

УДК 534.22.094.1

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ВОЛНЫ ЛЭМБА В РАМКАХ КОНТИНУУМА КОССЕРА

М. А. Кулеш, В. П. Матвеев, И. Н. Шардаков

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь

E-mails: kma@icmm.ru, mvp@icmm.ru, shardakov@icmm.ru

В рамках модели среды Коссера рассмотрена задача о распространении упругой волны Лэмба в тонкой пластине. Деформированное состояние характеризуется независимыми векторами перемещения и поворота. Решения уравнений движения ищутся в виде волновых пакетов, задаваемых спектром Фурье произвольной формы для трех компонент вектора перемещения и трех компонент вектора поворота, зависящих от времени, глубины и продольной координаты. Исходная система уравнений распадается на две, одна из которых описывает волну Лэмба, а вторая соответствует поперечной волне с амплитудой, зависящей от глубины. Для волн обоих типов получены аналитические решения в перемещениях. В отличие от волны Лэмба полученное решение для поперечной волны не имеет аналогов в классической теории упругости. Проведено сравнение решения для поперечной волны с решением для волны Лэмба.

Ключевые слова: волна Лэмба, дисперсия, среда Коссера, аналитические решения.

Введение. В данной работе в рамках модели среды Коссера рассматриваются упругие волны Лэмба. Волна Лэмба представляет собой нормальную волну в упругом волноводе и распространяется в тонких пластинах (или пленках), обе поверхности которых свободны от нагрузок, а толщина пластины порядка длины упругой волны. В этом случае пластина выполняет функции волновода, а вектор смещения в волне имеет как продольную, так и поперечную составляющие, причем поперечная составляющая перпендикулярна поверхности пластины.

Так как волны Лэмба должны удовлетворять не только уравнениям теории упругости, но и граничным условиям на поверхности пластины, картина движения в них и их свойства более сложны, чем у волн в неограниченных твердых телах. Данный тип волн для классической упругой среды хорошо изучен [1–3].

Волны Лэмба находят широкое применение. В частности, их используют для всестороннего неразрушающего контроля листовых материалов и конструкций, а также в системах для обработки сигналов (дисперсионные линии задержки). Поэтому в связи с появлением новых материалов и соответственно новых теорий для их описания актуальной является задача обобщения известных классических решений, описывающих распространение волн Лэмба, на новые модели сплошных сред. В данной работе решение для волны Лэмба обобщается на случай упругой линейной модели Коссера.

В теории среды Коссера [1] деформация описывается не только вектором перемещения \mathbf{u} , но и кинематически независимым вектором $\boldsymbol{\omega}$, который характеризует малые пово-

Работа выполнена при финансовой поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF) в рамках программы “Фундаментальные исследования и высшее образование (BRHE)” (грант № Y2-0-09-04), а также Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-97511-р-офи).

роты частиц. Тензоры напряжений $\tilde{\sigma}$ и моментных напряжений $\tilde{\mu}$ в этой теории являются несимметричными. Динамическое поведение упругой изотропной среды без учета температурных эффектов определяют восемь констант: две постоянные Ламе, четыре упругие константы, характеризующие микроструктуру, а также плотность и параметр, отвечающий за меру инерции среды при вращении (плотность момента инерции). Следует отметить, что недостаточное количество информации о значениях этих констант для реальных конструкционных материалов является основным сдерживающим фактором в развитии и применении данной теории на практике.

Теория среды Коссера предсказывает принципиально иное поведение волн по сравнению с классической теорией упругости. Во-первых, имеет место дисперсия упругих поверхностных волн Рэлея [4–6], в то время как в классической теории упругости волны Рэлея не обладают дисперсией. Во-вторых, для модели среды Коссера поверхностная поперечная волна распространяется с горизонтальной поляризацией. В классической теории упругости само существование волны Лява как поверхностной волны обусловлено наличием слоя на полупространстве, и при стремлении толщины слоя к нулю волна Лява переходит в объемную. В [7] показано, что для среды Коссера поперечная горизонтально поляризованная волна, затухающая по мере увеличения глубины, существует и в отсутствие плоского слоя.

Сказанное выше позволяет предположить, что и в случае волны Лява отличия от классического случая будут значительными. В [5] получен микрополярный аналог классического дисперсионного уравнения Лэмба и приведены дисперсионные зависимости нескольких волновых мод в сравнении с классическим случаем. Показано, что помимо обобщения существующих решений в теории Рэлея — Лэмба в теории среды Коссера существует решение, не имеющее аналога в классическом случае.

В настоящей работе получено еще одно решение, также не имеющее аналогов в классической теории упругости. Это решение описывает распространяющуюся в пластине волну с одной поперечной компонентой вектора перемещения и двумя компонентами вектора поворота. Данная волна имеет еще большее количество мод, чем волна Лэмба, все моды обладают дисперсией, перемещения во всех модах зависят от глубины. Решения уравнений движения получены для случая монохроматической волны и описывают распространение волновых пакетов, задаваемых спектром Фурье произвольной формы.

В данной работе приведено решение для вектора перемещения, вектора поворота, а также дисперсионное уравнение и его численные решения для некоторого гипотетического набора материальных параметров.

1. Постановка задачи. Приведем основные соотношения для упругой среды Коссера [1]:

— уравнения движения

$$\nabla \cdot \tilde{\sigma} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\sigma}^T : \tilde{\mathbf{E}} + \nabla \cdot \tilde{\mu} + \mathbf{Y} = j \ddot{\boldsymbol{\omega}}; \quad (1.1)$$

— геометрические соотношения

$$\tilde{\gamma} = \nabla \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \tilde{\chi} = \nabla \boldsymbol{\omega}; \quad (1.2)$$

— физические уравнения

$$\tilde{\sigma} = 2\mu \tilde{\gamma}^{(S)} + 2\alpha \tilde{\gamma}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\gamma}) \tilde{\mathbf{e}}, \quad \tilde{\mu} = 2\gamma \tilde{\chi}^{(S)} + 2\varepsilon \tilde{\chi}^{(A)} + \beta I_1(\tilde{\chi}) \tilde{\mathbf{e}}. \quad (1.3)$$

С учетом соотношений (1.1)–(1.3) уравнения движения для вектора перемещения \mathbf{u} и вектора поворота $\boldsymbol{\omega}$ имеют вид

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{X} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ (\beta + 2\gamma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Y} &= j \ddot{\boldsymbol{\omega}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В (1.1)–(1.4) \mathbf{X} — вектор удельной плотности объемных сил; \mathbf{Y} — вектор удельной плотности объемных моментов; \mathbf{u} — вектор перемещения; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор поворота; $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\chi}$ — тензоры деформаций и изгиба-кручения; $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\mu}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений; μ , λ — постоянные Ламе; α , β , γ , ε — физические постоянные материала упругой среды Коссера; ρ — плотность; j — плотность момента инерции (мера инерции среды при вращении); $\tilde{\mathbf{E}}$ — тензор Леви-Чивиты третьего ранга; $(\cdot)^{(S)}$ — операция симметрирования; $(\cdot)^{(A)}$ — операция альтернирования; $\nabla(\cdot)$ — набла-оператор; $I_1(\cdot)$ — первый инвариант тензора; $\tilde{\mathbf{e}}$ — единичный тензор [8]. В отличие от классической теории тензоры $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\sigma}$ являются несимметричными.

Рассмотрим упругий слой толщиной $2H$, заключенный между плоскостями $z = \pm H$. Оси декартовых координат x и y направим вдоль поверхности, а ось z — перпендикулярно ей. Будем считать, что волна распространяется в направлении оси x .

В случае волны Лэмба граничные условия определяют отсутствие сил и моментов на обеих поверхностях слоя:

$$\begin{aligned} \sigma_{zx}|_{z=\pm H} = 0, & \quad \sigma_{zy}|_{z=\pm H} = 0, & \quad \sigma_{zz}|_{z=\pm H} = 0, \\ \mu_{zx}|_{z=\pm H} = 0, & \quad \mu_{zy}|_{z=\pm H} = 0, & \quad \mu_{zz}|_{z=\pm H} = 0. \end{aligned}$$

2. Построение общего решения. В отличие от известных работ [2–6], в которых рассматриваются только монохроматические волны, следуя методике, описанной в [9, 10], общее решение задачи представим в виде фурье-интегралов относительно всех компонент вектора перемещения $u_n(x, z, t)$ и вектора поворота $\omega_n(x, z, t)$, что соответствует представлению решения в виде ограниченного во временном и фурье-пространствах волнового пакета произвольной формы:

$$\begin{aligned} u_n(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} U_n(z) e^{i(kx+ft)} \hat{S}_0(f) df, \\ \omega_n(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} W_n(z) e^{i(kx+ft)} \hat{S}_0(f) df. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; k — волновое число; f — круговая частота (связанная с физической частотой p , измеряемой в герцах, соотношением $f = 2\pi p$); t — время; $U_n(z)$, $W_n(z)$ — амплитудные функции, зависящие от глубины; $\hat{S}_0(f)$ — комплексная спектральная функция, соответствующая фурье-спектру сигнала-источника и определяющая форму волнового пакета. Физический смысл здесь имеют только вещественные части компонент вектора перемещения и поворота.

Представление (2.1) описывает волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси x . При изменении знака слагаемого kx аналогично получается решение для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x .

В данном случае оправданно выполнение непрерывного фурье-преобразования уравнений движения (1.4) и представления (2.1). Прямое и обратное преобразования Фурье будем использовать в виде [8]

$$\hat{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-ift} dt, \quad S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(f) e^{ift} df,$$

где $\hat{S}(f)$ — комплексная функция Фурье-образа функции $S(t) \in L^2(\mathbb{R})$, определенной на всей действительной оси и обладающей конечной энергетической нормой:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt < \infty.$$

Отсюда следует система уравнений относительно искомым компонент вектора перемещения и поворота (предполагается, что массовые силы и моменты отсутствуют):

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} - (\mu + \alpha) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \hat{\mathbf{u}} + 2\alpha \operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{\omega}} + \rho f^2 \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}, \\ (\beta + 2\gamma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\omega}} - (\gamma + \varepsilon) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{\omega}} + 2\alpha \operatorname{rot} \hat{\mathbf{u}} - (4\alpha - j f^2) \hat{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Фурье-преобразование представления (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \{U_x(z), U_y(z), U_z(z)\}^T e^{ikx} \hat{S}_0(f), \\ \hat{\boldsymbol{\omega}} &= \{W_x(z), W_y(z), W_z(z)\}^T e^{ikx} \hat{S}_0(f). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для удобства представления решения все величины приведем к безразмерному виду с использованием характерного размера X_0 и характерной частоты f_0 . Дополнительно введем четыре безразмерные величины, одна из которых зависит от характерного размера:

$$A = X_0 \sqrt{\frac{\mu}{B(\gamma + \varepsilon)}}, \quad B = \frac{\alpha + \mu}{\alpha}, \quad C = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \quad F = \frac{B - 1}{A^2 B}.$$

Для учета динамических эффектов будем использовать безразмерные параметры

$$C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_2^2 = \frac{\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_3^2 = \frac{B}{B - 1} C_2^2, \quad C_4^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{j X_0^2 f_0^2}, \quad C_5^2 = \frac{\beta + 2\gamma}{j X_0^2 f_0^2}.$$

Здесь C_1, C_2 — аналоги скорости продольной и поперечной волн; C_4, C_5 — два дополнительных независимых параметра, обусловленных наличием новых материальных констант среды Коссера; параметр C_3 введен для упрощения записи.

Используя метод, подробно описанный в [11], применительно к (2.2), (2.3), получим общее безразмерное решение уравнений движения (1.4). Следует отметить, что в отличие от случая поверхностной волны, решение для которой рассмотрено в [11], в данном случае необходимо оставить все частные решения, а не только затухающие по мере увеличения глубины. Таким образом, общее решение в перемещениях имеет вид

$$\begin{aligned} u_x(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{D_1 ik e^{-\nu_1 z} + D_2 \nu_2 e^{-\nu_2 z} + D_3 \nu_3 e^{-\nu_3 z} + D_4 ik e^{\nu_1 z} - \\ &\quad - D_5 \nu_2 e^{\nu_2 z} - D_6 \nu_3 e^{\nu_3 z}\} e^{i(kx+ft)} \hat{S}_0(f) df, \\ u_y(x, z, t) &= \frac{F}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_2 \left(A_m - \frac{f^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{-\xi_2 z} + E_3 \left(A_p - \frac{f^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{-\xi_3 z} + \right. \\ &\quad \left. + E_5 \left(A_m - \frac{f^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{\xi_2 z} + E_6 \left(A_p - \frac{f^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{\xi_3 z} \right\} e^{i(kx+ft)} \hat{S}_0(f) df, \\ u_z(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{-D_1 \nu_1 e^{-\nu_1 z} + D_2 ik e^{-\nu_2 z} + D_3 ik e^{-\nu_3 z} + D_4 \nu_1 e^{\nu_1 z} + \\ &\quad + D_5 ik e^{\nu_2 z} + D_6 ik e^{\nu_3 z}\} e^{i(kx+ft)} \hat{S}_0(f) df, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_x(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{E_1 ik e^{-\xi_1 z} + E_2 \xi_2 e^{-\xi_2 z} + E_3 \xi_3 e^{-\xi_3 z} + E_4 ik e^{\xi_1 z} - \\
 &\quad - E_5 \xi_2 e^{\xi_2 z} - E_6 \xi_3 e^{\xi_3 z}\} e^{i(kx+ft)} \hat{S}_0(f) df, \\
 \omega_y(x, z, t) &= \frac{B}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ D_2 \left(A_m - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{-\nu_2 z} + D_3 \left(A_p - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{-\nu_3 z} + \right. \\
 &\quad \left. + D_5 \left(A_m - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{\nu_2 z} + D_6 \left(A_p - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{\nu_3 z} \right\} e^{i(kx+ft)} \hat{S}_0(f) df, \\
 \omega_z(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{-E_1 \xi_1 e^{-\xi_1 z} + E_2 ik e^{-\xi_2 z} + E_3 ik e^{-\xi_3 z} + E_4 \xi_1 e^{\xi_1 z} + \\
 &\quad + E_5 ik e^{\xi_2 z} + E_6 ik e^{\xi_3 z}\} e^{i(kx+ft)} \hat{S}_0(f) df,
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

где константы D_i и E_i ($i = 1, \dots, 6$) определяются из граничных условий; экспоненциальные показатели ν_m и ξ_m ($m = 1, \dots, 3$) определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 \nu_1 &= \sqrt{k^2 - \frac{f^2}{C_1^2}}, \quad \xi_1 = \sqrt{k^2 - \frac{f^2}{C_5^2} + \frac{4C_4^2}{FC_5^2}}, \quad \nu_2 = \xi_2 = \sqrt{k^2 - A_m}, \quad \nu_3 = \xi_3 = \sqrt{k^2 - A_p}, \\
 A_{p,m} &= \frac{C_3^2 + C_4^2}{2C_3^2 C_4^2} f^2 - 2A^2 \pm \sqrt{\frac{(C_3^2 - C_4^2)^2}{4C_3^4 C_4^4} f^4 - \frac{2A^2(C_2^2 C_3^2 - 2C_3^2 C_4^2 + C_2^2 C_4^2)}{C_2^2 C_3^2 C_4^2} f^2 + 4A^4}.
 \end{aligned}$$

3. Волны Рэлея и Лэмба. В частном случае приведенные выше соотношения (2.4) описывают хорошо изученные решения для поверхностных волн Рэлея в упругом полупространстве. Данные решения являются затухающими по мере увеличения глубины, т. е. константы при экспонентах с положительными показателями в (2.4) равны нулю: $D_4 = D_5 = D_6 = 0$ и $E_4 = E_5 = E_6 = 0$. Граничные условия определяют отсутствие сил и моментов на поверхности полупространства ($z = 0$) и в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zx}|_{z=0} &= 0, & \sigma_{zy}|_{z=0} &= 0, & \sigma_{zz}|_{z=0} &= 0, \\
 \mu_{zx}|_{z=0} &= 0, & \mu_{zy}|_{z=0} &= 0, & \mu_{zz}|_{z=0} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Подставляя решение (2.4) в граничные условия (3.1), получим две однородные системы алгебраических уравнений, из условия разрешимости которых находим дисперсионные уравнения для двух типов волн:

1) для волны Рэлея с компонентами u_x, u_z, ω_y [11]

$$\det(M_r(\nu_1, \nu_2, \nu_3)) = 0; \tag{3.2}$$

2) для поперечной поверхностной волны с компонентами u_y, ω_x, ω_z [7]

$$\det(M_t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) = 0. \tag{3.3}$$

В (3.2), (3.3) матрицы $M_r(p_1, p_2, p_3)$ и $M_t(p_1, p_2, p_3)$ определяются выражениями

$$M_r(p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix} 2k^2 - \frac{f^2}{C_2^2} & -2ikp_2 & -2ikp_3 \\ 2ikp_1 & 2k^2 - \frac{f^2}{C_2^2} & 2k^2 - \frac{f^2}{C_2^2} \\ 0 & p_2 \left(A_m - \frac{f^2}{C_3^2} \right) & p_3 \left(A_p - \frac{f^2}{C_3^2} \right) \end{bmatrix},$$

$$M_t(p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix} \frac{2ik}{1-B} & p_2 \left(2 + \frac{A_m C_4^2 - f^2}{2A^2 C_4^2} \right) & p_3 \left(2 + \frac{A_p C_4^2 - f^2}{2A^2 C_4^2} \right) \\ ikp_1(1+C) & p_2^2 + k^2 C & p_3^2 + k^2 C \\ \left(\frac{C_5^2}{C_4^2} - C - 1 \right) k^2 - p_1^2 \frac{C_5^2}{C_4^2} & 2ikp_2(1+C) & 2ikp_3(1+C) \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что в полупространстве, динамическое поведение которого описывается моделью среды Коссера, помимо поверхностной эллиптической волны Рэля может существовать также поверхностная волна, имеющая одну поперечную компоненту, параллельную граничной поверхности и перпендикулярную направлению распространения волны. Поэтому данную волну можно сравнить с волной Лява, хотя известно, что в классической теории упругости само существование волны Лява как поверхностной упругой волны определяется наличием слоя на полупространстве. При стремлении толщины слоя к нулю волна Лява переходит в объемную. Таким образом, в среде Коссера обнаруживается качественно новая волновая мода, не имеющая аналогов в классической теории упругости.

При построении решения, описывающего распространение волны Лэмба, в качестве характерного размера выберем толщину слоя $X_0 = H$. Тогда безразмерные граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zx}|_{z=\pm 1} = 0, \quad \sigma_{zy}|_{z=\pm 1} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=\pm 1} = 0, \\ \mu_{zx}|_{z=\pm 1} = 0, \quad \mu_{zy}|_{z=\pm 1} = 0, \quad \mu_{zz}|_{z=\pm 1} = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Как и выше, подставляя решения (2.4) в граничные условия (3.4), получим две однородные системы алгебраических уравнений, из условия разрешимости которых следуют дисперсионные уравнения для двух типов волн:

1) для волны Лэмба с компонентами u_x, u_z, ω_y

$$\det \begin{bmatrix} M_r(\nu_1, \nu_2, \nu_3)L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) & M_r(-\nu_1, -\nu_2, -\nu_3)L(-\nu_1, -\nu_2, -\nu_3) \\ M_r(\nu_1, \nu_2, \nu_3)L(-\nu_1, -\nu_2, -\nu_3) & M_r(-\nu_1, -\nu_2, -\nu_3)L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \end{bmatrix} = 0; \quad (3.5)$$

2) для поперечной волны с компонентами u_y, ω_x, ω_z

$$\det \begin{bmatrix} M_t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)L(\xi_1, \xi_2, \xi_3) & M_t(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3)L(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) \\ M_t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)L(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) & M_t(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3)L(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.6)$$

В (3.5), (3.6) $L(p_1, p_2, p_3)$ — диагональная матрица вида

$$L(p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix} e^{-p_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-p_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-p_3} \end{bmatrix}.$$

Данное решение также позволяет сделать вывод, что в слое, динамическое поведение которого описывается моделью среды Коссера, помимо волны Лэмба существует принципиально новая волновая мода с одной поперечной компонентой перемещений, амплитуда которой меняется в зависимости от глубины. Эта волновая мода отсутствует в классической теории упругости.

4. Решение дисперсионных уравнений. Анализ решений уравнений (3.2) и (3.3) проведен в [7]. Приведем дисперсионные кривые, которые являются решениями уравнений (3.5) и (3.6). Для численного анализа используем следующие значения материальных параметров: $\lambda = 2,8 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu = 4 \cdot 10^9$ Н/м², $\rho = 10^5$ кг/м³, $\alpha = 2 \cdot 10^9$ Н/м², $\beta = 10^8$ Н, $\gamma = 1,936 \cdot 10^8$ Н, $\varepsilon = 3,046 \cdot 10^9$ Н, $j = 10^4$ кг/м.

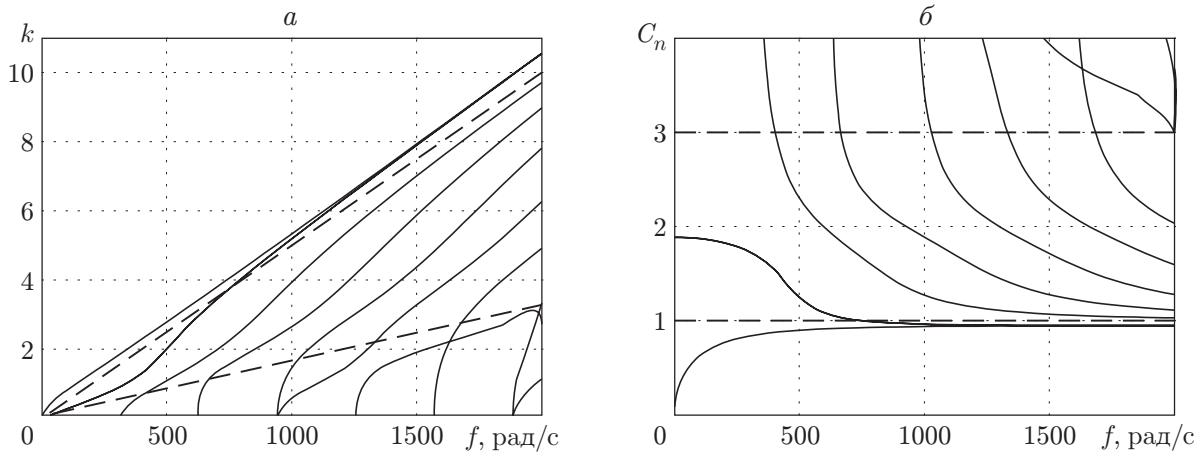


Рис. 1. Зависимости волнового числа (а) и нормированной фазовой скорости (б) от частоты для волны Лэмба в классической упругой среде

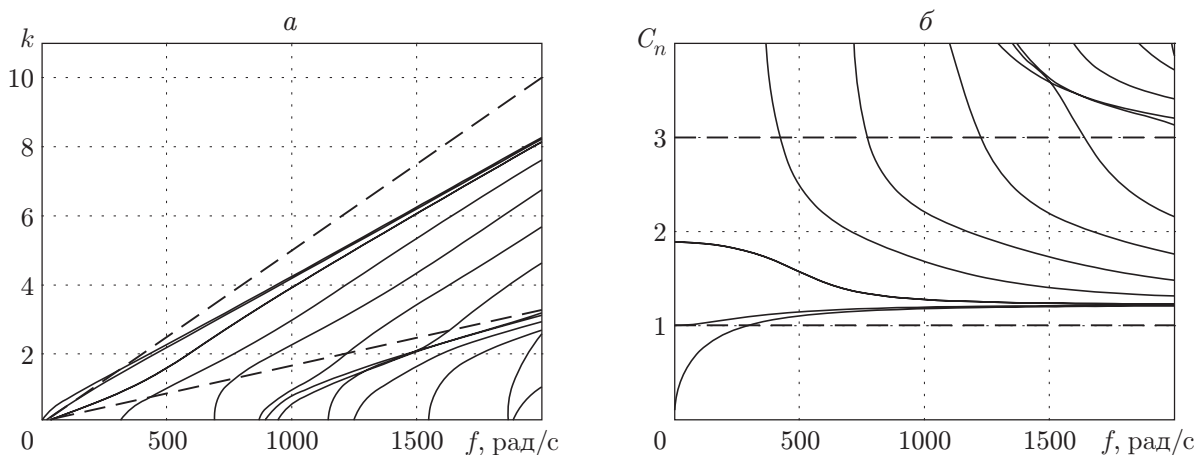


Рис. 2. Зависимости волнового числа (а) и нормированной фазовой скорости (б) от частоты для волны Лэмба в среде Коссера

Зависимости волновых чисел и нормированных фазовых скоростей $C_n(f) = C_p(f)/C_2 = f/(C_2k(f))$ для волны Лэмба в классической упругой среде [2] приведены на рис. 1. (На рис. 1–3 штриховые линии соответствуют продольной и поперечной волнам.) Аналогичные зависимости для среды Коссера, соответствующие решению (3.5), приведены на рис. 2. Таким образом, несимметричная теория предсказывает новые волновые моды при распространении волны Лэмба в пластине. Математическое обоснование этому дано в [5]. Данные на рис. 3 соответствуют решению дисперсионного уравнения (3.6) для поперечной волны с компонентами u_y, ω_x, ω_z , которая обладает дисперсией, имеет много волновых мод и амплитуда которой зависит от глубины.

Заключение. Основной результат, полученный в данной работе, состоит в следующем. В тонкой пластине, динамическое поведение которой описывается моделью среды Коссера, помимо волны Лэмба может существовать волна, имеющая одну поперечную компоненту, параллельную граничной поверхности и перпендикулярную направлению распространения волны. Таким образом, в среде Коссера существует качественно новая волновая мода, не имеющая аналогов в классической теории упругости.

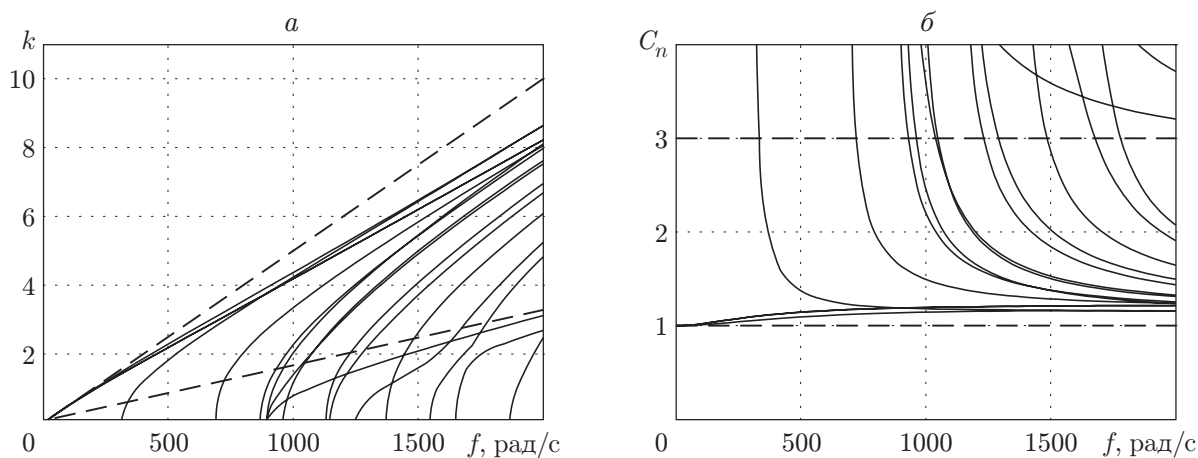


Рис. 3. Зависимости волнового числа (а) и нормированной фазовой скорости (б) от частоты для поперечной волны в среде Коссера

Результаты данной работы могут быть использованы в дальнейшем при подготовке, проведении и интерпретации динамических (волновых) экспериментов, позволяющих определить роль несимметричной теории упругости в механике сплошных сред, а также идентифицировать материальные параметры среды Коссера.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. **Гринченко В. Т.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. М.: Наука, 1981.
3. **Викторов И. А.** Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981.
4. **Eringen A. C.** Microcontinuum field theories. V. 1. Foundation and solids. N. Y.: Springer-Verlag, 1999.
5. **Ерофеев В. И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1999.
6. **Лялин А. Е., Пирожков В. А., Степанов Р. Д.** О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журн. 1982. Т. 28, № 6. С. 838–840.
7. **Кулеш М. А., Матвеев В. П., Шардаков И. Н.** О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журн. 2006. Т. 52, № 2. С. 227–235.
8. **Корн Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. СПб.: Изд-во “Лань”, 2003.
9. **Бхатнагар П.** Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. М.: Мир, 1983.
10. **Achenbach J. D.** Wave propagation in elastic solids. Amsterdam; London: North-Holland publ. co., 1973.
11. **Кулеш М. А., Матвеев В. П., Шардаков И. Н.** Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 4. С. 116–124.

Поступила в редакцию 30/III 2006 г.