

5. Бородин В.А., Дяткин Ю.Ф., Ягодкин В.И. Устойчивость и распад цилиндрической пленки жидкости в газовой среде // ПМТФ. — 1966. — № 1.
6. Шутов А.А. Неустойчивость составной струи капельной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1985. — № 4.
7. Gabor J.D., Purviance R.T., Cassulo J.C., Spencer B.W. Molten aluminum alloy fuel fragmentation experiments // Proc. 5th Intern. Meeting on Reactor Thermal Hydraulics, Salt Lake City, 1992.
8. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1959.

г. Электрогорск

Поступила 8/XII 1993 г.

УДК 536.24.01

А.Я. Кузин

### РЕГУЛЯРИЗОВАННОЕ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

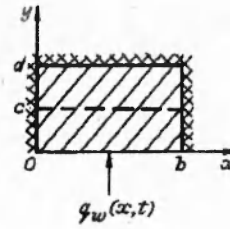
Методы обратных задач теплопроводности (ОЗТ) широко используются для решения задач диагностики и идентификации процессов теплообмена по результатам экспериментов [1—4]. И если методы решения одномерных ОЗТ в настоящее время изучены достаточно полно, то методы решения двумерных и трехмерных нелинейных ОЗТ нуждаются в развитии. Имеющиеся в литературе работы посвящены в основном решению линейных двумерных граничных ОЗТ. Известные результаты в этом направлении получены в работах О.М. Алифанова с сотрудниками, в которых развивается метод итерационной регуляризации. В [1] даны постановки двумерных и трехмерных ОЗТ и предложен метод итерационного решения линейной двумерной обратной задачи в экстремальной постановке для тел в виде плоской пластины, который допускает обобщение на тела другой формы. В [5, 6] рассматриваются методика и алгоритм итерационного решения линейной двумерной ОЗТ при разностной аппроксимации краевой задачи теплопроводности в случае полого кругового цилиндра и медной цилиндрической оболочки и представлены результаты методического исследования данного алгоритма. В [7] этот подход развивается применительно к интегральной форме двумерной задачи с постоянными теплофизическими коэффициентами. Существенный скачок в развитии метода итерационной регуляризации сделан в работе [8], где на основе этого метода представлен алгоритм решения трехмерной граничной обратной задачи для многослойного полого сферического сегмента. К сожалению, в [8] отсутствует численная апробация предложенного алгоритма.

Наибольшие трудности при реализации метода итерационной регуляризации связаны с вычислением градиента минимизируемого функционала. Эта процедура требует большого искусства от исполнителя и для сложных математических моделей может оказаться трудно разрешимой задачей. В данном случае для решения обратной задачи полезными могут оказаться регуляризирующие численные методы. В [9] предложен регуляризирующий (по Тихонову) алгоритм (РА) для численного решения нелинейной одномерной обратной задачи теплопроводности. В дальнейшем в [10—13] этот алгоритм был развит и применен для решения конкретных обратных задач механики реагирующих сред.

В настоящей работе одномерный РА обобщен на двумерный случай. Исследовано влияние перетекания тепла на точность определения температуры и плотности теплового потока методами обратных задач. Показано влияние погрешности в исходных данных на решение обратной задачи.

© А.Я. Кузин, 1995

1. Физическая и математическая постановка обратной задачи. Сформулируем постановку ОЗТ для тела прямоугольного сечения (рис. 1). Считаем, что вектор теплового потока в каждой точке пространства параллелен плоскости  $xOy$ . На плоскостях  $x = 0$ ,  $x = b$ ,  $y = d$  действует теплообмен, задаваемый граничными условиями первого, второго либо третьего рода. Требуется по известной температуре на линии  $y = c$  найти плотность теплового потока  $q_w(x, y)$  и температуру  $T(x, t)$  на границе  $y = 0$ .



Р и с. 1

Математическая постановка рассматриваемой ОЗТ имеет вид

$$(1.1) \quad C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right),$$

$$0 < x < b, 0 < y < d, t_n < t \leq t_k;$$

$$(1.2) \quad T(x, y, t_n) = T_n(x, y), 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq d;$$

$$(1.3) \quad r_3(y, t) \frac{\partial T(0, y, t)}{\partial x} + r_2(y, t) T(0, y, t) = r_1(y, t);$$

$$(1.4) \quad s_1(y, t) \frac{\partial T(b, y, t)}{\partial x} + s_2(y, t) T(b, y, t) = s_3(y, t);$$

$$(1.5) \quad g_1(x, t) \frac{\partial T(x, d, t)}{\partial y} + g_2(x, t) T(x, d, t) = g_3(x, t);$$

$$(1.6) \quad T(x, c, t) = T_c(x, t), 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq d, t_n \leq t \leq t_k;$$

$$(1.7) \quad q_w(x, t) = -\lambda_y(T(x, 0, t)) \frac{\partial T(x, 0, t)}{\partial y} - ?$$

Здесь  $T$  — температура;  $x, y$  — пространственные переменные;  $t$  — время;  $C$  — коэффициент объемной теплоемкости;  $\lambda_x, \lambda_y$  — коэффициенты теплопроводности в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3, g_1, g_2, g_3$  — коэффициенты, характеризующие тип граничных условий на границах прямоугольной области. Так, если  $r_1 = s_1 = g_1 = 1, r_2 = r_3 = s_2 = s_3 = g_2 = g_3 = 0$ , то на границах  $x = 0, x = b, y = d$  действуют условия адиабатичности. Индексы:  $n$  — начальное состояние;  $k$  — конечное состояние;  $w$  — нагреваемая граница  $y = 0$ ;  $c$  — внутренняя линия  $y = c$ .

2. Алгоритм решения обратной задачи. Решение обратной задачи разбивается на два этапа. На первом этапе производится сведение ее к постановке Коши. Для этого с использованием начального условия (1.2) и граничных условий (1.3)—(1.6) в области  $D_2\{0 \leq x \leq b, c \leq y \leq d, t_n \leq t \leq t_k\}$  находится поле температур и как следствие плотность теплового потока  $q_c(x, t) = -\lambda_y(T(x, c, t)) \partial T(x, c, t) / \partial y$  на линии  $y = c$ . Это хорошо изученная двумерная краевая задача, которая может быть решена любым из известных численных методов, например методом расщепления [14]. Одномерные уравнения теплопроводности, получаемые в результате расщепления на каждом временном полушаге, эффективно решаются итерационно-интерполяционным методом [4]. На втором этапе в области  $D_1\{0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq c, t_n \leq t \leq t_k\}$  решается обратная задача определения температурного поля и функций  $T_w(x, t) = T(x, 0, t), q_w(x, t) = -\lambda_y(T(x, 0, t)) \partial T(x, 0, t) / \partial y$  по известным начальному условию (1.2), граничным условиям (1.3), (1.4) и функциям  $T_c(x, t), q_c(x, t)$ :

$$(2.1) \quad C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right),$$

$$0 < x < b, 0 < y < c, t_n < t \leq t_k;$$

$$(2.2) \quad T(x, y, 0) = T_n(x, y), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$(2.3) \quad r_1(y, t) \frac{\partial T(0, y, t)}{\partial x} + r_2(y, t) T(0, y, t) = r_3(y, t);$$

$$(2.4) \quad s_1(y, t) \frac{\partial T(b, y, t)}{\partial x} + s_2(y, t) T(b, y, t) = s_3(y, t);$$

$$(2.5) \quad -\lambda_y(T(x, c, t)) \frac{\partial T(x, c, t)}{\partial y} = q_c(x, t);$$

$$(2.6) \quad T(x, c, t) = T_c(x, t), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c, \quad t_n \leq t \leq t_n.$$

Введем разностную сетку

$$(2.7) \quad h_x, h_y, h_t (x_l = h_x l, l = \overline{0, L}; y_k = h_y k, k = \overline{0, K}; t_j = h_t j, j = \overline{0, M}),$$

где  $h_x, h_y, h_t$  — шаги по переменным  $x, y$  и  $t$  соответственно. Для получения разностной схемы использовалась аппроксимация производных в виде

$$(2.8) \quad \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{l,k+1}^j \approx \frac{T_{l,k+1}^j - T_{l,k+1}^{j-1}}{h_t}, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{l,k+1}^j \approx \frac{T_{l,k+2}^j - T_{l,k}^j}{2h_y},$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{l,k+1}^j \approx \frac{T_{l+1,k+1}^j - T_{l-1,k+1}^j}{2h_x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{l,k+1}^j \approx$$

$$\approx \frac{1}{2h_y^2} [(\lambda_{y,k+2}^j + \lambda_{y,k+1}^j) (T_{l,k+2}^j - T_{l,k+1}^j) - (\lambda_{y,k+1}^j + \lambda_{y,k}^j) \times$$

$$\times (T_{l,k+1}^j - T_{l,k}^j)], \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{l,k+1}^j \approx \frac{1}{2h_x^2} [(\lambda_{x,l+1,k+1}^j + \lambda_{x,l,k+1}^j) \times$$

$$\times (T_{l+1,k+1}^j - T_{l,k+1}^j) - (\lambda_{x,l,k+1}^j + \lambda_{x,l-1,k+1}^j) (T_{l,k+1}^j - T_{l-1,k+1}^j)].$$

В результате для нахождения температуры в  $(l, k)$ -м пространственном узле получено нелинейное рекуррентное соотношение

$$(2.9) \quad B_{l,k}^j T_{l,k}^j = F_{l,k}^j, \quad l = \overline{1, L-1}, \quad j = \overline{1, M}.$$

$$\text{Здесь } B_{l,k}^j = \frac{\lambda_{y,k+1}^j + \lambda_{y,k}^j}{2h_y^2}, \quad F_{l,k}^j = C_{l,k+1}^j \frac{T_{l,k+1}^j - T_{l,k+1}^{j-1}}{h_t} -$$

$$- \frac{1}{2h_x^2} [(\lambda_{x,l+1,k+1}^j + \lambda_{x,l,k+1}^j) (T_{l+1,k+1}^j - T_{l,k+1}^j) - (\lambda_{x,l,k+1}^j + \lambda_{x,l-1,k+1}^j) \times$$

$$\times (T_{l,k+1}^j - T_{l-1,k+1}^j)] - \frac{1}{2h_y^2} [(\lambda_{y,l,k+2}^j + \lambda_{y,l,k+1}^j) (T_{l,k+2}^j - T_{l,k+1}^j) -$$

$$- (\lambda_{y,l,k+1}^j + \lambda_{y,l,k}^j) T_{l,k+1}^j].$$

Нелинейное соотношение (2.9) связывает  $k$ -,  $(k+1)$ - и  $(k+2)$ -ю пространственные линии. Для начала процесса счета необходимо знать температуру на  $K$ -й и  $(K-1)$ -й линиях. Температура на  $K$ -й линии задается экспериментальной функцией  $T_c(x, t)$  из условия (2.6), температура на  $(K-1)$ -й линии определяется из конечно-разностного аналога (2.5). Соотношение (2.9), если не вводить никакие регуляризаторы, является реализацией одного из прямых численных методов (ПЧМ) решения ОЗТ. В этом случае полученная на  $k$ -й линии температура уточняется с помощью итераций по коэффициентам. Соотношение (2.9) позволяет получить регулярное решение обратной задачи в том случае, когда входная температура  $T_c(x, t)$  имеет малые флуктуационные погрешности и шаг интегрирования по

времени  $h_i$  достаточно большой. Если погрешности входной температуры и шаг по времени не удовлетворяют указанным ограничениям, то задача (2.9) не даст устойчивого решения. Возможности ПЧМ можно расширить, если производить сглаживание входной температуры.

Таким образом, когда ПЧМ устойчивое, решение ОЗТ получить не удается, необходимо применять регуляризирующие методы.

Для (2.9) запишем функционал А.Н. Тихонова в виде

$$(2.10) \quad \Phi_{l,k}(\alpha) = \sum_{j=1}^M (B'_{l,k} T_{l,k}^j - F'_{l,k})^2 + \frac{\alpha k_1}{h_i^2} \sum_{j=1}^M (T_{l,k}^j - T_{l,k}^{j-1})^2 + \\ + \frac{\alpha k_2}{h_i^4} \sum_{j=1}^{M-1} (T_{l,k}^{j+1} - 2T_{l,k}^j + T_{l,k}^{j-1})^2 + \alpha k_2 C_M^2, \quad l = \overline{1, L-1},$$

где  $\alpha$  — параметр регуляризации;  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$  — некоторые неотрицательные числа;  $C_M = \partial^2 T_{l,k}(t_k) / \partial t^2$ .

Минимизируя (2.10) по всем  $T_{l,k}^j$  ( $j = \overline{1, M}$ ), для определения регуляризованного решения в  $(l, k)$ -м пространственном узле получим систему нелинейных алгебраических уравнений с симметричной пятидиагональной положительно-определенной матрицей:

$$(2.11) \quad \sum_{i=j-2}^{j+2} a_{j,i} T_{l,k}^i = b_j, \quad j = \overline{1, M}, \quad l = \overline{1, L-1}.$$

( $1 \leq i \leq M$ )

Здесь

$$a_{j,j} = \begin{cases} (B'_{l,k})^2 + \alpha \left( 2 \frac{k_1}{h_i^2} + 5 \frac{k_2}{h_i^4} \right), & j = 1, \\ (B'_{l,k})^2 + \alpha \left( 2 \frac{k_1}{h_i^2} + 6 \frac{k_2}{h_i^4} \right), & j = \overline{2, M-2}, \\ (B'_{l,k})^2 + \alpha \left( 2 \frac{k_1}{h_i^2} + 5 \frac{k_2}{h_i^4} \right), & j = M-1, \\ (B'_{l,k})^2 + \alpha \left( \frac{k_1}{h_i^2} + \frac{k_2}{h_i^4} \right), & j = M; \end{cases}$$

$$a_{j,j+1} = a_{j+1,j} = \begin{cases} -\alpha \left( \frac{k_1}{h_i^2} + 4 \frac{k_2}{h_i^4} \right), & j = \overline{1, M-2}, \\ -\alpha \left( \frac{k_1}{h_i^2} + 2 \frac{k_2}{h_i^4} \right), & j = M-1; \end{cases}$$

$$a_{j,j+2} = a_{j+2,j} = \alpha \frac{k_2}{h_i^4}, \quad j = \overline{1, M-2};$$

$$h_1 = B'_{l,k} F'_{l,k} + T_{w,k} \alpha \left( \frac{k_1}{h_i^2} + 2 \frac{k_2}{h_i^4} \right);$$

$$h_2 = B'_{l,k} F'_{l,k} - T_{w,k} \frac{k_2}{h_i^4};$$

$$b_j = B'_{l,k} F'_{l,k}, \quad j = \overline{3, M-2};$$

$$b_{M-1} = B_{i,k}^{M-1} F_{i,k}^{M-1} - \alpha \frac{k_2}{h_i^2} C_M;$$

$$b_M = B_{i,k}^M F_{i,k}^M + 2\alpha \frac{k_2}{h_i^2} C_M.$$

Система (2.11) решается методом немонотонной прогонки [15] с итерациями по коэффициентам. Итерационный процесс заканчивается при достижении заданной точности  $\epsilon$ . Решение системы (2.11) при фиксированном значении параметра регуляризации  $\alpha$  дает искомый регуляризованный температурный профиль  $T'_{i,k}$  ( $j = 1, M$ ). После определения из (2.11) температуры на  $k$ -й линии осуществляется переход на  $(k - 1)$ -ю линию и т.д. до тех пор, пока не будет найдена температура на линии  $y = 0$ . Температура на границах  $x = 0$  и  $x = b$  области  $D_1$  определяется из конечно-разностной аппроксимации граничных условий (2.3), (2.4) с использованием найденного температурного поля во внутренних узлах области  $D_1$ .

Если известна погрешность задания входных температур  $\delta = \left( \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M \sigma_{i,j}^2 \right)^{1/2}$ , где  $\sigma_{i,j}$  — средняя квадратичная погрешность функции  $T_c(x, t)$  при  $x = x_i, t = t_j$ , то для определения лучшего приближения можно использовать принцип невязки [1]:

$$(2.12) \quad \left[ \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M (T'_{i,k} - T_{cl})^2 \right]^{1/2} - \delta = 0.$$

Здесь  $T'_{l,k}$  ( $l = \overline{0, L}; j = \overline{1, M}$ ) — температура на линии  $y = c$ , полученная в результате решения прямой задачи в области  $D = D_1 \cup D_2$  при задании граничных условий (1.3)–(1.5) и известной температуре  $T'_w$  ( $l = \overline{0, L}; j = \overline{1, M}$ ) на линии  $y = 0$ . Значения  $T'_w$  находятся из решения обратной задачи в области  $D_1$ . Итерационный процесс решения уравнения (2.12) осуществляется методом хорд. После определения температурного поля в области  $D$  из конечно-разностного аналога условия (1.7) находится плотность теплового потока  $q_w(x, t)$ .

3. Результаты численных расчетов. Изложенный в настоящей работе алгоритм был численно апробирован на решении модельной задачи. С этой целью составлена программа на языке ФОРТРАН для IBM PC AT-386. В качестве материала образца использовался углеграфитовый материал ЭГ-0, теплофизические характеристики которого  $\lambda_x(T), \lambda_y(T), C(T)$  брались из [16]. На границах области  $x = 0, x = b, y = d$  выполнялись условия адиабатичности. Исходные данные о температуре на внутренней линии  $y = c$ , необходимой для решения ОЗТ, а также температура на границе  $y = 0$  были получены из решения методом расщепления прямой задачи теплопроводности (ПЗТ) в области  $D$  при задании на границе  $y = 0$  плотности теплового потока по закону  $q_w(x, t) = Axt$  ( $A = \text{const}$ ). Эта зависимость  $q_w(x, t)$  и найденная из решения ПЗТ температура  $T_w(x, t)$  в дальнейшем считались «точным» решением двумерной граничной ОЗТ. При проведении численных расчетов использовались следующие значения параметров:  $b = 10^{-2}$  м,  $c = 0,5 \cdot 10^{-2}$  м,  $d = 10^{-2}$  м,  $t_n = 0, t_k = 5$  с,  $T_n = 300$  К,  $A = 10^8$ ,  $h_x = 0,2 \times 10^{-2}$  м,  $h_y = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м,  $h_z = 0,1$  с,  $C_M = 0, \epsilon = 0,005, k_1 = 1, k_2 = 1$ .

На рис. 2, 3 показано распределение температуры и плотности теплового потока в продольном направлении  $x$  на границе  $y = 0$  при  $t = 0; 1; 2; 3; 4; 5$  с (линии 1–6). Сплошные линии — точное решение двумерной ОЗТ, штриховые — решение, полученное по одномерному алгоритму ОЗТ [12] в

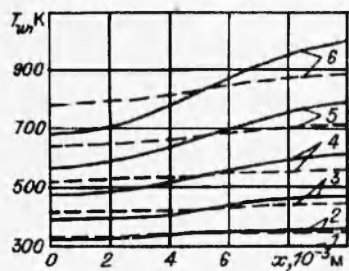


Рис. 2

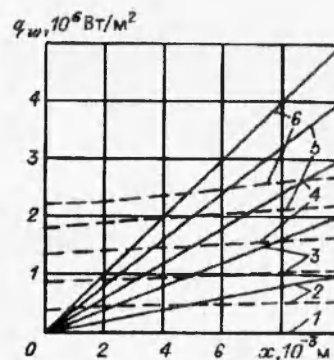


Рис. 3

разных сечениях по  $x$ . Из рисунков видно, что использование одномерного алгоритма ОЗТ приводит к большим ошибкам в определении  $T_w(x, t)$  и особенно  $q_w(x, t)$ , поэтому необходимо использовать двумерные алгоритмы ОЗТ.

На рис. 4, 5 показаны результаты решения ОЗТ по двумерному алгоритму. Здесь линии 1 — точное решение ОЗТ, 2 — решение, полученное с помощью РА на основании невозмущенной температуры  $T_c(x, t)$ , что соответствует применению ПЧМ ( $\alpha = 0$ ). Наблюдается хорошее согласование точного и численного решений. При увеличении числа точек по времени и пространству в области  $D_1$  вдвое ( $M = 100, L = 21$ ) решение ОЗТ практически не изменяется, время счета увеличивается  $\sim$  с 2 до 4 мин.

Представляет интерес апробация алгоритма на возмущенных исходных данных. С этой целью на температуру  $T_c(x, t)$  накладывались возмущения, распределенные по пилообразному закону и составляющие 1 % от ее максимального значения. Линии 3, 4 — решение, полученное ПЧМ и с помощью РА. Как видно из рисунков, решение, полученное ПЧМ, носит ярко выраженный неустойчивый характер вплоть до того, что плотность теплового потока может принимать отрицательные значения. Решение же, найденное с помощью РА, является устойчивым и дает хорошее согласование с точным решением.

Для получения решения с более мелкими шагами по времени и пространству в области  $D_1$  при тех же затратах машинной памяти целесообразно использовать разбиение времени процесса и геометрической области  $D_1$  на ряд более мелких временных интервалов и геометрических подобластей, в которых последовательно решается ОЗТ.

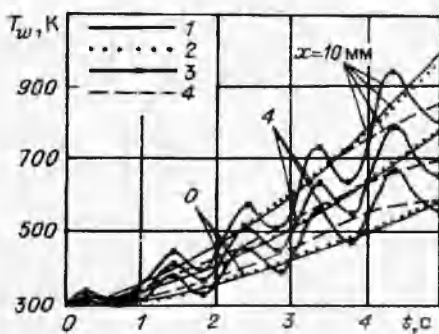


Рис. 4

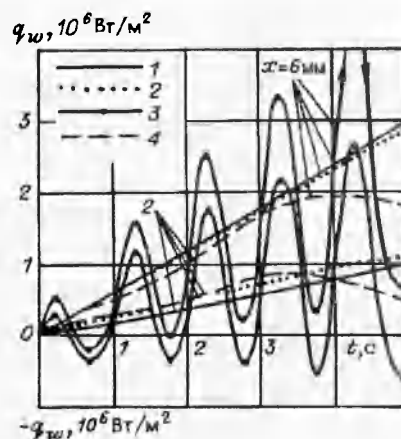


Рис. 5

Проведенные численные расчеты показали эффективность и работоспособность предлагаемых вычислительного алгоритма и программы. Время счета одного варианта задачи с возмущенными исходными данными не превышает 5 мин на IBM PC AT-386. К достоинствам предлагаемого алгоритма следует отнести его универсальность, позволяющую на основе более полных, чем в данной работе, математических моделей учесть всевозможные физико-химические процессы, происходящие в реагирующем материале при нагреве.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93—013—17286).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. — М.: Машиностроение, 1988.
2. Темкин А.Г. Обратные задачи теплопроводности. — М.: Энергия, 1973.
3. Коздоба Л.А., Круковский П.С. Методы решения обратных задач теплообмена. — Киев: Наук. думка, 1982.
4. Гришин А.М., Кузин А.Я., Миков В.Л. и др. Решение некоторых обратных задач механики реагирующих сред. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1987.
5. Алифанов О.М., Керов Н.В. Определение параметров внешнего теплового нагружения из решения двумерной обратной задачи теплопроводности // ИФЖ. — 1981. — Т. 41, № 4.
6. Керов Н.В. Решение двумерной ОЗТ в цилиндрической системе координат // ИФЖ. — 1983. — Т. 45, № 5.
7. Алифанов О.М., Егоров Ю.В. Алгоритмы решения граничной обратной задачи теплопроводности в двумерной постановке // ИФЖ. — 1985. — Т. 48, № 4.
8. Алифанов О.М., Ненарокомов А.В. Трехмерная обратная задача теплопроводности в экстремальной постановке // Докл. РАН. — 1992. — Т. 325, № 5.
9. Алифанов О.М., Артюхин Е.А. Определение граничных условий в процессе тепловых газодинамических испытаний // ТВТ. — 1978. — Т. 16, № 4.
10. Кузин А.Я., Ярославцев Н.А. Применение регуляризирующих алгоритмов для решения нелинейной граничной обратной задачи теплопроводности. — Томск, 1987. — Деп. в ВИНТИ 22.07.87, № 5280—В87.
11. Гришин А.М., Кузин А.Я., Сеницын С.П., Ярославцев Н.А. О решении обратных задач механики реагирующих сред // ИФЖ. — 1989. — Т. 56, № 3.
12. Кузин А.Я., Ярославцев Н.А. Восстановление теплового потока в реагирующее тело из решения обратной задачи тепломассообмена // Механика реагирующих сред и ее приложения: Всесоюз. сб. — Новосибирск: Наука, 1989.
13. Кузин А.Я., Ярославцев Н.А. Численное решение нелинейной граничной ОЗТ для композиционных полимерных материалов // Теплофизика и гидродинамика технологических систем: Межвуз. сб. — Томск: Изд-во Томск. политехн. ин-та, 1990.
14. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — М.: Наука, 1967.
15. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.
16. Свойства конструкционных материалов на основе углерода. Справочник / Под. ред. В.П. Соседова. — М.: Машиностроение, 1975.

г. Томск

Поступила 19/1 1994 г.,  
в окончательном варианте — 14/III 1994 г.

УДК 532.446 + 536.24

*А.В. Горин, А.В. Зарубин, Т.Н. Михайлова,  
В.А. Мухин, Д.Ф. Сиковский*

#### ТРЕНИЕ И МАССООТДАЧА ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ОБТЕКАНИИ ЦИЛИНДРА В ЗЕРНИСТОМ СЛОЕ И УЗКОЙ ЩЕЛИ

Введение. Задача расчета теплового режима тел, погруженных в инфильтруемый зернистый слой, представляет интерес во многих областях теплоэнергетики и химической технологии. Традиционный подход к ее

© А.В. Горин, А.В. Зарубин, Т.Н. Михайлова, В.А. Мухин, Д.Ф. Сиковский, 1995