УДК 532.58

ЭНЕРГЕТИКА ГЕНЕРАТОРОВ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

В. А. Городцов, Э. В. Теодорович

(Москва)

В расслоенных по плотности (стратифицированных) жидких средах, находящихся в поле силы тяжести, подобных земной атмосфере и океану, могут распространяться и играть существенную роль внутренние волны. В хорошо контролируемых экспериментальных исследованиях весьма актуален вопрос об эффективных генераторах внутренних волн (в частности, гармонических). Поэтому важным становится сравнение эффективности возможных типов генераторов внутренних волн. Задача рассматривается для простейших видов стратификации: разрывной и однородной (с постоянной частотой плавучести N). Отметим, что если исследованию колебаний в случае разрывной стратификации посвящено немало работ, то по однородной стратификации число их гораздо меньше (см., например, [1—4]). Сопоставления эффективностей различных типов генераторов для последнего случая не проводилось. Ниже это сделано на основе энергетических оценок для генераторов двух типов: для тел (шара и цилиндра), совершающих в жидкости малые гармонические колебания, и тел с пульсирующим объемом.

1. Двухслойная жидкость. Рассмотрим две однородные несжимаемые идеальные жидкости разной плотности, простирающиеся неограниченно вверх ($z < 0$) и вниз от разделяющей их поверхности $z = 0$. Результаты оказываются непосредственным обобщением данных [5] для одной однородной жидкости со свободной поверхностью, но получены несколько другим методом.

Воспользуемся моделированием колеблющихся тел распределениями массовых источников $m(\mathbf{r}, t) = m_0(\mathbf{r}) \sin \omega_0 t$. Тогда малые безвихревые возмущения потенциала скорости в двухслойной жидкости $\varphi(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi = m, \ \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right] = 0, \ \left[\rho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - g\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right] = 0, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi, \ p = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \ p, \mathbf{v} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Здесь t, z — время и вертикальная координата; $\mathbf{v}$, p — возмущения скорости и давления; $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $\mathbf{r} = \{x, z\}$ в пространственной и плоской задачах соответственно (далее также $\mathbf{r}_h = \{x, y, 0\}$ и $\mathbf{r}_h = \{x, 0\}$); $[f] = f|_{z=+0} - f|_{z=-0}$.

Потенциал можно представить в виде интегральной свертки массового источника с запаздывающей функцией Грина $G^{\text{ret}}(\mathbf{r}_h, z, z', t)$, которая является решением системы (1.1) с мгновенным точечным источником $m(\mathbf{r}, t) = \delta(t)\delta(\mathbf{r}_h)\,\delta(z - z')$ при условии причинности $G^{\text{ret}}(\mathbf{r}_h, z, z', t)|_{t<0} = 0$ [6]:

$$\varphi(\mathbf{r}_h, z, t) = \int dz' d^{p-1}\mathbf{r}'_h dt' G^{\text{ret}}(\mathbf{r}_h - \mathbf{r}'_h, z, z', t - t')\, m(\mathbf{r}'_h, z', t').$$

После подстановки этого представления в формулу для средней (за период колебаний) мощности, затрачиваемой на образование внутренних волн на поверхности скачка плотности,

$$\langle W\rangle = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_0} dt \int dz d^{p-1}\mathbf{r}_h p(\mathbf{r}_h, z, t)\, m(\mathbf{r}_h, z, t) \tag{1.2}$$

и несложных выкладок можно убедиться, что в $\langle W\rangle$ дает вклад только мнимая часть фурье-образа запаздывающей функции Грина (для преобразований Фурье сохраняем те же обозначения, что и для исходных величин, отличать их будем по аргументам $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{k}$, $t \leftrightarrow \omega$):

$$\langle W\rangle = -\frac{\rho\omega_0}{2\,(2\pi)^{p-1}}\int dz dz' d^{p-1}\mathbf{k}_h m_0(\mathbf{k}_h, z')\, m_0(-\mathbf{k}_h, z) \times \tag{1.3}$$

$$\times \operatorname{Im} G^{\text{ret}}(\mathbf{k}_h, z, z', \omega_0).$$

Присутствие здесь только мнимой части функции Грина упрощает выкладки, поскольку она пропорциональна δ-функции, сосредоточенной на поверхности, задаваемой дисперсионным уравнением свободных волн. Для двух неограниченных слоев однородных жидкостей имеем

$$\operatorname{Im} G^{\text{ret}}(\mathbf{k}_h, z, z', \omega) = -\frac{\pi\omega z}{2\,|\,\omega z\,|}\left(\gamma + \frac{z'}{|\,z'\,|}\right) e^{-k_h|z|-k_h|z'|}\,\delta\left(k_h - \frac{\omega^2}{\gamma g}\right),$$

и формула для мощности потерь преобразуется к виду

$$(1.4)\qquad \langle W\rangle = \frac{\omega_0\rho\,(1\pm\gamma)}{8\,(2\pi)^{p-2}}\int d^{p-1}\mathbf{k}_h\delta\left(k_h - \frac{\omega_0^2}{\gamma g}\right)\left|\int dz e^{-k_h|z|} m_0(\mathbf{k}_h, z)\right|^2.$$

Здесь знак $+(-)$ и $\rho = \rho_2(=\rho_1)$ соответствуют случаю, когда массовый источник находится ниже (выше) поверхности раздела; $\gamma = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$; p — размерность пространства.

Теперь с целью получения результатов для конкретных тел необходимо было бы решить вопрос о моделировании их системами массовых источников. Однако вместо его сколько-нибудь полного рассмотрения для приближенных оценок используем модели, известные из теории однородной безграничной жидкости. Можно надеяться на удовлетворительность таких оценок лишь для тел, находящихся вдали от поверхности раздела. Такой подход использовался, в частности, при рассмотрении волн на свободной поверхности в [5], где также предпринята попытка его обоснования с помощью решений граничных интегральных уравнений.

В однородной безграничной идеальной несжимаемой жидкости течение вне цилиндра ($p = 2$) или шара ($p = 3$), объем которых слабо меняется гармоническим образом, совпадает с течением от массового источника

$$(1.5)\qquad m(\mathbf{r}, t) = -2\pi a\omega_0 r_0(2r_0)^{p-2}\delta(\mathbf{r}_h)\delta(z - z_0)\sin\omega_0 t.$$

Используя для двухслойной жидкости этот же источник, из (1.4) находим для энергии, затрачиваемой в единицу времени пульсирующим цилиндром и шаром (с радиусом $r_0 + a\cos\omega_0 t$) на образование волн на поверхности скачка плотности, формулу

$$(1.6)\qquad \langle W^{(1)}\rangle = \pi^2 a^2 r_0^2\omega_0^3\rho\,(1\pm\gamma)\left(\frac{2r_0^2\omega_0^2}{\gamma g}\right)^{p-2}\exp\left(-\frac{2\omega_0^2\,|\,z_0\,|}{\gamma g}\right),$$

которая в пределе $\gamma \to 1$ переходит в формулы (4.13), (6.8) из [5].

В безграничной однородной идеальной несжимаемой жидкости вне цилиндров и шаров, совершающих малые колебания в направлении вектора $\mathbf{a}$, возникает течение, совпадающее с течением от дипольного массового источника:

$$(1.7)\qquad m(\mathbf{r}, t) = 2\pi r_0^p\omega_0\mathbf{a}\nabla\delta(\mathbf{r}_h)\,\delta(z - z_0)\sin\omega_0 t.$$

Оценка с помощью этого источника потерь энергии осциллирующими телами на излучение внутренних волн на поверхности раздела по (1.4) имеет вид

$$(1.8)\qquad \langle W^{(2)}\rangle = c_p\frac{\pi^2}{4}\rho\,(1\pm\gamma)\,\omega_0^3\left(\frac{2r_0^2\omega_0^2}{\gamma g}\right)^p\exp\left(-\frac{2\omega_0^2\,|\,z_0\,|}{\gamma g}\right),$$

$$c_2 = a^2 = a_x^2 + a_z^2,\quad 4c_3 = a_z^2 + \frac{1}{2}\left(a_x^2 + a_y^2\right).$$

Отсюда также при $\gamma \to 1$ получаются соответствующие формулы из [5].

Уравнения (1.6), (1.8) позволяют сопоставить эффективность двух типов (пульсирующих и осциллирующих) генераторов внутренних волн на поверхности скачка плотности. Отношение мощностей

$$\langle W^{(2)}\rangle/\langle W^{(1)}\rangle = \frac{c_p}{a^2}\left(\frac{r_0\omega_0^2}{\gamma g}\right)^2$$

оказывается пропорциональным квадрату отношения размера тела к характерной длине волны $r_0/(\gamma g \omega_0^{-2})$, так что при малых частотах колебаний $(\omega_0^2 < \gamma g/r_0)$ объемные вибраторы более эффективны (это верно вплоть до $r_0\omega_0^2/\gamma g \approx 1$ благодаря малости числового фактора c_p/a^2). При достаточно больших частотах $(\omega_0^2 \gg \gamma g/r_0)$, согласно этим формулам, можно было бы ожидать обратного. Однако тогда характерная длина волны $(\sim \gamma g/\omega_0^2)$ гораздо меньше размера тела (r_0) и возможность использования в расчетах точечных моделирующих источников вызывает сомнения в силу важности интерференционных эффектов в масштабах $\sim r_0$.

2. Однородно стратифицированная безграничная жидкость. Малые возмущения давления p, вызываемые массовым источником $m(\mathbf{r}, t) = m_0(\mathbf{r}) \sin \omega_0 t$, в первоначально неподвижной несжимаемой идеальной стратифицированной жидкости с постоянной частотой плавучести N в приближении Буссинеска (используем при этом систему единиц, в которой $\rho_0 = 1$) удовлетворяют уравнению [6]

$$\hat{L}p = -\omega_0 (N^2 - \omega_0^2) m_0(\mathbf{r}) \cos \omega_0 t, \quad \hat{L} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + N^2 \nabla_h^2. \tag{2.1}$$

Разрешая его с помощью запаздывающей функции Грина оператора $\hat{L}$, можно найти для средних потерь мощности (1.2) формулу типа (1.3)

$$\langle W \rangle = -\frac{\omega_0 (N^2 - \omega_0^2)}{2(2\pi)^p} \int d^p\mathbf{k}\, |m_0(\mathbf{k})|^2 \operatorname{Im} G^{\text{ret}}(\mathbf{k}, \omega_0).$$

Так как мнимая часть фурье-образа функции Грина пропорциональна δ-функции

$$\operatorname{Im} G^{\text{ret}}(\mathbf{k}, \omega) = -\pi \frac{\omega}{|\omega|} \delta(\omega^2 k^2 - N^2 k_h^2),$$

то фактически в формуле для потерь мощности на излучение внутренних волн

$$\langle W \rangle = \frac{\omega_0 (N^2 - \omega_0^2)}{4(2\pi)^{p-1}} \int d^p\mathbf{k}\, |m_0(\mathbf{k})|^2 \delta(\omega_0^2 k^2 - N^2 k_h^2) \tag{2.2}$$

одно из интегрирований может быть выполнено в общем случае.

Для симметричных (сферически или цилиндрически) источников, к которым, в частности, относится точечный монопольный источник (1.5), возможно также упрощение, связанное с интегрированием по углам. Формула для потерь приводится к виду $(\omega_0 \leqslant N)$

$$\langle W \rangle = \left(\frac{2r_0^2\omega_0}{N}\right)^2 \frac{\pi N^2 a^2 \sqrt{N^2 - \omega_0^2}}{4r_0^2} \int_0^\infty dk\, k^{p-3} \mu^2(k),$$

откуда следует важное заключение о невозможности оценки энергетических потерь при попытке моделирования цилиндров и шаров, пульсирующих и осциллирующих в однородно стратифицированной жидкости, точечными источниками (1.5), (1.7). Действительно, точечному монопольному источнику (1.5) соответствует $\mu^2(k) = 1$, и интеграл по волновым числам в формуле для мощности потерь оказывается расходящимся (в плоской задаче логарифмически при больших и малых волновых числах, а в пространственной — линейно при больших k). Для точечного дипольного источника (1.7) имеем $\mu^2 \sim k^2$ и расходимость интеграла при больших k оказывается еще сильнее (ср. с парадоксом бесконечных потерь энергии в задаче о равномерном движении точечных источников [6, 7]). Для избавления от указанной трудности необходимо обратиться к моделированию колеблющихся тел нелокальными источниками. Далее воспользуемся поверхностными распределениями массовых источников.

В однородной идеальной несжимаемой жидкости течение вокруг шара (цилиндра) при малых гармонических изменениях объема совпадает с течением, вызываемый поверхностными массовыми источниками

$$m(\mathbf{r},\ t) = m_0(\mathbf{r}) \sin \omega_0 t,\ m_0(\mathbf{r}) = -\omega_0 a \delta(r - r_0). \tag{2.3}$$

Используя это распределение для моделирования шара, пульсирующего в однородно стратифицированной жидкости, из (2.2) получим следующий простой результат для средней мощности, затрачиваемой на образование внутренних волн:

$$\langle W \rangle = \pi^2 a^2 r_0^3 N^{-1} \omega_0^3 \sqrt{N^2 - \omega_0^2},\quad \omega_0 \leqslant N. \tag{2.4}$$

Согласно этой формуле, потери максимальны при $\omega_0 = N\sqrt{3}/2$.

Для плоской задачи с пульсирующим цилиндром при моделировании его распределенным массовым источником (2.3) форм-фактор $\mu^2(k)$ оказывается пропорциональным $J_0^2(kr_0)$, что обеспечивает сходимость интеграла при больших волновых числах, но по-прежнему остается логарифмическая расходимость при малых. Для ее устранения нужно учитывать ограниченность размеров бассейна (см. п. 3). К положительному итогу приводит отказ от приближения Буссинеска. Однако это связано с изменениями в масштабах $\gtrsim g/N^2$, которые обычно значительно превосходят размеры бассейна.

Заимствуя из теории однородной жидкости поверхностное распределение дипольного типа

$$m(\mathbf{r},\ t) = -\left(\frac{3}{4}\right)^{p-2} 2\omega_0 \frac{\mathbf{ra}}{|\mathbf{r}|} \delta(r - r_0) \sin \omega_0 t \tag{2.5}$$

для моделирования колеблющихся в стратифицированной жидкости вдоль направления вектора $\mathbf{a}$ шара ($p = 3$) и цилиндра ($p = 2$) радиуса r_0, из (2.3) для средней мощности потерь на образование волн получим

$$\langle W^{(2)} \rangle = 2\pi r_0^2 \omega_0^2 \sqrt{N^2 - \omega_0^2} \left(\frac{3\pi\omega_0 r_0}{8N}\right)^{p-2} A_p, \tag{2.6}$$

$$A_2 \equiv a_x^2 \frac{\omega_0^2}{N^2} + a_z^2\left(1 - \frac{\omega_0^2}{N^2}\right),\ A_3 \equiv (a_x^2 + a_y^2)\frac{\omega_0^2}{2N^2} + a_z^2\left(1 - \frac{\omega_0^2}{N^2}\right).$$

Сопоставляя выражения (2.4) н (2.6)

$$\langle W^{(2)} \rangle / \langle W^{(1)} \rangle = \frac{3}{4}\left\{\frac{\omega_0^2}{2N^2} \sin^2 \theta + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{N^2}\right) \cos^2 \theta\right\},$$

$$\mathbf{a} = a\{\cos \varphi \sin \theta,\ \sin \varphi \sin \theta,\ \cos \theta\},$$

приходим к выводу, что, за исключением очень малых частот для горизонтально осциллирующих тел и $\omega_0 \lesssim N$ для вертикально осциллирующих, пульсирующие и осциллирующие шары имеют одинаковую эффективность в отношении порождения внутренних волн в безграничной однородно стратифицированной жидкости.

Этот вывод сделан в рамках моделирования источниками (2.3), (2.5), которое нуждается в отдельном обосновании. Можно лишь надеяться, что оно будет удовлетворительным при малости вытесняемого за период колебания объема жидкости по сравнению с волновым объемом, т. е. при условии $a \ll r_0$.

3. Стратифицированная жидкость в горизонтальном волноводе. Рассмотрим стратифицированную жидкость с $N = N(z)$, заключенную между двумя жесткими горизонтальными плоскостями $z = 0$ и $z = H$ и слабо возмущаемую периодическим источником массы $m(\mathbf{r},\ t) = m_0(\mathbf{r}) \sin \omega_0 t$. Для возмущений вертикальной компоненты скорости w имеем [6]

$$\hat{L} w = -\omega_0^2 \frac{\partial m_0}{\partial z} \sin \omega_0 t,\ w|_{z=0} = w|_{z=H} = 0,$$

и через них просто выражаются фурье-компоненты возмущения давления

$$p(\mathbf{k}_h, z, \omega) = -\frac{i\omega}{k_h^2}\left\{m(\mathbf{k}_h, z, \omega) - \frac{\partial w(\mathbf{k}_h, z, \omega)}{\partial z}\right\}.$$

По-прежнему используя преобразования Фурье по горизонтальным координатам и времени, а по вертикальной координате применяя разложение по собственным функциям задачи

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_h^2 + \frac{1}{\omega_n^2} k_h^2 N^2(z)\right\}\psi_n(k_h, z) = 0,$$

$$\psi_n|_{z=0} = \psi_n|_{z=H} = 0,$$

можно представить среднюю мощность потерь на излучение внутренних волн (1.2) в виде квадратичного по массовому источнику выражения

$$\langle W\rangle = -\frac{\omega_0^3}{2(2\pi)^{p-1}}\int d^{p-1}k_h \int_0^H dz dz' m_0(\mathbf{k}_h, z') m_0(\mathbf{k}_h, z) \times$$

$$\times \frac{1}{k_h^2}\frac{\partial^2 \operatorname{Im} G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{k}_h, z, z', \omega_0)}{\partial z \partial z'},$$

в которое входит только мнимая часть фурье-образа функции Грина. Последняя представляется суммой δ-функций по всем внутриволновым модам

$$\operatorname{Im} G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{k}_h, z, z', \omega) = -\pi\frac{\omega}{|\omega|}\sum_n \psi_n(k_h, z)\psi_n(k_h, z')\,\delta\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 1\right)$$

и позволяет привести формулу для мощности потерь к виду

$$\langle W\rangle = \frac{\omega_0^3}{4(2\pi)^{p-2}}\int d^{p-1}\mathbf{k}_h \frac{1}{k_h^2}\sum_n |\mu_n(\mathbf{k}_h)|^2\,\delta\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_n^2} - 1\right), \tag{3.1}$$

$$\mu_n(\mathbf{k}_h) \equiv \int_0^H dz \frac{\partial \psi_n(k_h, z)}{\partial z} m_0(\mathbf{k}_h, z).$$

Ограничимся далее рассмотрением волновода толщины H, заполненного однородно стратифицированной жидкостью $N = \mathrm{const}$, для которого

$$\psi_n(k_h, z) = \frac{1}{Nk_h}\sqrt{\frac{2}{H}}\sin\frac{\pi n z}{H},\quad \omega_n^2 = \frac{N^2 k_h^2}{k_h^2 + \frac{\pi^2 n^2}{H^2}},\quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда при моделировании пульсирующих и осциллирующих цилиндров, расположенных вдали от границ ($r_0 \ll z_0$, $r_0 \ll H - z_0$), поверхностными распределениями источников (2.3) и (2.5) соответственно найдем из (3.1)

$$\langle W^{(1)}\rangle = 2\pi\omega_0^2 a^2 r_0^2\sqrt{N^2 - \omega_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nZ}{n} J_0^2(nR), \tag{3.2}$$

$$\langle W^{(2)}\rangle = 8\pi\omega_0^2 r_0^2\sqrt{N^2 - \omega_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{a_x^2\frac{\omega_0^2}{N^2}\cos^2 nZ + a_z^2\left(1 - \frac{\omega_0^2}{N^2}\right)\sin^2 nZ\right\}J_1^2(nR),$$

$$Z \equiv \frac{\pi z_0}{H},\quad R \equiv \pi\frac{r_0}{H}\frac{N}{\sqrt{N^2 - \omega_0^2}}.$$

Отметим, что при переходе в $\langle W^{(1)}\rangle$ к пределу безграничной среды ($z_0 \to \infty$, $H/z_0 \to \infty$) сумма по модам оказывается логарифмически расходящейся в полном согласии с результатом п. 2. То же самое получается и при подстановке точечного источника (1.5) в (3.1) без перехода к пределу $H \to \infty$.

Для шаров, пульсирующих и осциллирующих в слое однородно стратифицированной жидкости вдали от границ и моделируемых поверхностными массовыми источниками (2.3), (2.5), из (3.1) следует

(3.3) $$\langle W^{(1)}\rangle = 4\pi r_0^3\omega_0^3 a^2 N^{-1}\sqrt{N^2-\omega_0^2}\,R^{-1}S_1,$$

$$\langle W^{(2)}\rangle = 9r_0^2\omega_0^3 HN^{-2}(N^2-\omega_0^2)\left\{(a_x^2+a_y^2)\frac{\omega_0^2}{2N^2}S_2 + a_z^2\left(1-\frac{\omega_0^2}{N^2}\right)S_3\right\},$$

$$S_1 = S_1(Z, R) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nZ \sin^2 nR}{n^2},$$

$$S_2 = S_2(Z, R) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos^2 nZ\left(\cos nR - \frac{\sin nR}{nR}\right)^2,$$

$$S_3 = S_3(Z, R) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2 nZ\left(\cos nR - \frac{\sin nR}{nR}\right)^2.$$

Из формул (3.2) и (3.3) с учетом условия их вывода $r_0 \ll H$ при не слишком близких к частоте плавучести частотах колебаний $\left(\sqrt{N^2-\omega_0^2} \sim \sim N\right)$ видно, что в отношении возбуждения низших мод внутренних волн более эффективен источник с пульсирующим объемом. Вклады низших мод в плоском в (3.2) и пространственном в (3.3) случаях таковы, что их отношение для осциллирующего и пульсирующего тел оказывается пропорциональным квадрату малого отношения размеров тел к толщине волновода $(r_0/H)^2$. Отметим, что результат (1.8), когда имеется только одна поверхностная мода, допускает аналогичную интерпретацию, поскольку длина $\gamma g/\omega_0^2$ характеризует тогда как длину волны, так и глубину слоя, затронутого волновым движением.

В (3.2), (3.3) входят ряды Фурье с периодом π по Z. Однако в рассматриваемых задачах смысл имеет лишь область $Z < \pi$. Более того, поскольку все эти ряды инвариантны относительно замены $Z \to \pi - Z$, достаточно проанализировать $Z < \pi/2$, считая центр шара или ось цилиндра находящимися в верхней половине волновода. По второму аргументу R периодической функцией является ряд $S_1(Z, R)$, а ряды S_2, S_3 представляются каждый суммой трех слагаемых, пропорциональных рядам, периодическим по обоим аргументам Z и R.

В трехмерной задаче с пульсирующими и осциллирующими шарами ряды легко суммируются:

$$S_1 = \frac{1}{2}R(\pi - R) - \frac{\pi}{8}(Z + R - |R - Z|), \quad 0 \leqslant Z,\ R \leqslant \pi/2,$$

$$S_2 = \frac{\pi}{12}\begin{cases} R, & 0 \leqslant R \leqslant Z \leqslant \pi/2,\\ 2R - 3Z + 2Z^3/R^2, & 0 \leqslant Z \leqslant R \leqslant \pi/2,\end{cases}$$

$$S_3 = \frac{\pi}{12}\begin{cases} R, & 0 \leqslant R \leqslant Z \leqslant \pi/2,\\ 3Z - 2Z^3/R^2, & 0 \leqslant Z \leqslant R \leqslant \pi/2.\end{cases}$$

Неравенство $R \leqslant Z$ эквивалентно $\omega_0 \leqslant N\sqrt{1 - r_0^2/z_0^2}$, и, поскольку $r_0 \ll \ll z_0$ по условию вывода, оно нарушается лишь при непосредственной близости частоты колебаний к частоте плавучести N. С другой стороны, в последней ситуации, хотя и возникают интересные интерференционные колебания мощности с ростом частоты ω_0, сами величины мощности становятся очень малыми согласно (3.3) из-за малости дополнительных множителей $\sim \sqrt{N^2 - \omega_0^2}$.

Таким образом, для мощности потерь энергии на излучение внутренних волн пульсирующим шаром имеем

$$\langle W^{(1)}\rangle = \pi^2\omega_0^3 r_0^3 a^2\left(\frac{\sqrt{N^2-\omega_0^2}}{N} - \frac{2r_0}{H}\right), \quad 0 \leqslant w_0 \leqslant N\sqrt{1 - r_0^2/z_0^2}.$$

Отсюда видно, что при переходе к пределу безграничной жидкости получается простой результат (2.4), а в допредельной ситуации порождение волн оказывается несколько меньшим. Для колеблющегося шара суммирование рядов при том же условии при $\omega_0 \leqslant N\sqrt{1 - r_0^2/z_0^2}$ приводит к формуле (2.6).

Таким образом, суммарная эффективность генераторов внутренних волн пульсирующего и осциллирующего типов в горизонтальном волноводе, как и в пределе безграничной жидкости, оказывается практически одинаковой. Имеются большие различия в распределении энергии по модам. Максимум мощности потерь приходится на более высокие моды в случае осциллирующих источников.

Отметим, что при свободной верхней границе волновода дополнительно будут образовываться поверхностные волны. Что касается внутренних волн, то различие с рассмотренным выше случаем «твердой крышки» при r_0, $z_0 \ll H$ мало.

Использованное при расчетах моделирование колеблющихся тел простыми распределениями массовых источников перестает быть удовлетворительным при увеличении амплитуды колебаний. Однако в противоположном предельном случае очень больших амплитуд ($a \gg r_0$) становится возможным другое упрощенное моделирование — и вновь результаты достаточно просты [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hendershott M. C.** Impulsively started oscillations in a rotating stratified fluid. — J. Fluid Mech., 1969, v. 36, pt 3.
2. **Hurley D. G.** The emission of internal waves by vibrating cylinders.— J. Fluid Mech., 1969, v. 36, pt 4.
3. **Hurley D. G.** A general method for solving steady-state internal gravity waves problems.— J. Fluid Mech., 1972, v. 56, pt 4.
4. **Rehm R. G., Radt H. S.** Internal waves generated by a translating oscillating body.— J. Fluid Mech., 1975, v. 68, pt 2.
5. **Кочин Н. Е.** Плоская задача об установившихся колебаниях тел под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости; Теория волн, вынуждаемых колебаниями тела под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости. Собр. соч.— М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1949, т. 2.
6. **Городцов В. А., Теодорович Э. В.** Черенковское излучение внутренних волн равномерно движущимися источниками. Препринт № 183.— М.: Ин-т пробл. мех. АН СССР, 1981.
7. **Городцов В. А., Теодорович Э. В.** Плоская задача для внутренних волн, порождаемых движущимися сингулярными источниками.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 2.
8. **Городцов В. А., Теодорович Э. В.** Излучение внутренних волн при периодическом движении источников.— ПМТФ, 1983, № 4.

Поступила 6/VI 1985 г.

УДК 532.526.4 : 536.24

К РАСЧЕТУ ЗАКРУЧЕННОЙ ГАЗОВОЙ ЗАВЕСЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

Э. П. Волчков, Н. А. Дворников, В. И. Терехов

(Новосибирск)

Эффективность закрученной газовой завесы в цилиндрическом канале и тепломассообмен в таких условиях экспериментально изучались в [1—3], где установлен ряд характерных особенностей по сравнению с незакрученной завесой, обусловленных вращением периферийной части потока. В частности, в [1] показано, что увеличение параметра вдува инертного газа $m = \rho_s w_s/\rho_0 w_0$ при закрутке в отличие от незакрученной завесы приводит к интенсификации процессов массообмена. В то же время потоки с частичной периферийной закруткой отличаются от полностью закрученных течений. Главное отличие состоит в том, что при периферийной закрутке потока вдоль стенки развивается типичный струйный профиль циркуляции, в котором есть две характерные зоны — пристенная и внешняя. В пристенной части профиля циркуляции ($y <$