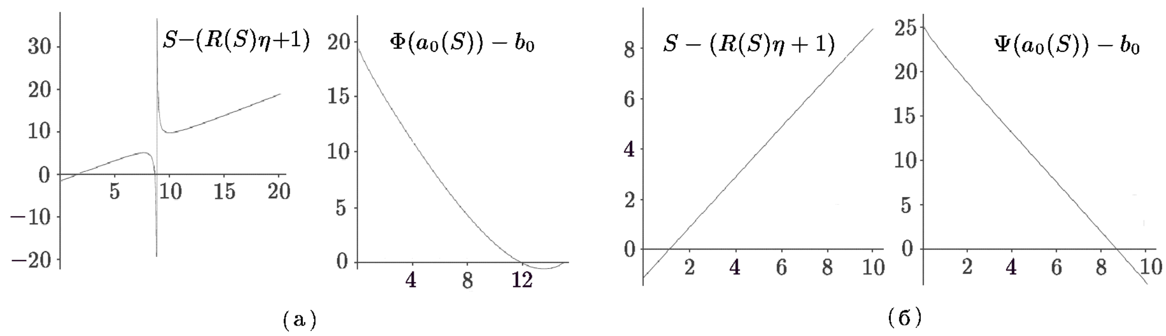

Рис. Условия, налагаемые на параметр S

С другой стороны, из [7] мы получим A и $\Psi(x)$:

$$A = \int_0^1 (1-t)t^p = \frac{1}{(1+p)(2+p)}, \qquad \Psi(x) = \frac{2(x^2 - 3x + 1)}{A(2-x)}.$$

Для получения S из [7, теорема 2.6] необходимо, чтобы $\overline{\mathcal{B}}(x_0, R\eta) \subseteq \Omega$. Для этого достаточно проверить, что $S - (R(S)\eta + 1) > 0$ и $\Psi(a_0(S)) - b_0 > 0$. Это дает $S \in (1.4689, 11.9076)$, что очевидно из рисунка (часть (б)). Кроме того, $a_0(S) < (3-\sqrt{5})/2$, если и только если $S < 9.0172$. Следовательно, если мы возьмем $S = 5.0$, то получим $\Omega = \mathcal{B}(1, 5.0)$, $M = 1.599385$, $a_0 = 0.22431$ и $b_0 = 0.0109957 < \Psi(a_0)$. Таким образом, также в этом случае условия теоремы удовлетворяются. Следовательно, решение уравнения (29) существует в шаре $\overline{\mathcal{B}}(1, 0.12862) \subseteq \Omega$ и единственно в шаре $\mathcal{B}(1, 0.8529) \cap \Omega$. Из этого следует, что наш анализ сходимости дает лучший шар существования, но не лучший шар единственности, чем в [7]. Границы ошибки для нашего метода приведены в табл. 1. Сравнение границ ошибки, полученных при помощи нашего метода, с границами ошибки, полученными методом Галлея [7], не приводится, поскольку не наблюдалось значительного улучшения.

Таблица 1. Границы ошибки

n	1	2	3	4	5	6	7	8
Наш метод	0.219757	0.105402	0.040108	0.0109369	0.00164321	1.70307e−7	1.45606e−12	1.43201e−22

Пример 2. Пусть $\mathbb{X} = C[0,1]$ — пространство непрерывных функций на $[0,1]$. Рассмотрим интегральное уравнение $F(x) = 0$, где

$$F(x)(s) = x(s) - s + \frac{1}{2}\int_0^1 s\cos(x(t))\,dt. \tag{30}$$

Производные Фреше первого и второго порядка оператора F могут быть заданы как

$$F'(x)u(s) = u(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 s\sin(x(t))u(t)\,dt,$$
$$F''(x)uv(s) = -\frac{1}{2}\int_0^1 s\cos(x(t))uv(t)\,dt.$$

Пусть $x_0 = x_0(s) = s$. Используя норму

$$\|x\| = \max_{s\in[0,1]} |x(s)|, \tag{31}$$

мы получим

$$\|F(x_0)\| \le \frac{1}{2}\sin 1.$$

Положим $v(s) = u(s) - \frac{s}{2}\int_0^1 u(t)\sin(x(t))\,dt$ и умножим на $\int_0^1 \sin(x(s))\,ds$. Тогда мы имеем

$$\int_0^1 v(s)\sin(x(s))\,ds = \int_0^1 u(s)\sin(x(s))\,ds - \int_0^1 \frac{s}{2}\sin(x(s))\left[\int_0^1 u(t)\sin(x(t))\,dt\right]ds.$$

Это дает

$$\int_0^1 u(s)\sin(x(s))\,ds = \frac{\displaystyle\int_0^1 v(s)\sin(x(s))}{1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{s}{2}\sin(x(s))\,ds}. \tag{32}$$

Следовательно,

$$u(s) = \left[F'(x)\right]^{-1}v(s) = v(s) + \frac{\displaystyle\int_0^1 v(s)\sin(x(s))}{1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{s}{2}\sin(x(s))\,ds}.$$

Поскольку начальная итерация $x_0 = x_0(s) = s$, мы получим

$$\left\|\left[F'(x_0)\right]^{-1}\right\| \le \frac{3-\sin 1}{2-\sin 1 + cos1} = \beta, \qquad \left\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\right\| \le \frac{\sin 1}{2-\sin 1+\cos 1} = \eta.$$

Ясно, что F'' удовлетворяет условию непрерывности Липшица:

$$\left\|F''(x) - F''(y)\right\| = \left\|\frac{s}{2}\int_0^1 \left[\cos(x(t)) - \cos(y(t))\right]dt\right\| \le \frac{1}{2}\|x-y\|.$$

Следовательно, $\omega(x) = Nx$, где $N = 1/2$. Это приводит к $\omega(tx) = t\omega(x)$ для $t \in [0, 1]$. Таким образом, $h(t) = t$ и, следовательно, $A_1 = 1/6$, $A_2 = \theta/2$ и $A_3 = (1-\theta)/2$. Кроме того, легко видно, что $\|F''(x)\| \leq 1/2 = M$. Значит, $a_0 = M\beta\eta = 0.314678 < r_0$ и $b_0 = \beta\eta\omega(\eta) = 0.1555867 < \Phi(a_0, \theta)$ для всех $\theta \in (0, 1]$. Следовательно, если мы примем $\theta = 0.4$, решение (30) существует в шаре $\overline{\mathcal{B}}(1, 0.675723) \subseteq \Omega$ и единственно в шаре $\mathcal{B}(1, 2.47241) \cap \Omega$. С другой стороны, из [7] мы получим $a_0 = M\beta\eta = 0.314678 < (3-\sqrt{5})/2$ и $b_0 = \beta\eta\omega(\eta) = 0.155867 < 1.103561$. Таким образом, условия теоремы 2.6 из [7] удовлетворяются. Следовательно, решение (30) существует в шаре $\overline{\mathcal{B}}(1, 0.656655) \subseteq \Omega$ и единственно в шаре $\mathcal{B}(1, 2.49147) \cap \Omega$. Из этого можно заключить, что наш анализ сходимости дает лучший шар существования решения, но не такой хороший шар единственности решения, как в [7]. В таблице 2 проводится сравнение границ ошибки, полученных при помощи нашего метода, с границами ошибки, полученными методом Галлея [7], поскольку наблюдалось значительное улучшение.

Таблица 2. Сравнение границ ошибки

n	Наш метод	Метод Галлея [7]
1	0.0509929	0.0627286
2	0.000777209	0.00108171
3	3.19494e−7	5.31091e−7
4	8.82517e−14	2.04523e−13
5	1.09832e−26	4.84089e−26
6	2.7748e−52	4.32835e−51
7	2.88879e−103	5.52267e−101
8	5.10707e−205	1.43495e−200

5. Выводы

Полулокальная сходимость супер-метода Галлея для решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах устанавливается с использованием рекуррентных отношений при предположении, что производная Фреше второго порядка удовлетворяет условию ω-непрерывности. Это условие обобщает условия непрерывности Липшица и Гельдера. Также показано, что можно избежать трудностей при вычислении второй производной Фреше, используя вместо нее разделенную разность, содержащую только первые производные Фреше. На основе двух параметров получено семейство рекуррентных отношений. Сформулирована теорема сходимости для определения границ априорной ошибки, а также области существования и единственности решений. Показано, что R-порядок сходимости метода по крайней мере 3. Представлено два численных примера для демонстрации эффективности нашего метода.

Литература

1. **Kantorovich L.V., Akilov G.P.** Functional Analysis. — Oxford: Pergamon Press, 1982.

2. **Ganesh M., Joshi M.C.** Numerical solvability of Hammerstein integral equations of mixed type // IMA J. of Numerical Analysis. — 1991. — Vol. 11. — P. 21–31.

3. **Gutiérrez J.M., Hernández M.A.** Recurrence relations for the Super-Halley method // Comput. Math. Appl. — 1998. — Vol. 36. — P. 1–8.

4. **Ezquerro J.A., Hernández M.A.** Avoiding the computation of the second Frëchet-derivative in the convex acceleration of Newton's method // J. of Computational and Applied Mathematics. — 1998. — Vol. 96. — P. 1–12.
5. **Hernández M.A., Salanova M.A.** Modification of the Kantorovich assumptions for semilocal convergence of the Chebyshev method // J. of Computational and Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 126. — P. 131–143.
6. **Hernández M.A.** Chebyshev's approximation algorithms and applications // Comput. & Math. with Appl. — 2001. — Vol. 41, iss. 3–4. — P. 433–445.
7. **Ezquerro J.A., Hernandez M.A.** On the R-order of the Halley method // J. Math. Anal. Appl. — 2005. — Vol. 303. — P. 591–601.
8. **Xintao Ye, Chong Li.** Convergence of the family of the deformed Euler–Halley iterations under the Hölder condition of the second derivative // J. of Computational and Applied Mathematics. — 2006. — Vol. 194. — P. 294–308.
9. **Yueqing Zhao, Qingbiao Wu.** Newton–Kantorovich theorem for a family of modified Halley's method under Hölder continuity conditions in Banach space // Applied Mathematics and Computation. — 2008. — Vol. 202. — P. 243–251.
10. **Parida P.K., Gupta D.K.** Semilocal convergence of a family of third-order Chebyshev-type methods under a mild differentiability condition // Int. J. Comput. Math. — 2010. — Vol. 87, iss. 15. — P. 3405–3419.
11. **Prashanth M., Gupta D.K.** Recurrence relations for Super-Halley's method under Hölder continuous second derivative in Banach spaces // Kodai Mathematical J. — 2013. — Vol. 36, № 1. — P. 119–136.

Поступила в редакцию 19 ноября 2012 г.,
в окончательном варианте 25 марта 2013 г.