

УДК 539.3

**ДИСКРЕТНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИЙ
В СЫПУЧЕЙ СРЕДЕ ПРИ ПАССИВНОМ ДАВЛЕНИИ НА ПОДПОРНУЮ СТЕНКУ**

С. В. Клишин

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: sv.klishin@gmail.com, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

На основе метода дискретных элементов в трехмерной постановке исследована задача о пассивном давлении плотного грунта на подпорную стенку. Частицы среды имеют сферическую форму с радиусами, выбранными из нормального распределения. При расчете касательных сил, действующих между элементами материала, учитываются трение скольжения и сопротивление качению. Продемонстрировано влияние степени шероховатости подпорной стенки на развитие зон локализации сдвиговых деформаций в сыпучей среде, а также на давление, действующее на подпорную стенку со стороны материала. Проведено сравнение с классическим решением, полученным в рамках теории предельного состояния.

Сыпучий материал, плотный грунт, подпорная стенка, пассивное давление, локализация сдвиговых деформаций, метод дискретных элементов

DOI: 10.15372/FTPRPI20210504

Определение давления сыпучего материала на подпорные стенки — одна из классических задач механики горных пород и грунтов. С одной стороны, она возникает при исследовании природных явлений — оползней, землетрясений, разрывных нарушений (надвиги, сбросы, взбросы и др.), с другой — при проектировании инженерных сооружений (автомобильные и железнодорожные насыпи, борта карьеров, набережные, причалы и многое другое) [1–3]. Несмотря на интенсивные исследования в этом направлении, существуют значительные различия между теоретическими решениями и экспериментальными результатами. Происходит это из-за сложности описания поля деформации в среде в окрестности стенки, где возникает локализация сдвиговой деформации — фундаментальное свойство сыпучих материалов.

Многочисленными экспериментами показано, что в зависимости от начальных и краевых условий смещение стенки приводит к образованию в сыпучей среде одной или нескольких поверхностей скольжения [4–8]. Конфигурация этих поверхностей может быть различной

формы, а ширина зоны сдвига зависит от таких факторов, как средний размер и шероховатость частиц, начальная плотность засыпки, гранулометрический состав сыпучей среды. Знание конфигураций зон сдвига, а также распределения сдвиговых деформаций в материале под нагрузкой весьма важно при исследовании механизма деформирования сыпучих сред и горных пород [9–13]. Однако в инженерных расчетах история возникновения и развития зон сдвига обычно не учитывается.

Впервые теорию давления грунта на вертикальную стенку с учетом внутреннего трения и сцепления в 1773 г. предложил Кулон. При этом не учитывалось трение между сыпучим материалом и стенкой. В 1840 г. Понселе разработал способ графического построения поверхности скольжения и определения давления на наклонную стенку с учетом наклона свободной поверхности сыпучей среды. В 1867 г. на основе теории предельного равновесия в связи с развитием методов теории упругости Ренкин дал простое решение задачи о напряжениях и направлениях площадок скольжения в сыпучем материале [14]. Согласно Ренкину, пассивное давление P на подпорную стенку определяется как

$$P = \frac{1}{2} \rho g H^2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right), \quad (1)$$

где ρ — плотность материала; g — ускорение свободного падения; H — высота засыпки. Основным параметр φ — угол внутреннего трения среды. Общая теория предельного равновесия грунтов в условиях плоской задачи разработана в 1939 г. В. В. Соколовским [15].

В настоящее время механика сыпучей среды базируется на законе Кулона, где речь идет только о трении скольжения, поэтому соответствующие модели и многочисленные решения начальных и краевых задач учитывают именно трение скольжения. Известно, что при деформировании сыпучих сред и горных пород имеют значение степени свободы, связанные с вращением частиц. Следовательно, наряду с трением скольжения должно учитываться также и трение качения. В рамках континуальной механики такой учет приводит к существенному усложнению моделей за счет появления внутренних переменных [16–18].

Наиболее адекватным инструментом исследования является метод дискретных элементов, позволяющий определять напряженно-деформированное состояние сыпучей среды как на допредельном этапе нагружения, так и на этапе образования локализованных режимов деформирования, не требуя введения гипотез предельного состояния и постулирования различного рода континуальных уравнений [19, 20].

ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ КАЧЕНИЮ

Согласно классической формулировке метода дискретных элементов, сыпучая среда представляется набором отдельных сферических частиц, каждая из которых характеризуется своими размерами, физическими и контактными свойствами. Взаимодействие дискретных элементов друг с другом и твердыми границами осуществляется при их контакте, а напряженно-деформированное состояние всей системы зависит от положения каждой частицы, контактных сил, а также заданных внешних сил и граничных смещений.

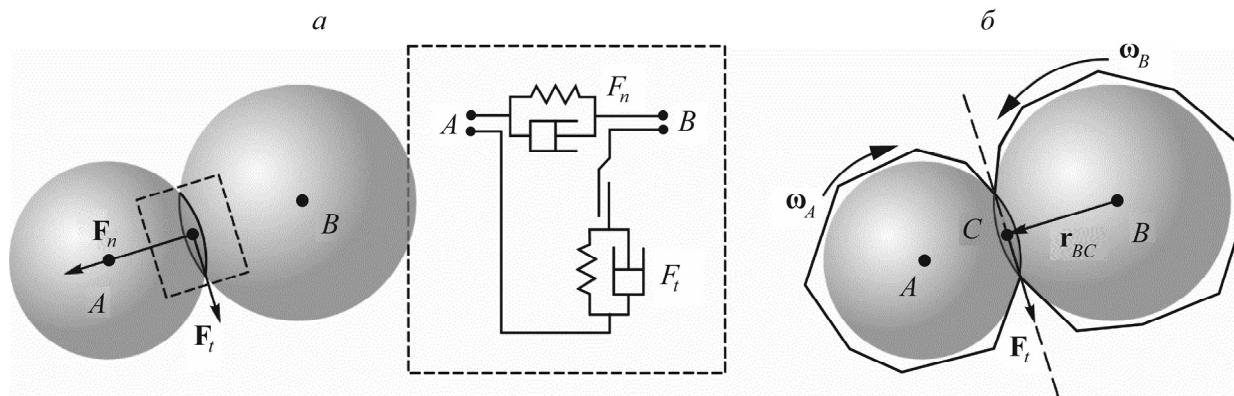


Рис. 1. Вязкоупругое взаимодействие сферических частиц: *a* — схема Кельвина–Фойгта; *б* — схема к определению сопротивления качению

На рис. 1*a* показаны два контактирующих сферических дискретных элемента *A* и *B* радиусами R_A и R_B соответственно. Вектор контактной силы $\mathbf{F}_{AB}$ представляется суммой нормальной $\mathbf{F}_n$ и касательной $\mathbf{F}_t$ сил:

$$\mathbf{F}_{AB} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t.$$

С учетом упругой и вязкой составляющих эти силы записываются в следующем виде:

$$\mathbf{F}_n = F_n \mathbf{n} = k_n \delta_n \mathbf{n} - \gamma_n v_n \mathbf{n}, \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_t = F_t \mathbf{t} = k_t \delta_t \mathbf{t} - \gamma_t v_t \mathbf{t}. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{n}$, $\mathbf{t}$ — нормальный и касательный единичные векторы к плоскости контакта; v_n , v_t — нормальная и касательная составляющие относительной скорости точки контакта; δ_n , δ_t — перекрытия частиц в нормальном и касательном направлениях соответственно. Нормальное перекрытие $\delta_n = (R_A + R_B) - D_{AB} > 0$ (D_{AB} — расстояние между центрами частиц). Касательное перекрытие δ_t определяется через приращение относительного смещения частиц. Во время t_0 первоначального установления контакта $\delta_t = 0$. Каждое последующее приращение $\Delta \delta_t$ вычисляется как $\Delta \delta_t = (\Delta \mathbf{u}_A - \Delta \mathbf{u}_B) \mathbf{t}$, $\Delta \mathbf{u}_A$, $\Delta \mathbf{u}_B$ — приращения смещений точки контакта каждой частицы). Отсюда в произвольный момент времени $t > t_0$

$$\delta_t = \int_{t_0}^t v_t(\tau) d\tau.$$

Если в некоторый момент времени выполнено неравенство $\delta_n < 0$, то такой контакт считается исчерпанным. Параметры k_n , k_t , γ_n и γ_t в (2), (3) зависят от радиусов дискретных элементов, их плотностей, упругих модулей (модуль упругости и коэффициент Пуассона), а также от заданного коэффициента восстановления скорости между частицами.

Касательная составляющая $\mathbf{F}_t$ контактной силы рассчитывается следующим образом. Определяя F_n и F_t в (2) и (3), проверяется выполнение неравенства $|\mathbf{F}_t| > \tan \varphi_{AB} |\mathbf{F}_n|$, где φ_{AB} — заранее заданный угол трения скольжения между частицами. Если это неравенство не выполнено, то $\mathbf{F}_t$ находится в соответствии с (3). В противном случае частицы начинают проскальзывать друг по другу и касательная составляющая силы отталкивания вычисляется как $F_t = \tan \varphi_{AB} F_n$.

В реальной ситуации относительное движение частиц зависит от их формы и деформаций, в то время как особенность метода дискретных элементов — сферическая форма его элементов. Данное затруднение можно обойти несколькими способами. Во-первых, создавая кластеры из сферических частиц и рассматривая их как отдельные дискретные элементы [21, 22], во-вторых, используя частицы произвольной формы [23, 24]. Очевидно, с одной стороны, здесь снимается ограничение на относительное движение частиц, с другой — вводится дополнительный параметр (форма дискретных элементов), роль которого необходимо исследовать дополнительными экспериментами. Весьма существенный момент — большой рост вычислительных затрат.

В настоящем исследовании форма частиц принята сферической, а контактная модель дополняется новым параметром — углом сопротивления качению [25]. Представим вращательный момент частицы B вокруг своего центра в виде

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{BC} \times \mathbf{F}_t - \frac{\boldsymbol{\omega}_A - \boldsymbol{\omega}_B}{|\boldsymbol{\omega}_A - \boldsymbol{\omega}_B|} \operatorname{tg} \psi_{AB} R_{AB} |\mathbf{F}_{AB} \mathbf{n}|. \quad (4)$$

Здесь первое слагаемое — момент, вызванный действием контактной силы со стороны частицы A ($\mathbf{r}_{BC}$ — вектор, направленный из центра частицы B в точку контакта с частицей A , рис. 1б), второе — момент, препятствующий относительному вращению дискретных элементов относительно друг друга; $\boldsymbol{\omega}_A$, $\boldsymbol{\omega}_B$ — угловые скорости контактирующих частиц; R_{AB} — приведенный радиус ($1/R_{AB} = 1/R_A + 1/R_B$); безразмерный параметр $\operatorname{tg} \psi_{AB}$ — коэффициент сопротивления качению, ψ_{AB} — угол сопротивления качению. Если использовать аналогию с углом трения скольжения φ_{AB} , то ψ_{AB} — максимальный угол наклона плоскости, при котором сферическая частица находится на ней в равновесии.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАССИВНОГО ДАВЛЕНИЯ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА НА ПОДПОРНУЮ СТЕНКУ

Пусть в пространстве $Oxyz$ определена емкость (контейнер) для сыпучей среды, ограниченный гранями, ориентированными параллельно координатным осям. Длина контейнера вдоль оси Ox 2.0 м, вдоль оси Oy — 0.1 м (рис. 2а).

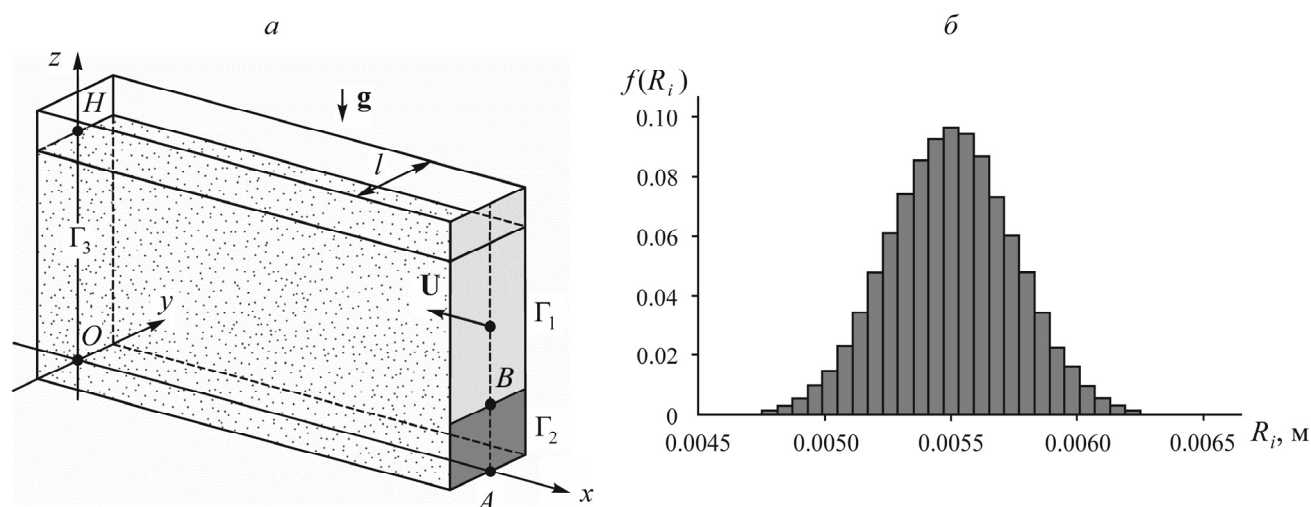


Рис. 2. Эксперимент по пассивному нагружению сыпучей среды подпорной стенкой (а); гистограмма плотности распределения радиусов частиц в первоначальной засыпке (б)

Правая грань контейнера разделена на две части: Γ_1 — подпорная стенка, посредством которой осуществляется нагружение сыпучего материала, Γ_2 — неподвижная стенка. Высота Γ_2 вдоль оси Oz принята равной 0.2 м, высота Γ_1 — 0.8 м. Соответственно высота левой грани контейнера $\Gamma_3 = 1.0$ м. Высота засыпки материала $H = 0.7$ м.

Сыпучий материал представлен набором отдельных сферических частиц плотностью $\rho_i = 2500$ кг/м³, модулем упругости $E_i = 10$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu_i = 0.25$ ($i = 1, \dots, N$; N — общее количество частиц). Радиусы R_i дискретных элементов выбраны из нормального распределения в соответствии с результатами исследований обломочных горных пород, приведенных в [26, 27] (рис. 2б). Коэффициент восстановления скорости, характеризующий вязкую составляющую силы соударения, принят 0.5. Вектор силы тяжести $\mathbf{g} = \{0, 0, -9.81\}$.

Заполнение контейнера осуществляется засыпкой “дождем”, когда на некоторой высоте создается начальный набор дискретных элементов, которые под действием силы тяжести осаждаются в емкость. На данном этапе создания первоначальной упаковки с целью достижения максимальной насыпной плотности сыпучей среды трение во всей системе отсутствует. По достижении равновесного состояния частицы, у которых координата центра тяжести z_i превышает H , удаляются. По окончании данной процедуры сыпучий материал представлен совокупностью из 124838 частиц, суммарный объем которых составляет 0.0875 м³, масса — 218.83 кг. Ввиду того, что объем, занятый частицами с учетом порового пространства, равен 0.14 м³, относительная плотность засыпки составила 0.625. Отсюда насыпная плотность сыпучего материала ρ в выражении (1) равна 1562 кг/м³.

Нагружение происходит следующим образом. Границы контейнера Γ_2 , Γ_3 , нижняя граница (дно), а также передняя и задняя стенки, ориентированные параллельно плоскости Oxz , неподвижны. Перемещение $\mathbf{U}(t)$ границы Γ_1 (подпорной стенки) в сторону сыпучего материала задано как $\mathbf{U}(t) = \mathbf{v}(t)t$, где $\mathbf{v} = \{-v_x; 0; 0\}$ — вектор скорости, $v_x = 0.04$ м/с. Перемещение осуществляется в течение 5 с. Таким образом, полное расстояние, пройденное подпорной стенкой вдоль оси Ox , составляет 0.2 м.

При нагружении сыпучей среды контактные параметры — угол трения скольжения φ_Γ и угол сопротивления качению ψ_Γ между границами контейнера и частицами принимаются следующими. Передняя и задняя стенки считаются абсолютно гладкими, т. е. для них $\varphi_\Gamma = \psi_\Gamma \equiv 0$ во всех численных экспериментах. На границах Γ_2 , Γ_3 , а также на нижней границе контейнера трение между ними и частицами совпадает с трением между частицами ($\varphi_\Gamma = \varphi_{AB}$, $\psi_\Gamma = \psi_{AB}$). Варьирует только трение на подпорной стенке Γ_1 , задаваемое отдельно в каждом эксперименте в зависимости от условий задачи.

В Институте горного дела СО РАН на основе метода дискретных элементов в трехмерной постановке разработано оригинальное программное обеспечение, позволяющее исследовать различные процессы деформирования сыпучей среды [28].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Выполнены три серии численных экспериментов. В первом исследовалось влияние степени шероховатости подпорной стенки на деформированное состояние сыпучего материала, а также на изменение давления, действующего на стенку со стороны сыпучей среды в процессе нагружения. Углы трения скольжения и сопротивления качению между частицами фиксировались ($\varphi_{AB} = 30^\circ$, $\psi_{AB} = 15^\circ$). Подпорная стенка задавалась абсолютно гладкой ($\varphi_\Gamma = \psi_\Gamma \equiv 0$) либо шероховатой ($\varphi_\Gamma = \varphi_{AB}$, $\psi_\Gamma = \psi_{AB}$). Численные эксперименты показали существенное различие деформированного состояния сыпучей среды в окрестности подпорной стенки при отсутствии или наличии на ней трения.

На рис. 3 представлено распределение горизонтальных компонент векторов смещений частиц в фиксированные моменты времени для абсолютно гладкой и шероховатой подпорной стенки. Видно, что при отсутствии трения на подпорной стенке в среде образуется одна линия скольжения, разделяющая материал на две области, в одной из которых частицы практически неподвижны (1 на рис. 3а), другая движется как жесткое целое, образуя призму выпирания (2 на рис. 3а). Стрелками показано направление движения частиц среды. И напротив, в случае шероховатой подпорной стенки в материале образуются две ярко выраженные линии скольжения (рис. 3б). Они разделяют среду на три области, в одной из которых частицы неподвижны (1), другая движется влево вверх как жесткое целое, образуя призму выпирания (2), третья, прилегающая к подпорной стенке, — как жесткое целое, практически горизонтально (3).

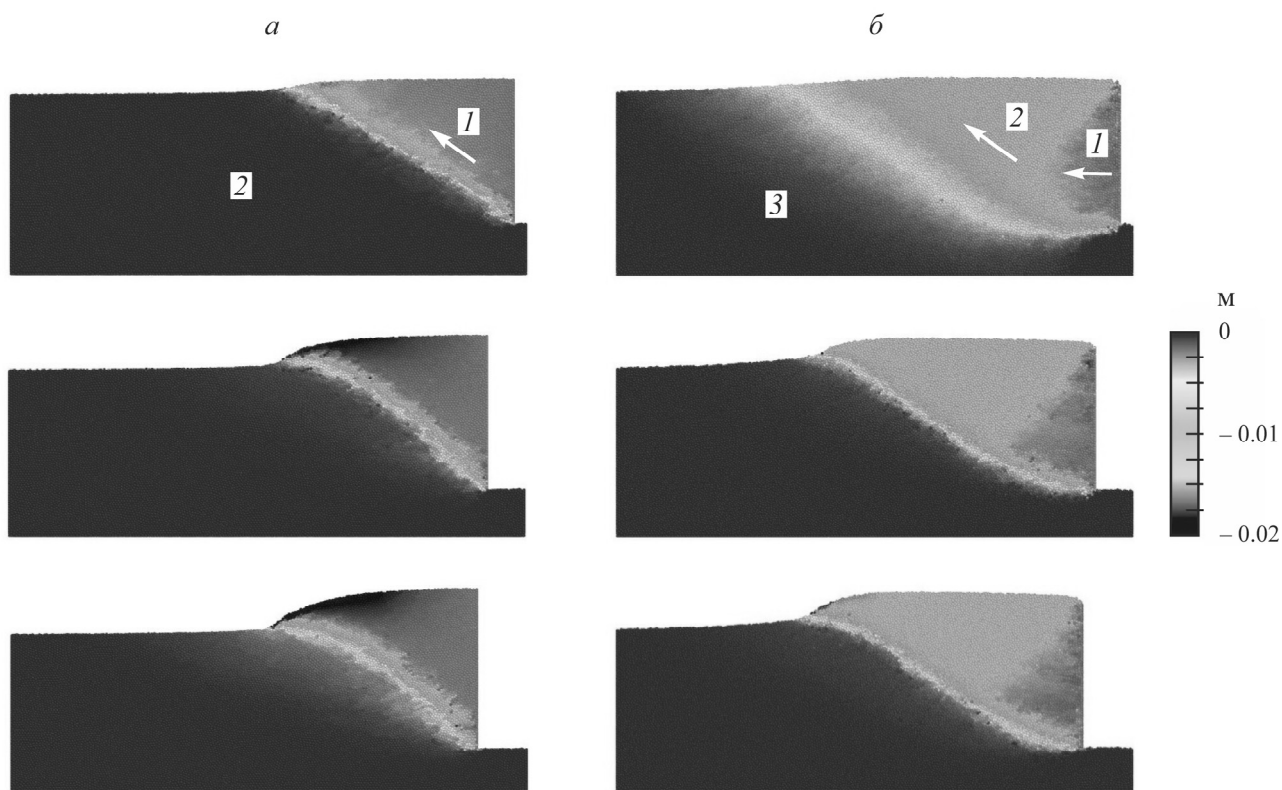


Рис. 3. Распределение горизонтальных компонент векторов смещений частиц при сдвиге подпорной стенки на 5, 15 и 20 см (сверху вниз); а — стенка абсолютно гладкая, б — стенка шероховатая

Необходимо отметить, что полученное решение в классической теории [11] при наличии трения на подпорной стенке требует иного подхода, поскольку основано на предположении об одиночной линии скольжения. Из результата, представленного выше, следует, что данное предположение не подтверждается результатами численных экспериментов, так как в случае шероховатой подпорной стенки в материале образуются две ярко выраженные линии скольжения. Давление P , действующее при нагружении со стороны сыпучего материала на выбранную стенку контейнера:

$$P = \frac{1}{S_p} \sum_{i=1}^{N_p} F_{n,i}, \quad (5)$$

где $F_{n,i}$ — нормальная компонента вектора контактной силы, действующей со стороны i -й частицы на стенку.

Суммирование в (5) проводится по всем частицам, находящимся в контакте с выбранной стенкой: N_p — количество контактов; S_p — площадь, ограниченная минимальными и максимальными координатами точек контакта на соответствующей границе. В случае определения давления на подпорной стенке Γ_1 $S_p = 0.1(z_{\max} - 0.2)$, на левой стенке Γ_3 — $S_p = 0.1z_{\max}$ ($z_{\max}$ — максимальная вертикальная координата точки касания частицы и стенки).

На рис. 4 показано изменение давления, действующего на Γ_1 и Γ_3 стенки при нагружении (U_x — ее смещение в сторону материала). Видно, что предельные давления на стенке различаются в 2 раза в зависимости от ее шероховатости.

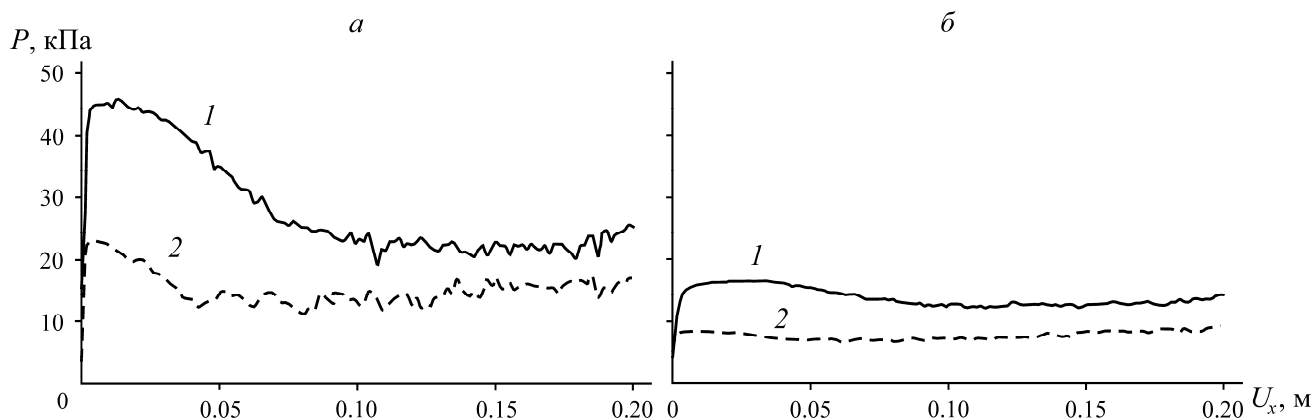


Рис. 4. Изменение давления, действующего на подпорную Γ_1 (а) и левую Γ_3 (б) стенки в процессе нагружения: 1 — шероховатая подпорная стенка; 2 — гладкая подпорная стенка

Вторая серия численных экспериментов состояла в определении влияния угла сопротивления качению на изменение давления на стенках емкости. Здесь угол трения скольжения между частицами, а также между частицами и подпорной стенкой фиксирован ($\varphi_{AB} = \psi_{\Gamma} = 30^\circ$). При расчетах изменялись сопротивления качению между частицами, а также между частицами и подпорной стенкой ($\psi_{AB} = \psi_{\Gamma} = 5, 10, 15^\circ$). На рис. 5 представлено изменение давления на подпорной Γ_1 (рис. 5а) и левой Γ_3 (рис. 5б) стенках для заданных углов сопротивления качению. Видно, что увеличение угла сопротивления качению с 5 до 15° дает значительный, более чем в 1.5 раза, прирост предельного давления на подпорную стенку.

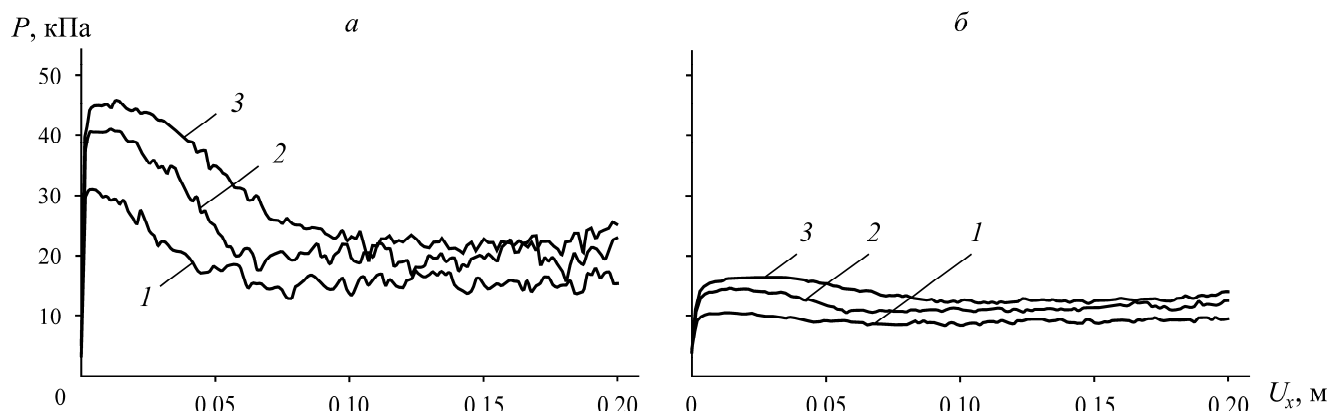


Рис. 5. Изменение давления, действующего на подпорную Γ_1 (а) и левую Γ_3 (б) стенки в процессе нагружения для углов сопротивления качению $\psi_{AB} = \psi_{\Gamma} = 5^\circ$ (1), 10° (2) и 15° (3)

Третья серия экспериментов по нагружению сыпучей среды заключалась в установлении связи между параметром φ — углом внутреннего трения сыпучей среды и углами трения скольжения φ_{AB} и сопротивления качению ψ_{AB} . С этой целью варьировался угол трения скольжения между частицами $\varphi_{AB} = 0, 10, 20$ и 30° при фиксированном угле сопротивления качению $\psi_{AB} = 0^\circ$ и рассчитывалось давление на подпорной стенке (трение на ней отсутствовало в соответствии с решением Ренкина). Полученным в рамках метода дискретных элементов давлениям ставились в соответствие давления, вычисленные по формуле (1), на основании чего определялись φ . Зависимость параметра сыпучей среды φ от угла трения скольжения представлена на рис. 6а. Фиксируя $\varphi_{AB} = 30^\circ$ и изменяя $\psi_{AB} = 0, 5, 10$ и 15° , можно получить зависимость параметра φ от угла сопротивления качению (рис. 6б).

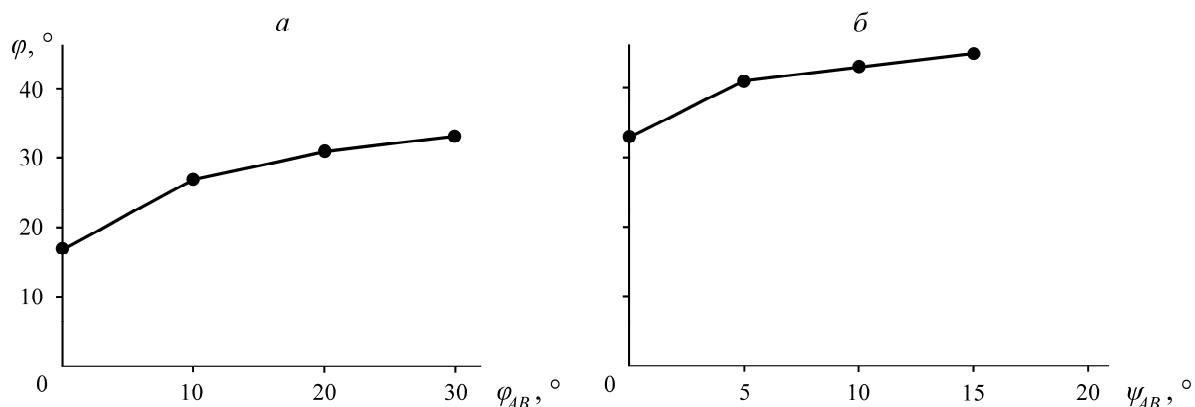


Рис. 6. Зависимость угла внутреннего трения сыпучей среды φ : а — от угла трения скольжения φ_{AB} между частицами при фиксированном угле сопротивления качению $\psi_{AB} = 0$; б — от угла сопротивления качению ψ_{AB} при фиксированном угле трения скольжения $\varphi_{AB} = 30^\circ$ (б)

В результате численных экспериментов можно построить функциональную зависимость

$$\varphi = \varphi(\varphi_{AB}, \psi_{AB}), \quad (6)$$

где угол внешнего трения скольжения φ_{AB} и угол сопротивления качению ψ_{AB} имеют достаточно ясный физический смысл.

Роль высоты засыпки в выражении (1) можно оценить, рассчитав распределения давления по высоте в процессе нагружения. На рис. 7 приведены эпюры давления в начальный момент времени, при сдвиге подпорной стенки на 5 и 15 см и при конечном равновесном состоянии сыпучей среды. Видно, что эпюры давления могут быть с достаточной точностью аппроксимированы прямыми линиями.

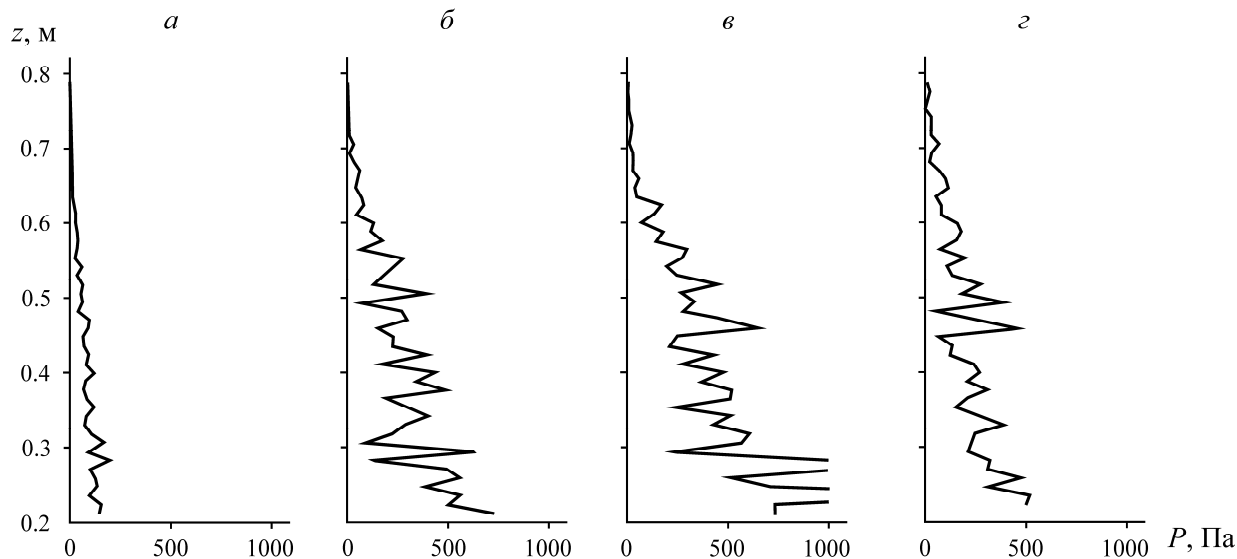


Рис. 7. Эпюры давления на подпорной стенке в начальный момент времени (а), при сдвиге подпорной стенки на 5 (б) и 15 см (в) и конечное равновесное состояние среды (г)

ВЫВОДЫ

Таким образом, имеются два решения задачи о пассивном давлении грунта на подпорную стенку. Первое классическое решение получено в рамках континуальной механики и представлено формулой (1), второе решение — численно методом дискретных элементов. В первом множитель $\rho g H^2$ не является достижением континуальной механики, его можно вывести только на основании анализа размерностей задачи. Коэффициент $1/2$ также можно получить из общих соображений, например подсчитать давление тяжелой жидкости и использовать его как масштаб задачи. Главное в этом решении — множитель, в который входит такой параметр материала, как угол внутреннего трения φ . Возникает вопрос, как определить этот параметр и какие эксперименты необходимо для этого провести. Если ответа нет, то решение в значительной степени обесценивается. Различные правдоподобные и приближенные решения данного вопроса хорошо известны, когда φ — угол естественного откоса, угол внутреннего трения при прямом срезе и т. д.

Второе решение получено на основе метода дискретных элементов. Здесь угол трения скольжения и угол сопротивления качению достаточно точно идентифицированы. Если построить поверхность в виде (6), то приходим к установлению эквивалентности континуальной модели деформирования сыпучей среды модели метода дискретных элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Craig R. F.** Craig's soil mechanics, 7th edition, CRC press, 2004. — 448 p.
2. **Budhu M.** Soil mechanics and foundation, 3rd edition, John Wiley & Sons, 2010. — 780 p.
3. **Duncan J. M., Wright S. G., and Brandon T. L.** Soil strength and slope stability, John Wiley & Sons, 2014. — 336 p.
4. **James R. G. and Bransby P. L.** Experimental and theoretical investigations of a passive earth pressure problem, *Geotechnique*, 1970, Vol. 20, No. 1. — P. 17–37.
5. **Gudehus G. and Nübel K.** Evolution of shear bands in sand, *Geotechnique*, 2004, Vol. 54, No. 3. — P. 187–201.
6. **Niedostatkiewicz M., Lesniewska D., and Tejchman J.** Experimental analysis of shear zone patterns in cohesionless for earth pressure problems using particle image velocimetry, *Strain*, 2011, Vol. 47. — P. 218–231.
7. **Kosykh V. P.** Experimental investigation into variable density of granular material under deformation cycling, *J. Min. Sci.*, 2012, Vol. 48, No. 6. — P. 990–995.
8. **Клишин С. В., Косых В. П., Ревуженко А. Ф.** Экспериментальное и теоретическое исследование процесса локализации деформаций в сыпучей среде // Научные технологии разработки и использования минеральных ресурсов. — 2019. — № 5. — С. 268–272.
9. **Tejchman J., Kozicki J., and Leśniewska D.** Discrete simulations of shear zone patterning in sand in earth pressure problems of a retaining wall, *Int. J. Solids and Structures*, 2011, Vol. 48, Issue 7–8. — P. 1191–1209.
10. **Клишин С. В.** Численный анализ движения сыпучего материала за подпорной стенкой // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2014. — № 1. — Т. 1. — С. 128–134.
11. **Liu S., Xia Y., and Liang L.** A modified logarithmic spiral method for determining passive earth pressure, *J. Rock Mech. and Geotech. Eng.*, 2018, Vol. 10, No. 6. — P. 1171–1182.
12. **Xu S. Y., Kannangara K. K. P. M., and Taciroglu E.** Analysis of the stress distribution across a retaining wall backfill, *Comp. and Geotech.*, 2018, Vol. 103. — P. 13–25.
13. **Kang K., Fomenko I. K., Wang J., and Nikolskaya O. V.** Probabilistic assessment of rock slope stability in open pit mine Chaarat using the generalized Hoek–Brown criterion, *J. Min. Sci.*, 2020, Vol. 56, No. 5. — P. 732–740.
14. **Rankine W. J. M.** II. On the stability of loose earth, *Philos. Trans. R. Soc. London*, 1857, Vol. 147. — P. 9–27.
15. **Соколовский В. В.** Статика сыпучей среды. — М.: Физматгиз, 1960. — 240 с.
16. **Tejchman J.** Shear localization in granular bodies with micro-polar hypoplasticity, 2008, Springer. — 317 p.
17. **Dyszlewicz J.** Micropolar theory of elasticity, 2004, Springer. — 345 p.
18. **Revuzhenko A. F. and Mikenina O. A.** Elastoplastic model of rocks with internal self-balancing stresses. Continuum approximation, *J. Min. Sci.*, 2020, Vol. 56, No. 2. — P. 159–166.
19. **Matuttis H. G. and Chen J.** Understanding the discrete element method: simulation of non-spherical particles for granular and multi-body systems, 2014, John Wiley & Sons. — 448 p.
20. **Wang X., Li B., Xia R., and Ma H.** Engineering applications of discrete element method. Volume 4: Operation analysis and optimization design of coal and agricultural machinery, 2021, Springer, Singapore. — 177 p.
21. **Shamsi M. M. M. and Mirghasemi A. A.** Numerical simulation of 3D semi-real-shaped granular particle assembly, *Powder Technol.*, 2012, Vol. 221. — P. 431–446.

22. **Podlozhnyuk A., Pirker S., and Kloss C.** Efficient implementation of superquadric particles in discrete element method within an open-source framework, *Comput. Particle Mechanics*, 2017, Vol. 4, No. 1. — P. 101–118.
23. **Soltanbeigi B., Podlozhnyuk A., Papanicolopoulos S. A., Kloss C., Pirker S., and Ooi J. Y.** DEM study of mechanical characteristics of multi-spherical and superquadric particles at micro and macro scales, *Powder Technol.*, 2018, Vol. 329. — P. 288–303.
24. **Wei D., Wang J., Nie J., and Zhou B.** Generation of realistic sand particles with fractal nature using an improved spherical harmonic analysis, *Comput. and Geotech.*, 2018, Vol. 104. — P. 1–12.
25. **Klishin S. V., Revuzhenko A. F., and Kazantsev A. A.** Rolling friction in loose media and its role in mechanics problems, *IOP Conf. Series: Materials Sci. and Eng.*, 2016, Vol. 142, Issue 1. — P. 012132.
26. **Sanchidrián J. A., Ouchterlony F., Segarra P., and Moser P.** Size distribution functions for rock fragments, *Int. J. Rock Mech. and Min. Sci.*, 2014, Vol. 71. — P. 381–394.
27. **Fowler A. C. and Scheu B.** A theoretical explanation of grain size distributions in explosive rock fragmentation, *Proc. Royal Soc. A: Mathem., Phys. and Eng. Sci.*, 2016, Vol. 472, Issue 2190. — P. 20150843.
28. **Bobryakov A. P., Klishin S. V., and Revuzhenko A. F.** Stress state of conical granular pile, *J. Min. Sci.*, 2019, Vol. 55, No. 6. — P. 876–882.

Поступила в редакцию 30/VIII 2021

После доработки 06/IX 2021

Принята к публикации 10/IX 2021