УДК 532.517

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

Р. М. Гарипов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: R.M.Garipov@mail.ru

Рассматриваются полиномиальные по координатам решения уравнений Навье — Стокса, названные локальными. Для несжимаемой жидкости найдены все старшие члены (суммы старших мономов) степени 2 и доказано, что не существует нетривиальных осесимметричных старших членов степени выше, чем 2. Перечислены несоленоидальные осесимметричные решения, которые можно интерпретировать как установившиеся течения баротропного газа в потенциальном поле внешних сил. Вычислены все эллиптические вихри, обобщающие известное решение Кирхгофа. Найдены все решения степени 3 со старшим членом частного вида. Некоторые из этих решений разрушаются за конечное время независимо от значения и знака вязкости.

Ключевые слова: вязкая жидкость, полином, локальное решение, старший член, эллиптический вихрь.

Локальными будем называть решения, являющиеся полиномами по пространственным переменным. Локально, т. е. в малой окрестности точки, гладкая функция задается приближенно по формуле Тейлора. Решение уравнений Навье — Стокса аналитично по координатам точки пространства [1] и поэтому разлагается в ряд Тейлора в окрестности каждой внутренней точки области определения. Однако эти ряды не имеют применения, так как их радиус сходимости очень мал. В работе [2] для плоского стационарного случая получена оценка радиуса сходимости $\mathrm{const}\cdot\nu$ ($\nu = \mathrm{Re}^{-1}$ — безразмерная вязкость жидкости; Re — число Рейнольдса). При $\nu = 0$ имеются примеры неаналитических решений [3], поэтому данную оценку вряд ли можно улучшить. В общем случае отрезок ряда Тейлора аппроксимирует решение только в указанной ничтожно малой окрестности. Локальные же решения лишены этого недостатка, так как являются точным решением во всем пространстве и определены при всех числах Рейнольдса. Все плоские локальные решения найдены в [3]. Настоящая работа посвящена отысканию решений, описывающих пространственные течения.

1. Полиномиальные по $\boldsymbol{x}$ решения. Скорость $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и давление p несжимаемой вязкой жидкости плотности 1 как функции точки пространства $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и времени t удовлетворяют уравнениям Навье — Стокса

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \qquad \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u}, \tag{1.1}$$

где ν — безразмерная вязкость жидкости. Если скорость является полиномом по x_1, x_2, x_3, то давление также представляет собой полином (так как ∇p — полином). Поэтому исключим давление из уравнения движения, применив операцию rot. Полученное уравнение Гельмгольца запишем в системе координат, вращающейся вокруг ее начала:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{\omega} + 2(\boldsymbol{o}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - 2\dot{\boldsymbol{o}} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ — вихрь; $\boldsymbol{o}$ — угловая скорость вращения системы координат; точка над буквой обозначает производную по времени.

Решение будем искать в виде

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{u}_k \qquad (n \geqslant 1), \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{u}_k$ — однородный полином по $\boldsymbol{x}$ степени k с коэффициентами, произвольно зависящими от t. Следует отметить, что $\boldsymbol{u}_0 = 0$, т. е. $\boldsymbol{u} = 0$ при $\boldsymbol{x} = 0$. Выполнения этого условия можно добиться, переходя в движущуюся поступательно систему координат, начало которой находится на жидкой частице. Сумму старших мономов $\boldsymbol{u}_n$ будем называть старшим членом. Удобно произвести разложение (1.3) во вращающейся системе координат, в которой старший член $\boldsymbol{u}_n$ имеет наиболее простой вид. При переходе во вращающуюся систему координат сохраняются свойство однородности и степени полиномов $\boldsymbol{u}_k$ (из $\boldsymbol{u}_1$ вычитается переносная скорость $\boldsymbol{o} \times \boldsymbol{x}$). Подставив сумму (1.3) в условие несжимаемости жидкости (1.1) и уравнение (1.2) и приравняв к нулю каждое из однородных слагаемых разной степени, получим

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_k = 0 \qquad (k = 1, \dots, n); \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_k}{\partial t} + \sum_{i+j=k+1} ((\boldsymbol{u}_i \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}_j - (\boldsymbol{\omega}_j \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_i) - \nu \Delta \boldsymbol{\omega}_{k+2} + 2(\boldsymbol{o} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_k - 2\dot{\boldsymbol{o}}\delta_{1k} = 0$$
$$(1 \leqslant i, j \leqslant n; \quad k = 1, \dots, 2n-1), \tag{1.5}$$

где $\boldsymbol{\omega}_k = \nabla \times \boldsymbol{u}_k$, $\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{\omega}_k = 0$ при $k < 1$ или $k > n$; δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

2. Старший член. Случай $n = 1$ рассматривается в п. **4**. В данном пункте предположим $n \geqslant 2$. Тогда уравнения (1.4) при $k = n$ и (1.5) при $k = 2n - 1$ совпадают с уравнениями установившегося движения невязкой несжимаемой жидкости

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_n = 0; \tag{2.1}$$

$$(\boldsymbol{u}_n \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}_n - (\boldsymbol{\omega}_n \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_n = 0. \tag{2.2}$$

В (2.1), (2.2) время t входит лишь в качестве параметра, поэтому в данном пункте оно не указывается в аргументах. Итак, требуется найти однородные полиномы по $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющие уравнениям (2.1) и (2.2). Будем называть тривиальными следующие очевидные (или имеющие тот же вид в подходящей системе координат) решения:

а) потенциальное течение $\boldsymbol{u}_n = \nabla\varphi$, $\Delta\varphi = 0$;

б) сдвиговое течение $\boldsymbol{u}_n = (u(x_2, x_3), 0, 0)$;

в) круговое течение $\boldsymbol{u}_n = c(x_2^2 + x_3^2)^{(n-1)/2}(0, -x_3, x_2)$ (n — нечетное число).

Доказательства сформулированных ниже предложений весьма громоздки, поэтому в данной работе не приводятся.

Предложение 1. *Старший член степени* 2 *имеет вид* “а”, “б” *или*

$$\boldsymbol{u} = (\lambda x_1^2 + d(x_2^2 + x_3^2), -\lambda x_1 x_2, -\lambda x_1 x_3), \tag{2.3}$$

где λ, d — *произвольные параметры.*

Заметим, что при постоянных λ, d функция (2.3) является установившимся осесимметричным решением уравнений Навье — Стокса с давлением

$$p = \nu(2\lambda + 4d)x_1 + \lambda(-\lambda x_1^4/2 + d(x_2^2 + x_3^2)^2/4).$$

Линии тока находятся в меридиональных плоскостях, и в сечении $x_3 = 0$ функция тока имеет вид

$$\psi = \lambda x_1^2 x_2^2 + d x_2^4/2$$

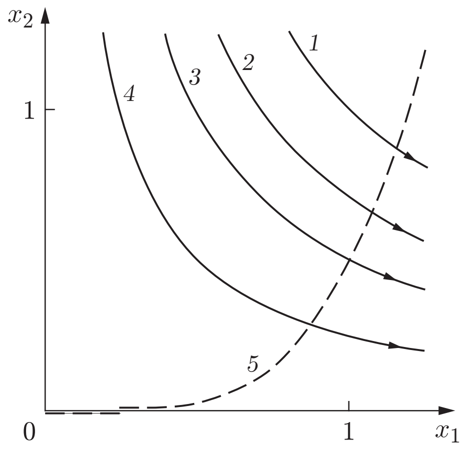

Рис. 1

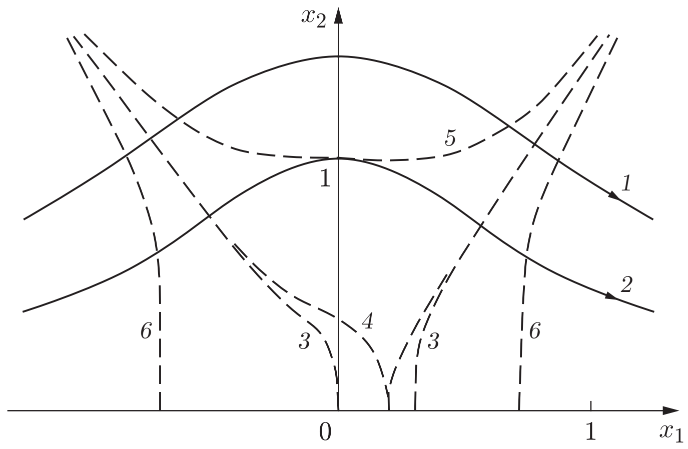

Рис. 2

Рис. 1. Линии тока (*1–4*) и зависимость давления от координаты x_1 (*5*) при $\nu = 1/256$, $\lambda = 1$, $d = 0$:
1 — $\psi = 1$; *2* — $\psi = 1/2$; *3* — $\psi = 1/4$; *4* — $\psi = 1/16$; *5* — $x_2 = -p(x_1)$

Рис. 2. Линии тока (*1, 2*) и линии уровня давления (*3–6*) при $\nu = 1/256$, $\lambda = 1$, $d = 1/2$:
1 — $\psi = 1$; *2* — $\psi = 1/4$; *3* — $p = 0$; *4* — $p = 1/431$; *5* — $p = 1/8$; *6* — $p = -1/8$

(объемный расход жидкости в трубке тока $\psi = \text{const}$ равен $\pi\psi$). При $d = 0$ на плоскости $x_1 = 0$ выполняется условие прилипания $\boldsymbol{u} = 0$, что можно трактовать как локальный отрыв пограничного слоя. На рис. 1 показаны линии тока (кривые *1–4*), а также зависимость давления от x_1 (кривая *5*) при $\nu = 1/256$, $\lambda = 1$, $d = 0$. При $\lambda d > 0$ линии тока в окрестности начала системы координат подобны линиям тока в случае обтекания тела или кольцевого вихря (рис. 2). Однако в случае обтекания тела или кольцевого вихря линии тока снаружи не проникают через замкнутую поверхность, ограничивающую тело или кольцевой вихрь, тогда как в рассматриваемом случае наружные линии тока пронизывают всю внутреннюю область.

Уравнение (2.2) проинтегрируем один раз:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega} = \nabla P \qquad (\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}). \tag{2.4}$$

Здесь P — произвольный полином по $\boldsymbol{x}$.

Рассмотрим осесимметричный (с осью симметрии x_1) старший член:

$$\boldsymbol{u} = (U_1, U_2 x_2 - U_3 x_3, U_2 x_3 + U_3 x_2).$$

Здесь U_i $(i = 1, 2, 3)$ — однородные полиномы по $x = x_1$ и $y = x_2^2 + x_3^2$ (степень y равна двум). Аналогично определим компоненты Ω_i $(i = 1, 2, 3)$ осесимметричного вихря $\boldsymbol{\omega}$.

Предложение 2. *Не существует нетривиальных осесимметричных старших членов степени $n \geqslant 3$.*

3. Несоленоидальные решения. Класс полиномиальных решений уравнения (2.4) существенно расширяется, если отказаться от условия несжимаемости $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$. Несоленоидальные решения можно интерпретировать как установившиеся течения идеального баротропного газа в потенциальном поле внешних сил. Действительно, так как в баротропном газе давление есть функция только плотности ρ, то

$$(1/\rho)\nabla p = \nabla H(\rho),$$

где H — энтальпия газа. Пусть на единицу массы газа действует внешняя сила ∇V. В этих условиях уравнения движения сводятся к (2.4), где следует положить

$$P = H(\rho) - V + (1/2)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}. \tag{3.1}$$

Имея решение $\boldsymbol{u}$, P уравнения (2.4), найдем плотность ρ из условия неразрывности $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0$, затем из равенства (3.1) определим потенциал внешних сил V. Функции ρ, V, вообще говоря, не будут полиномами, так как $\boldsymbol{u}$ не является старшим членом локального решения.

Предложение 3. *Нетривиальными осесимметричными однородными полиномами степени $n \geqslant 2$, удовлетворяющими уравнению (2.4), являются только следующие:*

1) $U_1 = -(ax^2 + 2by)\Omega_3 - 2y(ax^2 + by)\partial\Omega_3/\partial y$, $U_2 = ax\Omega_3 + (ax^2 + by)\partial\Omega_3/\partial x$, $U_3 = 0$, $P = (1/2)(ax^2 + by)y\Omega_3^2$, *где Ω_3 — решение уравнения*

$$(1 - a - 4b)\Omega_3 = 3ax\,\frac{\partial\Omega_3}{\partial x} + (6ax^2 + 12by)\,\frac{\partial\Omega_3}{\partial y} + (ax^2 + by)\Big(\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial x^2} + 4y\,\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial y^2}\Big),$$

которое существует, если произвольные постоянные a и b удовлетворяют некоторому алгебраическому уравнению;

2) $U_1 = cx^{2m+1}$, $U_2 = 0$, $U_3 = dy^m$, $P = (m + 1)(2m + 1)^{-1}d^2y^{2m+1}$, *где c, d — произвольные постоянные; $m = (n - 1)/2 \geqslant 0$ — целое число.*

4. Решение степени 1. Решение степени 1 является линейной функцией $\boldsymbol{u} = B\boldsymbol{x}$, где B — матрица. Подставив эту функцию в уравнения (1.1), получим

$$\operatorname{sp} B \equiv \sum_i B_{ii} = 0, \qquad \dot B - \dot B^* + B^2 - B^{*2} = 0, \qquad p = -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{x}\cdot(\dot B + B^2)\boldsymbol{x} - \frac{q}{2}, \tag{4.1}$$

где B^* — транспонированная матрица; q — произвольная функция t. Отсюда следует, что симметричную часть $a = (B + B^*)/2$ матрицы B можно задать как произвольную функцию времени. Тогда антисимметричная часть $\Omega = (B - B^*)/2$ будет определяться как решение второго уравнения в (4.1). Квадрат бесследной матрицы второго порядка является симметричной матрицей, поэтому Ω, а следовательно, и вихрь в плоском течении сохраняют постоянное значение. В пространственном случае вихрь может меняться по величине и направлению.

Решение степени 1 удовлетворяет условию непротекания произвольно деформирующейся во времени поверхности второго порядка и применяется в задачах о движении жидкости конечной массы [4–12].

В эллиптическом вихре Кирхгофа [13] скорость жидкости непрерывна и равна нулю на бесконечности, вихрь скорости постоянен внутри вращающегося эллипса S и равен нулю вне S. Так как решение степени 1 удовлетворяет условию непротекания эллипса, то $\boldsymbol{u} = B_0\boldsymbol{x}$ внутри эллипса S. В работах [14, 15] предполагается линейный рост скорости на бесконечности. Это условие необходимо для учета неоднородности внешнего потока. В данной работе допускается также тангенциальный разрыв скорости на S. В такой обобщенной постановке существуют и трехмерные эллипсоидальные вихри. Все эти вихри найдены в работе [16] и представляют интерес в связи с моделью турбулентности Лаврентьева [17]. В данной работе вычислим все двумерные эллиптические вихри.

Итак, вихрь жидкости $\omega = \partial u_2/\partial x_1 - \partial u_1/\partial x_2$ предполагается кусочно-постоянной функцией точки $\boldsymbol{x}$, терпящей разрыв на эллипсе S: $f(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x} - 1 = 0$ (A — симметричная положительно определенная матрица). В рассматриваемом плоском течении значение вихря не зависит от времени. При переходе к вращающейся с постоянной угловой скоростью системе координат поле скоростей вне S можно сделать потенциальным.

При этом уравнения движения не изменятся, если соответственно определить давление, которое остается непрерывным. Таким образом, скорость жидкости ищется в виде

$$\boldsymbol{u} = \begin{cases} B_0\boldsymbol{x} & \text{внутри } S, \\ a_1\boldsymbol{x} + \nabla\varphi & \text{вне } S, \end{cases} \qquad \nabla\varphi\big|_\infty = 0,$$

где a_1 — симметричная бесследная матрица. Рассмотрим условие непротекания эллипса

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla f = 0 \quad \text{на} \quad S.$$

В соответствии с условием непротекания изнутри получаем

$$\boldsymbol{x}\cdot\dot{A}\boldsymbol{x} + B_0\boldsymbol{x}\cdot 2A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\cdot(\dot{A} + AB_0 + B_0^*A)\boldsymbol{x} = 0 \qquad \text{при} \qquad f(\boldsymbol{x}) = 0$$

(матрица квадратичной формы симметризована). Так как полином $f(\boldsymbol{x})$ не имеет кратных корней, то для всех $\boldsymbol{x}$ выполняется равенство

$$\boldsymbol{x}\cdot(\dot{A} + AB_0 + B_0^*A)\boldsymbol{x} = cf(\boldsymbol{x}),$$

где c — некоторый полином степени 0, т. е. число. Приравняв мономы одинаковой степени в левой и правой частях равенства, получим значение $c = 0$ и матричное уравнение $\dot{A} + AB_0 + B_0^*A = 0$. Так как вектор $A\boldsymbol{x}$ ортогонален S, то условие непрерывности нормальной составляющей скорости имеет вид

$$\nabla\varphi\cdot A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x} \qquad \text{при} \qquad f(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{4.2}$$

где $B = B_0 - a_1$. Давление на S должно быть непрерывным. Давление p_0 внутри S выражается через матрицу B_0 по формуле (4.1), а давление p_1 вне S определяется из интеграла Коши — Лагранжа.

Перейдем в систему координат (x_1', x_2'), связанную с эллипсом S. Обозначим через $\sqrt{\alpha}$ и $\sqrt{\beta}$ полуоси эллипса, а через ϑ — угол между полуосью $\sqrt{\alpha}$ (осью x_1') и осью координат x_1. При этом координаты точки и скорости преобразуются по формулам $\boldsymbol{x}' = U^*\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}' = U^*\boldsymbol{u}$, а матричные функции — согласно правилу $B_0' = U^*B_0U$, откуда следует $U^*\dot{B}_0U = \dot{B}_0' + PB_0' - B_0'P$, где

$$U = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad P = U^*\dot{U} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\vartheta} \\ \dot{\vartheta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Циркуляция скорости $2\pi\gamma$ вне эллипса S и значения вихря $\omega = \omega_0$ внутри S и $\omega = 0$ вне S не меняются. Уравнение для матрицы A после умножения слева на U^* и справа на U преобразуется в следующее:

$$\dot{A} + A(B_0 - P) + (B_0^* + P)A = 0 \tag{4.3}$$

(штрихи опущены). Условие непрерывности давления на S принимает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \boldsymbol{x}\cdot(a_1 + P)\nabla\varphi + \frac{1}{2}\,|\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{x}\cdot(\dot{a}_1 + 2Pa_1 + a_1^2 - {}$$

$$- \dot{B}_0 - PB_0 + B_0P - B_0^2)\boldsymbol{x} - \frac{q}{2} = 0 \quad \text{при} \quad f(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{4.4}$$

Граничное условие (4.2) сохраняет свою форму.

Далее будем решать задачу (4.2)–(4.4) в указанной подвижной системе координат, в которой матрица A является диагональной:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}.$$

При заданных A и B гармоническая функция φ определяется условиями (4.2), $\nabla\varphi\big|_\infty = 0$ и значением циркуляции $2\pi\gamma$ с точностью до несущественного постоянного слагаемого. Всем этим условиям удовлетворяет функция вида

$$\varphi = \frac{1}{2}\Big(x_1^2 - x_2^2 - \frac{\alpha-\beta}{2}\Big)v_1(\lambda) + x_1x_2v_2(\lambda) + \frac{1}{2}\,v_3(\mu) = \frac{1}{2}\,\Big(\boldsymbol{x}\cdot V(\lambda)\boldsymbol{x} - v_0(\lambda) + \frac{1}{2}\,v_3(\mu)\Big),$$

где

$$V(\lambda) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 \end{pmatrix}, \qquad v_0(\lambda) = \frac{\alpha-\beta}{2}\,v_1(\lambda).$$

Здесь $\lambda \leqslant \mu$ — эллиптические координаты, которые определяются как решения относительно λ алгебраического уравнения

$$\frac{x_1^2}{\alpha-\lambda} + \frac{x_2^2}{\beta-\lambda} - 1 = 0. \tag{4.5}$$

На S координата $\lambda = 0$, вне S $\lambda < 0$, значения μ лежат между значениями α и β. Функции v_k удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые выводятся путем дифференцирования равенства (4.5) и легко интегрируются:

$$\begin{aligned} &v_1(\lambda) = v_1'(0)d_1^2(\alpha\beta)^{1/2}(d_1-\lambda)^{-1}(d_1-\lambda+\theta(\lambda)^{1/2})^{-1},\\ &v_2(\lambda) = v_2'(0)(\alpha\beta)^{3/2}\theta(\lambda)^{-1/2}(d_1-\lambda+\theta(\lambda)^{1/2})^{-1},\\ &v_3(\mu) = \gamma\arcsin((2\mu-\alpha-\beta)/(\alpha-\beta)), \qquad v_3'(\mu) = \gamma(-\theta(\mu))^{-1/2}. \end{aligned}$$

Здесь $d_1 = (\alpha+\beta)/2$; $\theta(\lambda) = (\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)$. Изменение μ от β до α соответствует обходу четверти контура, охватывающего S, при этом слагаемое $v_3(\mu)/2$ получает приращение $\pi\gamma/2$, а при обходе всего контура претерпевает разрыв $2\pi\gamma$, остальные слагаемые непрерывны.

Точка эллипса S является функцией эллиптической координаты μ ($\lambda = 0$). Из уравнения S и определения μ следуют равенства

$$x_1^2 = (\alpha-\beta)^{-1}\alpha(\alpha-\mu), \qquad x_2^2 = (\alpha-\beta)^{-1}\beta(\mu-\beta) \qquad \text{на} \quad S. \tag{4.5a}$$

Граничное условие (4.2) сведем к матричному уравнению, аналогичному (4.3). Дифференцируя определение (4.5) и учитывая равенства (4.5a), получаем формулу

$$\nabla\varphi\big|_S = V(0)\boldsymbol{x} - 2\varphi_0'\,\frac{A\boldsymbol{x}}{|A\boldsymbol{x}|^2} + \gamma(\alpha\beta)^{-1/2}\,\frac{JA\boldsymbol{x}}{|A\boldsymbol{x}|^2}, \tag{4.6}$$

где

$$\varphi_0' = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{x}\cdot V'(0)\boldsymbol{x} - v_0'(0)), \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как линии $\mu = \mathrm{const}$ ортогональны S, то слагаемое v_3 выпадает при подстановке φ в (4.2):

$$A(V(0)-B) + (V(0)-B^*)A - 2(V'(0) - v_0'(0)A) = 0. \tag{4.7}$$

Расписав это симметричное матричное уравнение по элементам, получим три скалярных уравнения, два из которых независимы и однозначно определяют неизвестные величины $v_1'(0)$ и $v_2'(0)$.

Выпишем элементы матричных уравнений (4.3) и (4.7), учитывая равенство $B = B_0 - a_1$:

$$\dot\alpha = 2a_{0,11}\alpha, \qquad \dot\beta = -2a_{0,11}\beta,$$

$$(a_{0,12}-\omega_1+\dot\vartheta)/\alpha+(a_{0,12}+\omega_1-\dot\vartheta)/\beta=0,\quad a_{11}-v_1(0)+(\alpha+\beta)v_1'(0)/2=0,\quad (4.8)$$
$$(v_2(0)-a_{12}+\omega_1)/\alpha+(v_2(0)-a_{12}-\omega_1)/\beta-2v_2'(0)=0.$$

Здесь $B_0=a_0+\Omega_0$; $a=a_0-a_1$; $\omega_1=\omega_0/2$;

$$\Omega_0=\begin{pmatrix}0 & -\omega_1\\ \omega_1 & 0\end{pmatrix}.$$

Дифференцируя (4.5), с учетом равенства (4.5а) находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_S=\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{x}\cdot\dot V(0)\boldsymbol{x}-\dot v_0(0))-\varphi_0'\,\frac{\boldsymbol{x}\cdot\dot A\boldsymbol{x}}{|A\boldsymbol{x}|^2}+\frac{\gamma}{2}\,(\dot\alpha-\dot\beta)(\alpha\beta)^{-3/2}\,\frac{x_1x_2}{|A\boldsymbol{x}|^2}.\quad (4.9)$$

Подставив выражения (4.6) и (4.9) в граничное условие (4.4) и исключив $\dot\alpha$, $\dot\beta$, a_0, a_1 с помощью (4.8), получим

$$G_1+(x_1x_2K_1+K_2)/|A\boldsymbol{x}|^2=0\qquad\text{при}\qquad f(\boldsymbol{x})=0,\quad (4.10)$$

где G_1, K_1, K_2 — однородные полиномы по $\boldsymbol{x}$ степени 2, 2, 4 соответственно (выражения для них не приводятся из-за громоздкости), причем K_1 и K_2 зависят только от x_1^2, x_2^2. Левая часть условия (4.10) является однородной функцией, поэтому равенство

$$x_1x_2K_1+K_2=|A\boldsymbol{x}|^2(ax_1x_2+bx_1^2+cx_2^2)\qquad\text{или}\qquad x_1x_2K_1'+K_2'=0$$

справедливо всюду. Так как K_1' и K_2' являются полиномами от x_1^2, x_2^2, а функция x_1x_2 иррационально зависит от x_1^2 и x_2^2, то $K_1'=0$, $K_2'=0$, т. е. многочлены K_1 и K_2 делятся на $|A\boldsymbol{x}|^2$. Отсюда следует

$$v_1'(0)=0,\qquad v_2'(0)=-\gamma(\alpha-\beta)(\alpha\beta)^{-3/2}/2.\quad (4.11)$$

Тогда $v_1=0$, $K_1=0$, и из последних двух уравнений (4.8) находим

$$a_{11}=0,\qquad a_{12}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,(2\gamma(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^{-2}-\omega_1).\quad (4.11\text{a})$$

С учетом формул (4.6) и (4.9) граничное условие (4.4) сводится к матричному уравнению

$$\dot V(0)+(a_1+P)V(0)+V(0)(a_1-P)+V(0)^2-\frac{\gamma^2}{\alpha\beta}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-$$
$$-\dot a-2Pa-aa_0-a_0a+a^2-\Omega_0^2-qA=0.\quad (4.12)$$

Так как согласно (4.11), (4.11а) матрицы $V(0)$ и a имеют нулевые диагональные элементы, то $\dot V(0)-\dot a=0$ в силу диагональности суммы остальных слагаемых уравнения (4.12). Отсюда следует

$$v_2(0)-a_{12}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\Big(\omega_1-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha\beta}}\Big)=\mathrm{const}\,.$$

Умножив уравнение (4.12) справа на A^{-1} и взяв разность диагональных элементов, исключим произвольный параметр q. С учетом (4.8) результат преобразуется к виду

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\Big(\omega_1-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha\beta}}\Big)\Big(-2\dot\vartheta+\omega_1+\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha\beta}}\Big)=0.$$

Итак, если не учитывать тривиальный случай $\alpha\equiv\beta$, то доказано следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть вихрь ω равен $\omega_0 = 2\omega_1$ внутри эллипса S: $x_1^2/\alpha + x_2^2/\beta = 1$ и равен нулю вне S, скорость жидкости $\boldsymbol{u} \to a_1\boldsymbol{x}$ при $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ ($a_1 = a_1^*$, $\mathrm{sp}\, a_1 = 0$). Тогда внутри S $\boldsymbol{u} = B_0\boldsymbol{x}$, где*

$$B_0 = \begin{pmatrix} a_{0,11} & a_{0,12} - \omega_1 \\ a_{0,12} + \omega_1 & -a_{0,11} \end{pmatrix},$$

и существуют только следующие решения (в подвижной системе координат (x_1, x_2)):

1) *матрица a_1 — произвольная функция времени t, $\dot\alpha = 2a_{0,11}\alpha$, $\alpha\beta = \mathrm{const}$, $\dot\vartheta = \omega_1 + (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^{-1}a_{0,12}$, $a_{0,11} = a_{1,11}$, $a_{0,12} = a_{1,12} + a_{12}$, $2\pi\gamma = \omega_0\pi\sqrt{\alpha\beta}$ — циркуляция скорости вокруг S;*

2) *α, β, $\dot\vartheta$, a_0, a_1 постоянны, $\dot\vartheta = \omega_0/4 + \gamma/(2\sqrt{\alpha\beta})$, $a_{0,11} = a_{1,11} = 0$, $a_{0,12} = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^{-1}(-\omega_0/4 + \gamma/(2\sqrt{\alpha\beta}))$, $a_{1,12} = a_{0,12} - a_{12}$, где a_{12} определяется выражением (4.11а).*

В первом решении скорость жидкости непрерывна на S. При $a_1 = 0$ это решение переходит в решение Кирхгофа [13], а при $a_1 \neq 0$ включает как частные случаи решения, полученные в [14, 15]. Во втором решении скорость жидкости претерпевает тангенциальный разрыв на S.

На рис. 3 показана траектория жидкой частицы, соответствующая решению Кирхгофа. Линией *1* показана траектория жидкой частицы относительно неподвижной системы координат с начальной точкой $(\sqrt{\alpha}, 0)$ за время полуоборота эллипса S. Линией *2* показан эллипс в начальный момент времени, линией *3* — вписанная в него окружность. Указано направление угловой скорости вращения эллипса $\dot\vartheta$ при $\omega_0 > 0$.

На рис. 4 показаны траектории внешней и внутренней жидких частиц, соответствующие разрывному решению (с $a_1 = 0$). Линией *1* показана траектория внутренней жидкой частицы, линией *1′* — траектория внешней частицы, имеющей то же начальное положение, за время полуоборота эллипса S. Указано направление вращения эллипса при $\omega_0 > 0$. Для обоих течений траектории жидких частиц имеют форму окружности.

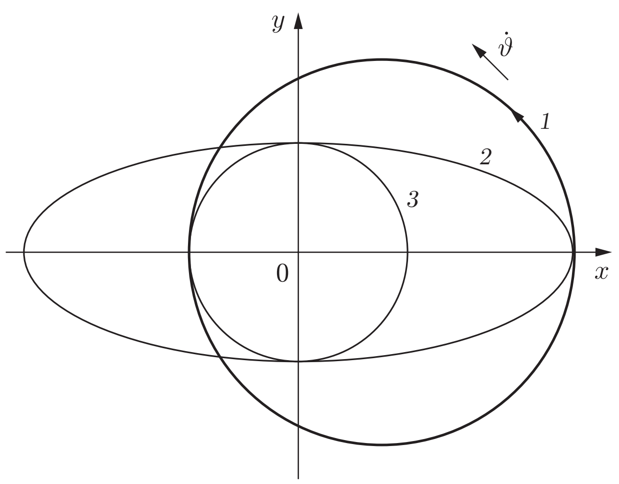

Рис. 3

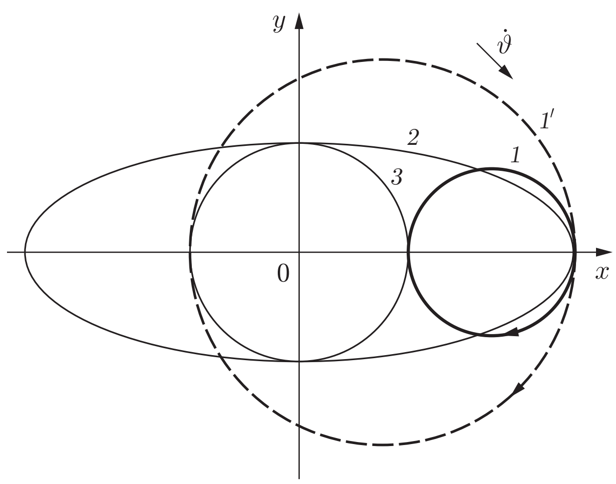

Рис. 4

Рис. 3. Течение Кирхгофа ($a_1 = 0$, поле скоростей непрерывно):
1 — траектория жидкой частицы; *2* — эллипс S в начальный момент времени; *3* — вписанная в эллипс окружность

Рис. 4. Разрывное течение ($a_1 = 0$):
1 — траектории внутренней жидкой частицы; *1′* — траектория внешней жидкой частицы; *2* — эллипс S в начальный момент времени; *3* — вписанная в эллипс окружность

В качестве примера первого решения рассмотрим случай, когда матрица a_1 постоянна в неподвижной системе координат (x, y), диагональна и содержит элементы b и $-b$ на диагонали. Согласно (4.1) давление равно $p = -b^2(x^2 + y^2)/2 - q/2$, т. е. имеет место антициклон. Течение с такой матрицей возникает в месте столкновения двух потоков. В этом течении возможно существование эллиптического вихря, описываемого первым решением. В подвижной системе координат имеем

$$a_1 = U^* \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} U = b \begin{pmatrix} \cos(2\vartheta) & -\sin(2\vartheta) \\ -\sin(2\vartheta) & -\cos(2\vartheta) \end{pmatrix}.$$

В этом случае система уравнений решается в квадратурах. Для переменной $\delta = (\alpha - \beta)(\alpha\beta)^{-1/2}/2$ получим

$$\dot{\delta} = 2b\sqrt{1+\delta^2}\cos(2\vartheta), \qquad b\omega_1^{-1}\sin(2\vartheta) = \delta^{-1}(c + \ln(1 + \sqrt{1+\delta^2})) \equiv f_0(\delta, c),$$

где постоянная c определяется из начального условия $\delta = \delta_0$, $\vartheta = \vartheta_0$ при $t = 0$.

Множество $M = \{\delta\colon |f_0(\delta, c)| < b\omega_1^{-1}\}$ состоит из непересекающихся открытых интервалов. Изолированные точки дополнения $\mathbb{R} \setminus M$ являются точками равновесия. Если начальная точка δ_0 попадает в конечный интервал множества M, то эллипс S вращается и пульсирует, оставаясь ограниченным. Если δ_0 принадлежит бесконечному интервалу, то движение апериодическое: эллипс неограниченно вытягивается в направлении уходящей струи или стремится к положению равновесия.

5. Решение степени 3 со сдвиговым старшим членом. Найдем решение степени $n = 3$ со сдвиговым старшим членом частного вида

$$\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} ay^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a \neq 0. \tag{5.1}$$

Координаты точки пространства обозначим x, y, z.

Предложение 5. *Полиномиальное по координатам решение степени* 3 *со старшим членом* (5.1) *имеет вид*

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -(b_1 + c_1')x + a_1 y + a_1' z + a_2 y^2 + a_2' yz + a_2'' z^2 + ay^3 \\ b_1 y + b_1' z \\ -2o_2 x + c_1 y + c_1' z + c_2 y^2 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

где коэффициенты зависят от t *и удовлетворяют следующим уравнениям*:

$$\begin{gathered} 3ab_1' + 2c_2 a_2'' = 0, \quad (o_3 - c_2^2/(3a))a_2'' = 0, \quad o_2 a_2'' = 0, \quad o_2 a_2' = 0, \\ \begin{aligned} &\dot{a} + a(2b_1 - c_1') + a_2' c_2 = 0, \\ &\dot{a}_2 + c_2(-2o_2 + a_1') + a_2(b_1 - c_1') + a_2' c_1 = 0, \\ &\dot{a}_2' + 2a_2 b_1' + 2a_2'' c_1 = 0, \\ &\dot{a}_2'' + a_2' b_1' + a_2''(-b_1 + c_1') = 0, \\ &\dot{c}_2 + o_3 a_2' + c_2(2b_1 + c_1') = 0, \\ &\dot{a}_1 + 2\dot{o}_3 + 2(2o_1 + b_1' - c_1)o_2 - (2o_3 + a_1)c_1' + a_1' c_1 - 6a\nu = 0, \\ &\dot{a}_1' + (2o_3 + a_1)b_1' - a_1' b_1 = 0, \\ &\dot{c}_1 - \dot{b}_1' - 2\dot{o}_1 + 2a_1' o_3 + (b_1 + c_1')(-2o_1 - b_1' + c_1) = 0. \end{aligned} \end{gathered} \tag{5.3}$$

Замечание. При $\boldsymbol{o} = 0$ решение (5.2) включается в класс "почти плоских" течений

$$\boldsymbol{u} = \Big(-x\Big(\frac{\partial v(y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial w(y,z,t)}{\partial z}\Big) + u'(y,z,t),\ v(y,z,t),\ w(y,z,t)\Big),$$

который содержит также полиномиальные по $\boldsymbol{x}$ решения более высокой степени.

Система уравнений (5.3) распадается на две:

I. $o_2 = 0$, $o_3 = c_2^2/(3a)$. Величины o_1, b_1, c_1' — произвольные функции t. Порядок системы восьмой.

II. $a_2' = a_2'' = b_1' = 0$. Угловая скорость вращения системы координат $\boldsymbol{o}$ и коэффициенты b_1, c_1' — произвольные функции t. Порядок системы шестой.

Если произвольные функции t заданы, то решение нелинейной системы состоит в последовательном решении линейных подсистем. Естественно, в физических задачах надо задавать не сами указанные произвольные элементы, а коэффициенты при старших степенях. Тогда произвольные величины можно определить.

Приведем пример разрушения решения. Пусть в системе II заданы произвольные элементы $\boldsymbol{o} = 0$, $c_1' = 0$. Рассмотрим частное решение этой системы ($a_2 = c_2 = 0$):

$$\begin{aligned} &\dot a + 2ab_1 = 0, \\ &\dot a_1 + a_1' c_1 - 6a\nu = 0, \\ &\dot a_1' - a_1' b_1 = 0, \\ &\dot c_1 + b_1 c_1 = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Уравнения (5.4) представляют собой простейшую систему, содержащую вязкость ν. При любой заданной функции $b_1(t)$ решение системы (5.4) порождает решение уравнений Навье — Стокса. Принимая $b_1(t) \to \infty$ при $t \to t_0$, получим решение, разрушающееся в конечный момент времени t_0. Можно также задать b_1 как функцию a, a_1, a_1', c_1. Тогда система (5.4) будет замкнутой. При $b_1 = -a$, или $b_1 = a_1'$, или $b_1 = -c_1$ решение также будет разрушаться. Пусть для определенности $b_1 = a_1'$. Тогда

$$a = A(t - t_0)^2, \qquad a_1 = 2\nu A(t - t_0)^3 + Ct + B,$$
$$a_1' = 1/(t_0 - t), \qquad c_1 = C(t - t_0),$$

где t_0, A, B, C — произвольные постоянные. Следует отметить, что вязкость и ее знак не оказывают влияния на процесс разрушения решения.

Автор выражает благодарность О. М. Лаврентьевой за обсуждение рассматриваемых в работе вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kahane C.** On the spatial analyticity of solutions of the Navier — Stokes equations // Arch. Ration Mech. Anal. 1969. V. 33, N 5. P. 387–405.
2. **Nowak Z.** Analyticity of the plane steady state solution of the Navier — Stokes equation // Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Techn. 1973. V. 21, N 3. P. 7–13.
3. **Гарипов Р. М.** Плоские локальные решения уравнений Навье — Стокса // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1982. Вып. 58. С. 27–59.
4. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
5. **Жуковский Н. Е.** О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч.: В 9 т. М.; Л.: ОНТИ, 1936. Т. 3. С. 21–186.

6. **Румянцев В. В.** Устойчивость вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 6. С. 740–748.
7. **Dirichlet P. G.** Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik // Abh. Kgl Ges. Wiss. Göttingen. 1860. Bd 8, N 3.
8. **Риман Б.** Сочинения. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. С. 339–366.
9. **Овсянников Л. В.** Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей: общие уравнения и примеры. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967.
10. **Лаврентьева О. М.** О движении жидкого эллипсоида // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253, № 4. С. 828–831.
11. **Лаврентьева О. М.** Об одном классе движений жидкого эллипсоида // ПМТФ. 1984. № 4. С. 148–153.
12. **Войцеховский Б. В., Гарипов Р. М.** Солнечные и лунные приливы в магме // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 6. С. 3–12.
13. **Кирхгоф Г.** Лекции по математической физике // Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 220–222.
14. **Чаплыгин С. А.** О пульсирующем цилиндрическом вихре // Собр. соч: В 2 т. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. Т. 2. С. 138–154.
15. **Kida S.** Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow // J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50, N 10. P. 3517–3520.
16. **Гарипов Р. М.** Эллипсоидальные капля или вихрь в неоднородном потоке // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 4. С. 76–80.
17. **Гарипов Р. М.** Модель турбулентности М. А. Лаврентьева // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 68. С. 44–73.

Поступила в редакцию 19/XII 2007 г.