

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

В. П. Мясников

(Москва)

Пусть в безграничной вязко-пластической среде движется с постоянной скоростью в направлении своей оси бесконечно длинный цилиндр, поперечное сечение которого ограничено произвольным, но достаточно гладким контуром. Будем рассматривать течение, вызываемое им в среде, в декартовой системе координат, жестко связанной с ним. Направим ось z' вдоль оси цилиндра против направления его движения, а оси x' и y' расположим в плоскости его поперечного сечения.

При рассматриваемом движении цилиндра частицы среды будут иметь составляющую скорости u' только в направлении оси z , причем картина распределения скоростей в любой плоскости поперечного сечения будет зависеть только от x' и y' .

Пусть μ — коэффициент вязкости среды, τ_0 — предел текучести, u_0 — скорость движения цилиндра в направлении его оси и L — характерный линейный размер. Введем следующие безразмерные переменные:

$$x = \frac{x'}{L}, \quad y = \frac{y'}{L}, \quad u = \frac{u'}{u_0}$$

Уравнение движения вязко-пластичной среды [1] приведется, в силу сказанного, к одному уравнению для определения функции $u(x, y)$

$$\left[1 + \frac{Su_y^2}{(u_x^2 + u_y^2)^{3/2}} \right] u_{xx} - \frac{2Su_x u_y}{(u_x^2 + u_y^2)^{3/2}} u_{xy} + \left[1 + \frac{Su_x^2}{(u_x^2 + u_y^2)^{3/2}} \right] u_{yy} = 0 \quad (1)$$

где S параметр Сен-Венана, равный $\tau_0 L / \mu u_0$. Уравнение будет квазилинейным и эллиптическим на любой его интегральной поверхности и при $S = 0$, что соответствует случаю вязкой жидкости, совпадает с уравнением Лапласа.

Сформулируем граничные условия для функции $u(x, y)$. Пусть Γ_1 контур поперечного сечения цилиндра. Тогда из условий прилипания будем иметь

$$u|_{\Gamma_1} = 0 \quad (2)$$

Отсутствие течения среды на некотором контуре Γ_2 приведет к двум условиям

$$u|_{\Gamma_2} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0 \quad (3)$$

Контур Γ_2 заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения.

Задача об определении течения свелась, таким образом, к нахождению решения квазилинейного уравнения (1) при условиях (2), (3) в некоторой кольцевой области (фиг. 1).

Заметим, что при $S = 0$ поставленная граничная задача решения не имеет ни при каком замкнутом контуре Γ_2 , расположенном в конечной части плоскости. Действительно, при $S = 0$ уравнение (1) с условиями (2) и (3) должно описывать течение вязкой жидкости между двумя цилин-

драми,двигающимися друг относительно друга и на одном из них касательное напряжение должно обратиться в нуль [2], что, очевидно, невозможно ни при каком выборе контура Γ_2 . Если же считать, что контур Γ_2 стягивается в бесконечно удаленную точку, то единственным решением будет $u \equiv 0$, так как единственным ограниченным в бесконечности решением уравнения Лапласа в плоском случае будет $u = \text{const}$ [3]. Это свидетельствует о том, что при движении цилиндра он увлечет за собой всю жидкость. Уравнение (1) может быть линеаризовано при помощи преобразования Лежандра [4]

$$u_x = \xi, \quad u_y = \eta, \\ u(x, y) = x\xi + y\eta - \Phi(\xi, \eta)$$

Если функциональный определитель

$$\Delta = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \Phi_{\xi\xi}\Phi_{\eta\eta} - \Phi_{\xi\eta}^2$$

отличен от нуля, то в полярных координатах

$$S\lambda = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \theta = \arctg \eta / \xi$$

получим уравнение

$$\lambda(\lambda + 1)\Phi_{\lambda\lambda} + \lambda\Phi_{\lambda} + \Phi_{\theta\theta} = 0 \quad (4)$$

Величина $S\lambda$ совпадает с интенсивностью скоростей деформации сдвига и поэтому будем называть плоскость (λ, θ) плоскостью годографа скоростей деформации сдвига, а плоскость (Oxy) физической плоскостью. Связь между этими плоскостями осуществляется при помощи соотношений

$$u = \lambda\Phi_{\lambda} - \Phi \\ x = \frac{1}{S} \left[\Phi_{\lambda} \cos \theta - \frac{1}{\lambda} \Phi_{\theta} \sin \theta \right] \\ y = \frac{1}{S} \left[\Phi_{\lambda} \sin \theta + \frac{1}{\lambda} \Phi_{\theta} \cos \theta \right] \quad (5)$$

Заметим, что для линии $u = \text{const}$ будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y) = (u_x^2 + u_y^2)^{1/2} = S\lambda$$

Два граничных условия (3), учитывая предыдущее соотношение, приведут в плоскости годографа только к одному условию

$$(\Phi)_{\lambda=0} = -1. \quad (6)$$

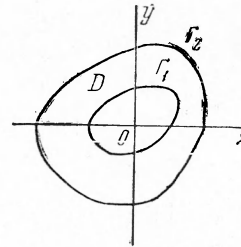
Выполнение же условия (1) эквивалентно в плоскости годографа трем соотношениям, из которых, однако, только два независимы. Действительно, из (2) и (3) следует, что:

$$(\lambda\Phi_{\lambda} - \Phi)_{\lambda=\lambda(\theta)} = 0 \quad (7)$$

Так как $x(\theta)$ и $y(\theta)$ в выражениях (4) при $\lambda = \lambda_0(\theta)$ должны совпадать с координатами точек контура Γ_1 в физической плоскости, получим еще два условия

$$(\Phi_{\lambda})_{\lambda=\lambda_0(\theta)} = S [X_0(t) \cos \theta + Y_0(t) \sin \theta] \\ (\Phi_{\theta})_{\lambda=\lambda_0(\theta)} = S [Y_0(t) \cos \theta - X_0(t) \sin \theta] \lambda_0(\theta) \quad (8)$$

где $t = t(\theta)$ определяется из требования, чтобы (7) и (8) удовлетворялись на одном и том же контуре $\lambda = \lambda_0(\theta)$. Для определения $t(\theta)$ будем искать $\lambda_0(\theta)$ как неявную функцию, определяемую (6).



Фиг. 1

Тогда

$$\frac{d\lambda_0}{d\theta} = - \frac{\lambda_0 \Phi_{\lambda\theta} - \Phi_\theta}{\lambda_0 \Phi_{\lambda\lambda}} = - \frac{\Phi_{\lambda\theta} - S [Y_0(t) \cos \theta - X_0(t) \sin \theta]}{\Phi_{\lambda\lambda}}$$

Из первого соотношения (8) следует, что

$$\frac{d}{d\theta} [(\Phi_\lambda)_{\lambda=\lambda_0(\theta)}] = \Phi_{\lambda\lambda} \frac{d\lambda_0}{d\theta} + \Phi_{\lambda\theta} = S \frac{d}{d\theta} [X_0(t) \cos \theta + Y_0(t) \sin \theta]$$

Находя $d\lambda_0 / d\theta$ из последнего выражения и сравнивая его с предыдущим, получим искомую связь между t и θ в виде уравнения

$$X_0'(t) = -Y_0'(t) \operatorname{tg} \theta$$

Введем обозначение

$$\varphi(\theta) = S [X_0(t) \cos \theta + Y_0(t) \sin \theta]$$

Условия (8) можно записать следующим образом:

$$(\Phi_\lambda)_{\lambda=\lambda_0(\theta)} = \varphi(\theta), \quad (\Phi_\theta)_{\lambda=\lambda_0(\theta)} = \varphi'(\theta) \lambda_0(\theta)$$

и, следовательно, эти условия не будут независимыми. Таким образом, условие (2) эквивалентно двум условиям в плоскости годографа

$$(\lambda \Phi_\lambda - \Phi)_{\lambda=\lambda_0(\theta)} = 0, \quad (\Phi_\lambda)_{\lambda=\lambda_0(\theta)} = \varphi(\theta) \quad (9)$$

где $\varphi(\theta)$ известно, если контур Γ_1 задан. Контур $\lambda = \lambda_0(\theta)$ (фиг. 2) заранее неизвестен и определяется в процессе решения.

Будем теперь искать решения уравнения (4) в виде $\Phi = M(\lambda) N(\theta)$. Подставляя, получим

$$N_n'' = -n^2 N_n(\theta), \quad \lambda(\lambda+1) M_n'' + \lambda M_n' - n^2 M_n = 0 \quad (10)$$

Решение первого из уравнений (10) запишем в форме

$$N_n(\theta) = A_n \cos(n\theta + \vartheta_n)$$

где A_n, ϑ_n произвольные постоянные.

Ограничимся в дальнейшем исследованием частных решений для целых значений параметра n . Очевидно, можно рассматривать только положительные значения n , так как уравнения (10) от знака n не зависят.

При n целом второе уравнение может быть проинтегрировано в квадратурах. Решение, удовлетворяющее условию ограниченности x и y в (5) при $\lambda = 0$, будет полиномом степени

$$M_n(\lambda) = \lambda + \sum_{k=2}^n \frac{\lambda^k}{(k-1)! k!} \prod_{\alpha=1}^{k-1} (n^2 - \alpha^2) \quad (n^2 = 1, 2, \dots)$$

Частное решение при $n = 0$

$$M_0(\lambda) = C_0 + C_1 \ln(\lambda + 1) \quad (11)$$

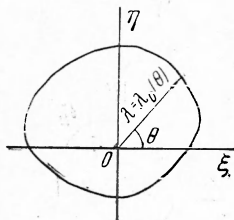
соответствует движению круглого цилиндра при сделанных предположениях и изучено в работе [5]. Некоторые другие частные решения уравнения (1) изучены в работе [6].

Рассмотрим частные решения вида

$$\Phi_n(\lambda, \vartheta) = C_0 + C_1 \ln(\lambda + 1) + A_n M_n(\lambda) \cos(n\theta + \vartheta_n) \quad (n=2, 3, \dots) \quad (12)$$

Из условия (6) следует, что $C_0 = -1$, а из (5) будем иметь

$$u = 1 + C_1 \left[\frac{1}{\lambda + 1} - \ln(\lambda + 1) \right] + A_n (\lambda M_n' - M_n) \cos(n\theta + \vartheta_n)$$



Фиг. 2

Тогда первое условие (9), если положить $C_1 = AS$ $A_n = B_n AS$, можно записать в виде

$$\frac{1}{AS} + B_n (\lambda M_n' - M_n)_{\lambda=\lambda_0(\theta)} \cos(n\theta + \vartheta_n) = \left[\ln(\lambda + 1) - \frac{\lambda}{\lambda + 1} \right]_{\lambda=\lambda_0(\theta)} \quad (13)$$

Посмотрим, при каких ограничениях на $A_1 B_n$ и ϑ_n можно удовлетворить этому условию на некотором контуре $\lambda = \lambda_0(\theta)$

Введем обозначения

$$\Lambda^+(\lambda) = \frac{1}{AS} + |B_n| (\lambda M_n' - M_n)$$

$$\Lambda^-(\lambda) = \frac{1}{AS} - |B_n| (\lambda M_n' - M_n)$$

$$f(\lambda) = \ln(\lambda + 1) - \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

Функция $\lambda M_n'(\lambda) - M_n(\lambda)$ положительна при $\lambda > 0$ и монотонно возрастает с увеличением λ . При этом справедлива следующая оценка:

$$\lambda M_n' - M_n \geq \frac{1}{2} (n^2 - 1) \lambda^2 \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Если $B_n \cos(n\theta + \vartheta_n) < 0$, то $(\lambda M_n' - M_n) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и для любых AS , θ , ϑ_n и $|B_n|$ из (12) можно найти соответствующее значение λ_0 .

При $(B_n / |B_n|) \cos(n\theta + \vartheta_n) = -1$ будем иметь уравнение для определения минимального значения $\lambda_0(\theta)$

$$\Lambda^-(\lambda) = f(\lambda)$$

Наоборот, если $B_n \cos(n\theta + \vartheta_n) > 0$, то решение уравнения (13) может не существовать ни при каком λ . Если имеет решение уравнение

$$\Lambda^+(\lambda) = f(\lambda) \quad (14)$$

то и уравнение (13) также имеет решение. Условия существования решения уравнения (14) легко установить (фиг. 3). Совпадение производных правой и левой частей уравнения и равенство этих частей в точке P дают соотношения

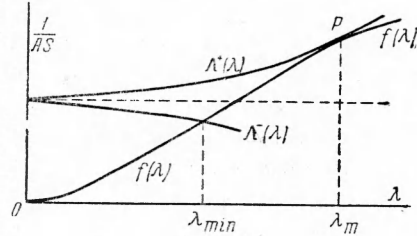
$$|B_n| = \frac{1}{(\lambda_0 + 1)^2 M_n''(\lambda_n)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{AS} + \frac{\lambda_m M_n'(\lambda_m) - M_n(\lambda_m)}{(1 + \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} = \\ = \ln(\lambda_m + 1) - \frac{\lambda_m}{\lambda_m + 1} \end{aligned} \quad (15)$$

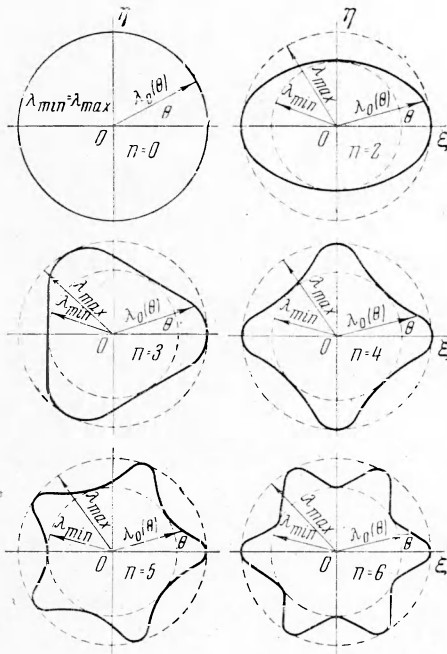
Последнее уравнение (15) имеет решение $\lambda_m > 0$ при $0 < AS < \infty$. Положим, что

$$B_n = \frac{\alpha_n}{(1 - \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} \quad (|\alpha_n| \leq 1)$$

Уравнение (13) будет определять нам некоторую функцию $\lambda_0(\theta)$, ограниченную сверху и снизу, $\lambda_{\min} \leq \lambda_0(\theta) \leq \lambda_{\max}$ и периодическую с периодом $2\pi/n$. Значения $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ находятся из уравнений



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\frac{1}{AS} + |\alpha_n| \frac{\lambda_{\max} M_n'(\lambda_{\max}) - M_n(\lambda_{\max})}{(1 + \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} = \ln(\lambda_{\max} + 1) - \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\max} + 1}$$

$$\frac{1}{AS} - |\alpha_n| \frac{\lambda_{\min} M_n'(\lambda_{\min}) - M_n(\lambda_{\min})}{(1 + \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} = \ln(\lambda_{\min} + 1) - \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\min} + 1}$$

Вид контуров $\lambda = \lambda_0(\theta)$ при различных n для $\vartheta_n = 0$ показан на фиг. 4.

Изменение знака α_n и ϑ_n приводят к повороту контура как жесткого целого вокруг начала координат. При уменьшении $|\alpha_n|$ разность $\lambda_{\max} - \lambda_{\min}$ тоже уменьшается и контур $\lambda = \lambda_0(\theta)$ оказывается заключенным в более узкое кольцо. Если $\alpha_n = 0$, контур $\lambda = \lambda_0(\theta)$ превращается в окружность.

Рассмотрим соответствующие течения в физической плоскости. Уравнение контура Γ_2 найдем из (3), полагая $\lambda = 0$

$$X = A \left[\cos \theta + \frac{\alpha_n}{(1 - \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} (\sin \theta \cos(n\theta + \vartheta_n) - n \cos \theta \sin(n\theta + \vartheta_n)) \right]$$

$$Y = A \left[\sin \theta + \frac{\alpha_n}{(1 + \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} (\sin \theta \cos(n\theta + \vartheta_n) - n \cos \theta \sin(n\theta + \vartheta_n)) \right]$$

Уравнение контура Γ_1 также представится в параметрической форме

$$X_0 = A \left[\frac{1}{\lambda_0 + 1} \cos \theta + \frac{\alpha_n M_n'(\lambda_0)}{(1 - \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} \cos \theta \cos(n\theta + \vartheta_n) + \frac{\alpha_n (n/\lambda_0) M_n(\lambda_0)}{(1 + \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} \sin \theta \sin(n\theta + \vartheta_n) \right]$$

$$Y_0 = A \left[\frac{1}{\lambda_0 + 1} \sin \theta + \frac{\alpha_n M_n'(\lambda_0)}{(1 + \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} \sin \theta \cos(n\theta + \vartheta_n) - \frac{\alpha_n (n/\lambda_0) M_n(\lambda_0)}{(1 - \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} \cos \theta \sin(n\theta + \vartheta_n) \right]$$

Зависимость между λ_0 и θ имеет вид

$$\frac{1}{AS} + \alpha_n \frac{\lambda_0 M_n'(\lambda_0) - M_n(\lambda_0)}{(1 + \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} \cos(n\theta + \vartheta_n) = \ln(\lambda_0 + 1) - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 1}$$

Каждое из полученных решений зависит от трех параметров A , ϑ_n и α_n , причем A может принимать любые положительные значения, ϑ_n — произвольное действительное число и $|\alpha_n| \leq 1$.

Из физического смысла задачи ясно, что контур $[X(\theta), Y(\theta)]$ должен находиться от начала координат, в физической плоскости, дальше, чем контур $[X_0(\theta), Y_0(\theta)]$. Покажем, что при любом $n \geq 2$ построенные нами решения удовлетворяют этому условию. Используя (5), представим выражение для полярного радиуса в физической плоскости в виде

$$r^2 = \frac{1}{S^2} \left[\Phi_\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} \Phi_\theta^2 \right]$$

Тогда при любом $0 < \lambda \leq \lambda_m$ и любом $\theta \in [0, 2\pi]$ должно выполняться неравенство

$$R^2 - r^2 > 0 \quad (16)$$

где через R обозначим полярный радиус внешней границы течения Γ_2 .

Подставляя соответственные значения R и r и обозначая через v ве-

личину $(B_n / |B_n|) \cos(n\theta + \vartheta_n)$, будем иметь

$$\left(\frac{R}{A}\right)^2 - \left(\frac{r}{A}\right)^2 = L(v) = \left[\frac{\lambda(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2} - n^2 B_n^2 \left(\frac{M_n'}{\lambda^2} - 1 \right) \right] - \\ - 2|B_n| \left(\frac{M_n''}{\lambda+1} - 1 \right) v + B_n^2 \left[n^2 \left(\frac{M_n^2}{\lambda^2} - 1 \right) - (M_n'^2 - 1) \right] v^2 = C - Bv + Av^2$$

Проводя несложные оценки, можно показать, что

$$C > 0, \quad B > 0, \quad A > 0, \quad \text{при } \lambda \in (0, \lambda_m], \quad |\alpha_n| \leq 1$$

Докажем, что будут выполняться и неравенства

$$A + C > B, \quad B > 2A \quad (17)$$

Будем доказывать их в указанной последовательности. Первое неравенство (17) после простых преобразований приведет к виду

$$2|B_n| \left(\frac{M_n'}{\lambda+1} - 1 \right) + B_n^2 (M_n'^2 - 1) < \frac{\lambda(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2}$$

Все слагаемые в левой части неравенства положительны. Оценивая их сверху, получим

$$2|B_n| \left(\frac{M_n'}{\lambda+1} - 1 \right) + B_n^2 (M_n'^2 - 1) < \frac{|\alpha_n| \lambda}{(1 + \lambda_m)^2} [| \alpha_n | \lambda + 2] \leq \\ \leq \frac{\lambda(\lambda+2)}{(\lambda_m+1)^2} \leq \frac{\lambda(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2}$$

Установим справедливость и второго из неравенств (17). Легко видеть, что $B = 2A = 0$ при $\lambda = 0$. С другой стороны

$$\partial B / \partial \lambda > 2 \partial A / \partial \lambda \quad \text{при } \lambda > 0 \quad (18)$$

Действительно, неравенство (18) можно представить в виде

$$\frac{(\lambda+1)M_n'' - M_n'}{(\lambda+1)^2} > 2|B_n| \left\{ [(\lambda+1)M_n'' + M_n'] \frac{\lambda M_n' - M_n}{\lambda^2} - M_n' M_n'' \right\}$$

Раскрывая значение $|B_n|$, найдем

$$\frac{n^2 M_n}{\lambda} \left[\frac{1}{(\lambda+1)^2} - \frac{2|\alpha_n|(\lambda M_n' - M_n)}{\lambda^2(1 + \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} \right] > 2M_n' \left[\frac{1}{(\lambda+1)^2} - \frac{|\alpha_n| M_n''(\lambda)}{(1 + \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} \right]$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{(\lambda+1)^2(1 + \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} - |\alpha_n|(n^2 - 1) - \sum_{k=2}^n 2(k-1)\alpha_k \lambda^{k-2} \\ \frac{1}{(\lambda+1)^2(1 + \lambda_m)^2 M_n''(\lambda_m)} - |\alpha_n|(n^2 - 1) - \sum_{k=3}^n k(k-1)\alpha_k \lambda^{k-2} \geq 1, \quad n \geq 2$$

и при этом

$$\frac{2\lambda M_n'}{n^2 M_n} = \frac{2}{n} \frac{1 + \sum_{k=2}^n k \alpha_k \lambda^{k-1}}{n + \sum_{k=2}^n n \alpha_k \lambda^{k-1}} < \frac{2}{n} \leq 1, \quad n \geq 2$$

Отсюда сразу же получаем справедливость (18). Но тогда ясно, что при $\lambda \in (0, \lambda_m], |\alpha_n| \leq 1$ всегда выполняется и второе неравенство (17).

В силу доказанного $L(v)$ обладает следующими свойствами:

$$L(-1) = A + B + C > 0, \quad L(1) = A + C - B > 0 \\ \frac{dL(-1)}{dv} = -2A - B < 0, \quad \frac{dL(1)}{dv} = 2A < 0$$

Из свойств $L(v)$ немедленно следует при $\lambda \in (0, \lambda_m]$, $|\alpha_n| \leq 1$ справедливость (16), а следовательно, и справедливость неравенства

$$R^2 - R_0^2 > 0$$

где через R_0 обозначен полярный радиус контура Γ_1 .

Для взаимной однозначности отображения при помощи преобразования Лежандра, якобиан преобразования должен быть отличен от нуля. Составляя выражение $\Delta = x_\lambda y_0 - x_0 y_\lambda$, получим

$$\Delta = -\frac{1}{\lambda+1} \left(\frac{1}{\lambda+1} - |B_n| M_n'' v \right)^2 - \frac{n^2 B_n^2}{\lambda} \left(M_n' - \frac{M_n}{\lambda} \right) (1 - v^2) \quad (19)$$

Второе слагаемое в (19) всегда отрицательно и обращается в нуль при $v = \pm 1$ или $\lambda = 0$. Первое же слагаемое всегда отрицательно, если $|\alpha_n| < 1$. Следовательно, $\Delta < 0$ при $\lambda \in [0, \lambda_m]$ и $|\alpha_n| < 1$.

До сих пор частные решения вида (12) рассматривались для $n \geq 2$. Разберем отдельно случай, когда $n = 1$. Имеем

$$\Phi_1(\lambda, \theta) = -1 + AS [\ln(\lambda + 1)] + B_1 \lambda \cos(\theta + \theta_1)$$

Формулы (5) дают

$$u = 1 + AS \left[\frac{\lambda}{\lambda+1} - \ln(\lambda+1) \right]$$

$$\frac{x}{A} - B_1 \sin \theta_1 = \frac{1}{\lambda+1} \cos \theta, \quad \frac{y}{A} - B_1 \cos \theta_1 = \frac{1}{\lambda+1} \sin \theta$$

Выражение для u совпадает со случаем $n = 0$, а в выражениях для x и y появились члены $B_1 \sin \theta_1$ и $B_1 \cos \theta_1$. Ясно, что Φ_1 описывает течение вязко-пластичной среды при движении в ней круглого цилиндра, ось которого параллельна оси z , но не совпадает с ней. Можно показать, что постоянные B_1 и θ_1 совершенно произвольны.

Решения вида

$\Phi_1(\lambda, \theta) = -1 + AS [\ln(\lambda + 1) + B_1 \lambda \cos(\theta + \theta_1) + B_n M_n(\lambda) (\cos(n\theta + \theta_n))]$ будут отличаться от решений вида (12) только тем, что оси соответственных цилиндров, будучи параллельными оси z , не будут с ней совпадать.

Вычислим сопротивление сил трения на участке поверхности цилиндра длины b' . По определению

$$F' = b' \int_{\Gamma_1} \left(u + \frac{\tau_0}{(u_{x'}'^2 + u_{y'}'^2)^{1/2}} \right) \frac{\partial u'}{\partial n'} ds'$$

Штрихи у величин означают, что эти величины берутся в размерном виде. Подставляя, получим

$$F' = \tau_0 b l' \left(1 + \int_0^{2\pi} \lambda_0(\theta) \sqrt{(dX_0(\theta)/d\theta)^2 + (dY_0(\theta)/d\theta)^2} d\theta \right)$$

где l длина контура Γ_1 . Например, для круглого цилиндра

$$F' = \tau_0 b l' (1 + 2\pi \lambda_0)$$

Общее выражение F' через Φ громоздко, и мы его не выписываем.

Поступила 10 II 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзаянзаде А. Х. Некоторые вопросы вязко-пластических жидкостей в применении к нефтедобыче. Изд-во Азнефть, Баку, 1959.
2. Кочин Н. Е., Розе Н. В. и Кибель И. А. Теоретическая гидромеханика, т. II. ГТТИ, 1937 г.
3. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. ГТТИ, 1953.
4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. ч. II. М. Огиз, Гостехиздат, 1944.
5. Голстой Д. М. Журнал физической химии. М., 1934, 5, 28.
6. Oldrond J. G. Rectilinear plastic flow of a Bingham Solid., Proc. Cambridge. Phil. Soc., 1948. Vol. 44, p. 2.