УДК 532.546; 533.15

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ И КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ТРУБЫ С ТЕКУЩЕЙ В НЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

А. М. Ахтямов*,**, Г. Ф. Сафина***

* Башкирский государственный университет, 450076 Уфа, Россия
** Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа, Россия
*** Нефтекамский филиал Башкирского государственного университета, 452680 Нефтекамск, Россия
E-mails: AkhtyamovAM@mail.ru, Safinagf@mail.ru

Поставлена и решена обратная задача определения вида и параметров закрепления концов трубы по собственным частотам ее изгибных колебаний в случае течения жидкости по трубе. Доказана единственность решения задачи, показана ее корректность по Тихонову. Предложен метод решения обратной задачи, приведены примеры решения.

Ключевые слова: труба с текущей в ней жидкостью, частоты колебаний, краевые условия, параметры упругого закрепления, задача диагностирования, единственность решения, компакт.

DOI: 10.15372/PMTF20160204

Введение. Изучение обратных задач спектральной теории дифференциальных операторов начато в первой половине XX в. В работах [1, 2] коэффициенты краевых условий (причем не все) идентифицировались по спектрам лишь при определении коэффициентов самих дифференциальных уравнений. При этом для идентификации использовалось не менее двух спектров или спектр и дополнительные данные о нем (весовые числа, функция Вейля, спектральная функция и т. п.) [1, 2].

В задачах акустической диагностики также идентифицировались параметры краевых условий [3–8]. В [3–8] предложено идентифицировать всю совокупность неизвестных краевых условий спектральной задачи как линейную оболочку векторов-строк, компонентами каждого из которых являются коэффициенты соответствующего краевого условия. Особенностью этого подхода является то, что все коэффициенты диагностируемых краевых условий не известны. Задача восстановления краевых условий может быть сведена к задаче идентификации миноров максимального порядка матрицы краевых условий. В отличие от задачи идентификации непрерывной функции в дифференциальном уравнении по одному спектру рассматриваемая задача идентификации краевых условий имеет единственное решение, которое непрерывно зависит от собственных значений, что следует из анали-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-97002-р поволжье_а).

тичности фундаментальных решений рассматриваемого дифференциального уравнения колебаний трубопровода по спектральному параметру.

Целью настоящей работы является определение параметров закрепления трубы с текущей в ней жидкостью по собственным частотам ее изгибных колебаний. В работах [8–12] изучались задачи диагностирования видов закрепления струн, мембран, стержней, пластин, валов, полых труб и труб с неподвижной жидкостью в них по собственным частотам их колебаний. Однако для труб с текущей в них жидкостью поставленная задача рассматривается впервые.

Задачи вычисления собственных частот изгибных колебаний трубы при наличии в ней жидкости исследовались в работах [13, 14]. Обратная задача определения краевых условий по собственным значениям спектральной задачи для трубы, заполненной жидкостью, впервые рассмотрена в [9]. Работа [11] посвящена исследованию влияния жидкости на частоты колебаний трубы и проблемы сохранения безопасных частот колебаний упруго закрепленной трубы. В данной работе ставится обратная задача диагностирования видов закрепления трубопровода в случае протекания по нему жидкости, доказываются единственность решения задачи и ее корректность по Тихонову, предлагается метод решения задачи.

1. Обратная задача диагностирования параметров закрепления трубы с текущей в ней жидкостью. Единственность решения. Приведем некоторые сведения, необходимые для дальнейшего изложения.

Уравнение малых свободных колебаний трубопровода с текущей по нему жидкостью (с учетом ее несжимаемости) имеет следующий вид [13, 14]:

$$EI\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m+\tilde m)\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\tilde m V_0\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t} + \tilde m\Big(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

Здесь $I = \pi(r^4 - r_1^4)/4$ — момент инерции сечения трубы; EI — жесткость сечения трубы; p_0 — критическое внутреннее давление; $m = \pi(r^2 - r_1^2)\rho$, $\tilde m = \pi r_1^2 \rho_0$ — масса трубы и жидкости на единицу длины l трубы соответственно; r, r_1 — внешний и внутренний радиусы поперечного сечения; V_0 — скорость движения жидкости; ρ — плотность материала трубы; ρ_0 — плотность жидкости.

В [10] выражение для прогиба, удовлетворяющее условиям на концах трубы $w = \partial^2 w/\partial x^2 = 0$, принято в виде

$$w = \sum_{s=1}^{\infty} W_s \sin\Big(\frac{s\pi}{l}\,x\Big)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,.$$

Решение задачи найдено приближенно методом Бубнова — Галеркина [13].

В работе [9] рассмотрен подход к решению данной задачи. В безразмерных переменных выражение для прогиба записывается в виде

$$\tilde w(\tilde x, \tilde t) = X(\tilde x)\,\mathrm{e}^{i\omega \tilde t},$$

в результате уравнение (1) сводится к линейному дифференциальному уравнению

$$X^{(4)} + aX'' + 2bi\omega X' - \omega^2 X = 0, \tag{2}$$

где

$$a = \frac{\tilde m l^2}{EI}\,\Big(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2\Big), \qquad b = \frac{\tilde m V_0 l}{(EI(m+\tilde m))^{1/2}}.$$

При постановке прямой спектральной задачи краевые условия для различных видов упругого закрепления (заделка, свободное опирание, свободный конец, плавающая заделка) записываются в виде [8, 15]

$$\begin{aligned} U_1(X) &= a_1X(0) + a_4X'''(0) = 0, \qquad U_2(X) = a_2X'(0) + a_3X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= b_1X(l) + b_4X'''(l) = 0, \qquad U_4(X) = b_2X'(l) + b_3X''(l) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

В этих обозначениях прямая задача формулируется следующим образом: известны линейные формы $U_1(X)$, $U_2(X)$, $U_3(X)$, $U_4(X)$ краевых условий задачи (2), (3), требуется найти неизвестные собственные значения ω_k задачи о колебаниях трубы с жидкостью.

Уравнение частот, необходимое для решения прямой задачи, получаем из условия равенства нулю характеристического определителя [15]: $\Delta(\omega) = 0$. (Некоторые приближенные методы вычисления корней характеристического определителя изложены в [16].)

Сформулируем обратную спектральную задачу диагностирования параметров закрепления трубы с текущей в ней жидкостью по известным собственным значениям задачи о колебаниях трубы с текущей в ней жидкостью.

Введем матрицу C размером 4×8 [9]:

$$C = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix},$$

составленную из нулевых матриц, а также из матриц A и B, элементами которых являются коэффициенты краевых условий (3):

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & a_2 & a_3 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Элементы матрицы C обозначим через c_{ij}, а миноры матрицы C, образованные из столбцов с номерами i, j, r, l, — через M_{ijrl}.

В новых обозначениях краевые условия (3) можно записать в виде

$$U_i(X) = \sum_{j=1}^{4} \big[c_{ij}X^{(j-1)}(0) + c_{i,4+j}X^{(j-1)}(l)\big] = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{4}$$

Тогда обратная задача формулируется следующим образом: коэффициенты c_{ij} задачи (2), (4) не известны; ранг матрицы C, составленной из этих коэффициентов, равен четырем; собственные значения ω_k задачи (2), (4) известны. Требуется восстановить линейную оболочку $\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4 \rangle$, построенную на векторах $\boldsymbol{c}_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}, c_{i5}, c_{i6}, c_{i7}, c_{i8})^{\text{т}}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Заметим, что нахождение линейной оболочки $\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4 \rangle$ эквивалентно нахождению матрицы C с точностью до линейной эквивалентности ее строк.

Наряду с формами (4) рассмотрим следующие линейные однородные формы:

$$\tilde{U}_i(X) = \sum_{j=1}^{4} \big[\tilde{c}_{ij}X^{(j-1)}(0) + \tilde{c}_{i,4+j}X^{(j-1)}(l)\big] = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{5}$$

Матрицу, составленную из коэффициентов $\tilde{c}_{ij}$, обозначим через $\tilde{C}$, ее миноры — через $\tilde{M}_{ijrl}$, а соответствующие миноры второго порядка — через $\tilde{A}_{ij}$ и $\tilde{B}_{r-4\,l-4}$. Введем также следующие векторы: $\boldsymbol{c}_i^{+} = (\tilde{c}_{i1}, \tilde{c}_{i2}, \tilde{c}_{i3}, \tilde{c}_{i4}, \tilde{c}_{i5}, \tilde{c}_{i6}, \tilde{c}_{i7}, \tilde{c}_{i8})^{\text{т}}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда справедлива

Теорема 1 (о единственности решения обратной задачи). *Пусть* $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} \tilde{C} = 4$. *Если собственные значения* $\{\omega_k\}$ *задачи* (2), (4) *и* $\{\tilde{\omega}_k\}$ *задачи* (2), (5) *с учетом их кратностей совпадают, то* $\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4 \rangle = \langle \boldsymbol{c}_1^{+}, \boldsymbol{c}_2^{+}, \boldsymbol{c}_3^{+}, \boldsymbol{c}_4^{+} \rangle$.

Доказательство. Заметим, что характеристический определитель можно представить в форме

$$\Delta(\omega_k) = \det(CD),$$

где

$$D = \left\| \begin{matrix} X_1(0) & X_2(0) & X_3(0) & X_4(0) \\ X_1'(0) & X_2'(0) & X_3'(0) & X_4'(0) \\ X_1''(0) & X_2''(0) & X_3''(0) & X_4''(0) \\ X_1'''(0) & X_2'''(0) & X_3'''(0) & X_4'''(0) \\ X_1(l) & X_2(l) & X_3(l) & X_4(l) \\ X_1'(l) & X_2'(l) & X_3'(l) & X_4'(l) \\ X_1''(l) & X_2''(l) & X_3''(l) & X_4''(l) \\ X_1'''(l) & X_2'''(l) & X_3'''(l) & X_4'''(l) \end{matrix} \right\|.$$

Используя формулу Бине — Коши [17], получаем

$$\Delta(\omega_k) = \sum_{1\leqslant i<j<\ldots<l\leqslant 8} M_{ijrl} f_{ijrl}(\omega_k), \tag{6}$$

где $f_{ijrl}(\omega_k)$ — миноры четвертого порядка матрицы D, составленные из строк с номерами i, j, r, l. Так как $M_{ijrl} = 0$ при $r \leqslant 4$, $l \leqslant 4$, $i \geqslant 5$, $j \geqslant 5$, то, применяя теорему Лапласа для вычисления определителя и учитывая, что $\Delta(\omega_k) = 0$, получаем

$$\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant 4\\ 5\leqslant r<l\leqslant 8}} M_{ijrl} f_{ijrl}(\omega_k) = 0. \tag{7}$$

Из общей теории для линейных дифференциальных операторов следует, что функция $\Delta(\omega)$ является целой функцией порядка 1/2 [18]. Следовательно, характеристические определители $\Delta(\omega)$ и $\tilde{\Delta}(\omega)$ задач (2), (4) и (2), (5) связаны соотношением

$$\Delta(\omega) \equiv K\tilde{\Delta}(\omega),$$

где K — некоторая отличная от нуля константа.

Из (6), (7) получаем

$$\begin{gathered}
[M_{1256} - K\tilde{M}_{1256}]f_{1256} + [M_{1257} - K\tilde{M}_{1257}]f_{1257} + [M_{1268} - K\tilde{M}_{1268}]f_{1268} + \\
+ [M_{1278} - K\tilde{M}_{1278}]f_{1278} + [M_{1356} - K\tilde{M}_{1356}]f_{1356} + [M_{1357} - K\tilde{M}_{1357}]f_{1357} + \\
+ [M_{1368} - K\tilde{M}_{1368}]f_{1368} + [M_{1378} - K\tilde{M}_{1378}]f_{1378} + [M_{2456} - K\tilde{M}_{2456}]f_{2456} + \\
+ [M_{2457} - K\tilde{M}_{2457}]f_{2457} + [M_{2468} - K\tilde{M}_{2468}]f_{2468} + [M_{2478} - K\tilde{M}_{2478}]f_{2478} + \\
+ [M_{3456} - K\tilde{M}_{3456}]f_{3456} + [M_{3457} - K\tilde{M}_{3457}]f_{3457} + \\
+ [M_{3468} - K\tilde{M}_{3468}]f_{3468} + [M_{3478} - K\tilde{M}_{3457}]f_{3478} \equiv 0. \qquad (8)
\end{gathered}$$

Предположим, что жидкость течет по трубе. Это означает, что скорость течения жидкости $V_0 \neq 0$, а в уравнении (2) коэффициент $b \neq 0$.

Нетрудно показать, что в тождестве (8) во всех слагаемых все правые множители, за исключением функции $f_{1356} = -f_{1257}$, образуют линейно независимую систему. Тогда из линейной независимости функций $f_{1256}(\omega)$, $f_{1357}(\omega)$, $f_{2468}(\omega)$, $f_{1257}(\omega)$, $f_{1378}(\omega)$, $f_{3457}(\omega)$, $f_{2478}(\omega)$, $f_{3468}(\omega)$, $f_{2368}(\omega)$, $f_{2457}(\omega)$, $f_{1278}(\omega)$, $f_{3456}(\omega)$, $f_{1268}(\omega)$, $f_{2456}(\omega)$, $f_{1257}(\omega)$ следуют равенства

$$M_{1256} = K\tilde{M}_{1256}, \qquad M_{1357} = K\tilde{M}_{1357}, \qquad M_{2468} = K\tilde{M}_{2468},$$

$$
\begin{gathered}
M_{3478} = K\tilde{M}_{3478}, \qquad M_{1378} = K\tilde{M}_{1378}, \qquad M_{3457} = K\tilde{M}_{3457}, \\
M_{2478} = K\tilde{M}_{2478}, \qquad M_{1368} = K\tilde{M}_{1368}, \qquad M_{2457} = K\tilde{M}_{2457}, \\
M_{1278} = K\tilde{M}_{1278}, \qquad M_{3456} = K\tilde{M}_{3456}, \qquad M_{2456} = K\tilde{M}_{2456}, \\
M_{1268} = K\tilde{M}_{1268}, \qquad M_{3468} = K\tilde{M}_{3468}, \\
M_{1257} - M_{1356} = K(\tilde{M}_{1356} - \tilde{M}_{1257}).
\end{gathered}
$$

Для доказательства теоремы рассмотрим 15 случаев:

$$
\begin{gathered}
M_{1256} \neq 0, \qquad M_{1357} \neq 0, \qquad M_{2468} \neq 0, \\
M_{1256} \neq 0, \qquad M_{1378} \neq 0, \qquad M_{3457} \neq 0, \\
M_{2478} \neq 0, \qquad M_{3468} \neq 0, \qquad M_{2368} \neq 0, \\
M_{2457} \neq 0, \qquad M_{1278} \neq 0, \qquad M_{3456} \neq 0, \\
M_{1268} \neq 0, \qquad M_{2456} \neq 0,
\end{gathered} \tag{9}
$$

$$
\begin{gathered}
M_{1256} = M_{1357} = M_{2468} = M_{3478} = M_{1378} = M_{3457} = M_{2478} = M_{3468} = \\
= M_{1368} = M_{2457} = M_{1278} = M_{3456} = M_{1268} = M_{2456} = 0 \quad (M_{1257} - M_{1356} \neq 0).
\end{gathered}
$$

Будем считать, что реализуется один из этих случаев (9), например первый: $M_{1256} = K\tilde{M}_{1256} \neq 0$. Тогда из равенств

$$
M_{1256} = A_{12}B_{12} = a_1a_2b_1b_2, \qquad \tilde{M}_{1256} = \tilde{A}_{12}\tilde{B}_{12} = \tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{b}_1\tilde{b}_2
$$

следует, что элементы a_1, a_2, b_1, b_2, $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$ матриц C и $\tilde{C}$ отличны от нуля. Разделим 1, 2, 3, 4-ю строки матрицы C на a_1, a_2, b_1, b_2 соответственно, а 1, 2, 3, 4-ю строки матрицы $\tilde{C}$ на $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$ соответственно. В результате этих преобразований матрицы C и $\tilde{C}$ с точностью до линейной эквивалентности строк принимают вид

$$
C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 & 0 \end{Vmatrix},
$$

$$
\tilde{C} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \tilde{a}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{a}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \tilde{b}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{b}_3 & 0 \end{Vmatrix}.
$$

Из этого представления матриц C и $\tilde{C}$ и равенства $M_{1256} = K\tilde{M}_{1256}$ следует, что $K = 1$.

Из равенств $M_{2456} = K\tilde{M}_{2456}$, $M_{1268} = K\tilde{M}_{1268}$ вытекает

$$
a_4 = \tilde{a}_4, \qquad b_4 = \tilde{b}_4. \tag{10}
$$

Аналогично из равенств $M_{1278} = K\tilde{M}_{1278}$, $M_{3456} = K\tilde{M}_{3456}$ следует

$$
a_3a_4 = \tilde{a}_3\tilde{a}_4, \qquad b_3b_4 = \tilde{b}_3\tilde{b}_4,
$$

из равенств $M_{1368} = K\tilde{M}_{1368}$, $M_{2457} = K\tilde{M}_{2457}$ —

$$
a_3b_4 = \tilde{a}_3\tilde{b}_4, \qquad b_3a_4 = \tilde{b}_3\tilde{a}_4.
$$

Учитывая (10) и последние четыре равенства, получаем

$$
a_3 = \tilde{a}_3, \qquad a_4 = \tilde{a}_4, \qquad b_3 = \tilde{b}_3, \qquad b_4 = \tilde{b}_4.
$$

Таким образом, $\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4 \rangle = \langle \boldsymbol{c}_1^+, \boldsymbol{c}_2^+, \boldsymbol{c}_3^+, \boldsymbol{c}_4^+ \rangle$.

Аналогично можно показать, что при рассмотрении других случаев (9) (кроме последнего) получаются такие же результаты.

Рассмотрим последний случай (9): $M_{1257} - M_{1356} \neq 0$, остальные миноры равны нулю. Выполнение этого неравенства возможно в следующих случаях: 1) $M_{1257} \neq 0$, $M_{1356} = 0$; 2) $M_{1356} \neq 0$, $M_{1257} = 0$; 3) $M_{1257} \neq 0$, $M_{1356} \neq 0$ ($M_{1257} \neq M_{1356}$). С использованием приведенных выше преобразований матрицы C несложно показать, что в случае 3 возникает противоречие: $a_3 = 0$ и $a_3 \neq 0$. В случаях 1, 2 получаем две матрицы C с точностью до эквивалентности строк:

$$C = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$C = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Анализ найденных матриц позволяет сделать вывод, что при реализации последнего случая (9) могут быть восстановлены двумя способами следующие виды закрепления концов трубы: заделка — свободное опирание или свободное опирание — заделка.

Таким образом, в случае жидкости, текущей по трубопроводу, решение обратной задачи единственно. Теорема доказана.

Приведенное доказательство теоремы позволяет сделать следующий вывод: единственность решения обратной задачи имеет место при всех видах закрепления трубы, кроме случая заделка — свободное опирание.

2. Метод определения параметров закрепления трубы с текущей в ней жидкостью. Для того чтобы построить решение задачи восстановления неизвестных краевых условий по собственным частотам изгибных колебаний трубы с текущей в ней жидкостью, можно, как и в работе [8], использовать два метода построения решения обратной задачи, основанные на представлении характеристического определителя в виде бесконечного произведения

$$\Delta(\omega) \equiv K \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\omega}{\omega_k}\Big).$$

Однако при реализации эти методы оказываются неэффективными вследствие значительного накопления ошибок при вычислении соответствующего бесконечного произведения. Поэтому в настоящей работе применен другой метод, основанный на решении системы алгебраических уравнений.

Построим точное решение обратной задачи. Итак, предположим, что жидкость течет по трубе, т. е. в уравнении (2) коэффициент $b \neq 0$. В этом случае собственные значения $\{\omega_k\}$ задачи (2), (4) удовлетворяют частотному уравнению

$$\begin{aligned} \Delta(\omega_k) = (M_{1257} - M_{1356}) f_{1257}(\omega_k) + M_{1268} f_{1268}(\omega_k) + \\ + M_{2456} f_{2456}(\omega_k) + M_{1368} f_{1368}(\omega_k) + M_{2457} f_{2457}(\omega_k) + \\ + M_{1278} f_{1278}(\omega_k) + M_{3456} f_{3456}(\omega_k) + M_{1378} f_{1378}(\omega_k) + \\ + M_{3457} f_{3457}(\omega_k) + M_{2478} f_{2478}(\omega_k) + M_{3468} f_{3468}(\omega_k) + \\ + M_{1357} f_{1357}(\omega_k) + M_{2468} f_{2468}(\omega_k) + M_{1256} f_{1256}(\omega_k) + M_{3478} f_{3478}(\omega_k) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть ω_k ($k = 1, 2, \ldots, 14$) — собственные значения задачи (2), (4). Тогда равенства (11) образуют систему 14 линейных алгебраических уравнений относительно 15 неизвестных левых множителей.

Если $\operatorname{rank} \|f_{k_1k_2k_3k_4}(\omega_k)\|_{15\times 14} = 14$, то в силу специального вида соответствующей матрицы C задача нахождения этой матрицы имеет единственное решение.

Действительно, так как $\operatorname{rank} C = 4$, то хотя бы один из миноров M_{ijkl} не равен нулю. Пусть, например, $M_{1357} \ne 0$, тогда с помощью линейных преобразований матрицу C можно привести к виду

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

При этом сами миноры M_{ijkl} не меняются с точностью до множителя.

Для полученной матрицы имеем

$$M_{1257} = a_2, \quad M_{3457} = -a_4, \quad M_{1356} = b_2, \quad M_{1378} = -b_4.$$

Тогда матрица C может быть записана в виде

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -M_{3457}/M_{1357} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{1257}/M_{1357} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -M_{1378}/M_{1357} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{1356}/M_{1357} & 1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{12}$$

В этом случае миноры M_{1357}, M_{1257}, M_{3457}, M_{1356}, M_{1378}, используемые в записи (12) матрицы C, будем называть основными, а основной минор, с которого начинается построение (в данном случае ненулевой минор M_{1357}), — центральным. Так как $\operatorname{rank} C = 4$, то нетрудно показать, как и в рассмотренном выше случае, что элементы матрицы C всегда могут быть представлены в виде нулей, единиц и миноров самой матрицы. Таким образом, верна

Теорема 2. *Если матрица системы уравнений* (11) *имеет ранг* 14, *то решение обратной задачи восстановления краевых условий* (4) *единственно.*

Рассмотрим пример определения краевых условий по 14 собственным значениям задачи (2), (4) о колебаниях трубы с жидкостью.

Рассмотрим дифференциальное уравнение изгибных колебаний трубы

$$X^{(4)} + 1{,}05X'' + 1{,}5i\omega X' - \omega^2 X = 0,$$

определяемое следующими параметрами системы труба — жидкость:

$$\begin{gathered} r_1 = 0{,}0095\text{ м}, \quad r = 0{,}01\text{ м}, \quad l = 5\text{ м}, \quad \rho = 2{,}7 \cdot 10^3\text{ кг/м}^3, \\ \rho_0 = 10^3\text{ кг/м}^3, \quad V_0 = 1\text{ м/с}, \quad E = 6{,}9 \cdot 10^9\text{ Н/м}^2, \quad p_0 = 0{,}5 \cdot 10^3\text{ Н/м}^2. \end{gathered} \tag{13}$$

Пусть известны 14 собственных значений ω_k задачи с параметрами (13) в случае упругого закрепления концов трубы (3). Коэффициенты относительной жесткости на изгиб (см. (3)) на левом конце трубы равны единице, на правом — двум:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 21{,}8138 + 0{,}0195i, & \omega_2 &= 61{,}3259 + 0{,}0041i, \\ \omega_3 &= 120{,}5827 + 0{,}0015i, & \omega_4 &= 199{,}5591 + 0{,}0007i, \\ \omega_5 &= 298{,}2665 + 0{,}0004i, & \omega_6 &= 416{,}7091 + 0{,}0002i, \\ \omega_7 &= 554{,}8886 + 0{,}0002i, & \omega_8 &= 712{,}8060 + 0{,}0001i, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\omega_9 = 890{,}4617 + 0{,}000\,07i, \qquad \omega_{10} = 1087{,}8560 + 0{,}000\,06i,$$

$$\omega_{11} = 1304{,}9890 + 0{,}000\,04i, \qquad \omega_{12} = 1541{,}8510 + 0{,}000\,03i,$$

$$\omega_{13} = 1798{,}4720 + 0{,}000\,03i, \qquad \omega_{14} = 2074{,}8220 + 0{,}000\,02i.$$

Для краткости собственные значения приведены с точностью до 4–5 знаков после запятой. В численном эксперименте они определялись с точностью до 10–20 знаков после запятой.

Восстановим указанные выше краевые условия. С помощью пакета Maple покажем, что ранг матрицы системы (11) равен 14, а ее решение имеет вид

$$M_{1357} = K, \qquad M_{3457} = K, \qquad M_{1378} = -2K,$$

$$M_{3478} = -2K, \qquad M_{1257} - M_{1356} = 0,$$

остальные миноры M_{ijrl} равны нулю. Здесь $K = \mathrm{const} \neq 0$.

Из равенства $M_{1378} \neq 0$ следует $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $b_3 \neq 0$, $b_4 \neq 0$. Разделим первую строку матрицы C на a_1, вторую — на a_3, третью — на b_4, четвертую строку — на b_3. В результате матрица C (с точностью до линейной эквивалентности строк) принимает вид

$$C = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно, $M_{1378} = -1$, т. е. $K = 0{,}5$. Тогда из равенств

$$M_{3457} = 0{,}5, \qquad M_{1378} = -1, \qquad M_{3478} = -1$$

получаем $a_4 = -1$, $b_1 = 0{,}5$, а из равенств

$$M_{1257} - M_{1356} = 0, \qquad M_{1256} = 0 \text{ —}$$

$a_2 = 0$, $b_2 = 0$.

Таким образом, матрица C имеет вид

$$C = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Отсюда получаем единственное представление для краевых условий

$$X(0) - X'''(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(l) + 2X'''(l) = 0, \quad X''(l) = 0. \tag{15}$$

По известным 14 собственным значениям задачи колебаний трубы, в которой течет жидкость, установлено, что левый конец трубы упруго закреплен пружиной с относительной жесткостью на изгиб, равной единице, а правый — с относительной жесткостью на изгиб, равной двум.

Заметим, что краевые условия (15) определены верно. Именно эти граничные условия (вид упругого закрепления) использовались при выборе собственных значений ω_k спектральной задачи.

3. Корректность обратной задачи по Тихонову и ее приближенное решение. Выше показано, каким образом строится решение, если известны точные собственные значения. Однако на практике собственные значения задачи (2), (4) определяются с некоторой погрешностью. Поэтому возникает задача приближенного определения краевых условий.

Пусть собственные частоты ω_k известны лишь приближенно:

$$\omega_k \approx \mu_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 14).$$

Подставляя μ_k в (11), получаем систему 14 уравнений для 15 неизвестных $S_{1257} = M_{1257} - M_{1356}$, M_{1268}, …, M_{3478}.

Решение системы уравнений (11) не является корректной по Адамару задачей. Значения M_{ijrl} ($i = 1, 2, 3, 4, 5$; $j = 2, 3, 4, 5, 6$; $r = 3, 4, 5, 6, 7$; $l = 4, 5, 6, 7, 8$), найденные по искаженным частотам μ_k, могут не являться минорами какой-либо матрицы, а следовательно, по ним невозможно построить матрицу C и соответствующие краевые условия.

Известно, что числа $M_{1,\ldots,m}$ являются минорами некоторой матрицы тогда и только тогда, когда выполняются соотношения Плюккера, или квадратичные ρ-соотношения [19, 20]:

$$\sum_{k=0} (-1)^k M_{i_1,\ldots,i_{m-1}\, j_k} M_{j_0,\ldots,j_{k-1},j_{k+1},\ldots,j_m} = 0.$$

В рассматриваемом случае для матрицы C при $M_{1357} \ne 0$ получаем следующие соотношения (с учетом нулевых миноров):

$$\begin{gathered} M_{1256}M_{1357} = M_{1257}M_{1356}, \qquad M_{1278}M_{1357} = M_{1257}M_{1378}, \\ M_{1368}M_{1357} = M_{1356}M_{1378}, \qquad M_{2457}M_{1357} = M_{1257}M_{3457}, \\ M_{3456}M_{1357} = M_{1356}M_{3457}, \qquad M_{1378}M_{1357} = M_{3457}M_{1378}, \\ M_{2468}M_{1357} = M_{2457}M_{1368} = M_{1256}M_{3478} = M_{1278}M_{3456} = M_{1378}M_{2456} = \\ = M_{1257}M_{3468} = M_{3457}M_{1268} = M_{1356}M_{2478}. \end{gathered} \tag{16}$$

Если числа M_{ijrl} удовлетворяют соотношениям (16), то они являются минорами некоторой матрицы, т. е. по ним можно восстановить краевые условия задачи (2), (4).

Соотношения Плюккера (16) позволяют выделить множество корректности M, на основе которого можно доказать корректность обратной задачи по Тихонову и построить приближенное решение обратной задачи.

При использовании подхода Тихонова рассматривается некоторое множество $M \subset V$, существенно более узкое, чем все пространство V. Пусть образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество Λ, т. е. $\Lambda = RM$.

Задача $Rv = z$ называется корректной по Тихонову (условно-корректной), если выполнены следующие условия [21–25]:

1) априори известно, что решение задачи существует и принадлежит некоторому множеству M пространства V;

2) решение единственно на множестве M;

3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, при котором для любых $z, \tilde z \in \Lambda = RM$, таких что $\|z - \tilde z\|_Z < \delta$, выполнено неравенство $\|v - \tilde v\|_V < \varepsilon$.

В данном случае под оператором R понимается отображение, задаваемое системой уравнений (11) и переводящее набор 15 значений $S_{1257} = M_{1257} - M_{1356}$, M_{1268}, …, M_{3478} в 14 значений μ_k ($k = 1, 2, \ldots, 14$).

Матрицу системы (11) обозначим через F, ее миноры, полученные вычеркиванием столбца с элементами уравнения (11), представляют собой уравнения гиперплоскостей в 15-мерном пространстве $\mathbb{R}^{15}$. Пересечение этих гиперплоскостей (в случае $\operatorname{rank} F = 14$) есть прямая:

$$S_{1257} = F_{1257}t, \quad M_{1268} = -F_{1268}t, \quad M_{2456} = F_{2456}t, \quad \ldots, \quad M_{3478} = -F_{3478}t. \tag{17}$$

Здесь $t \ne 0$ — параметр (знаки перед F_{ijrl} чередуются). Поскольку параметр $t \ne 0$ произвольный, количество решений системы уравнений (11) бесконечно.

Чтобы выделить единственное решение и множество корректности, введем норму

$$\|\cdot\| = \max\left(|S_{1257}|, |M_{1268}|, |M_{2456}|, \ldots, |M_{3478}|\right).$$

Будем называть множеством корректности M такой набор миноров $v = (S_{1257}, M_{1268}, M_{2456}, \ldots, M_{3478})$, для которого выполнены следующие три условия:

1) условие принадлежности v единичной сфере:

$$\|v\| = \max\left(|S_{1257}|, |M_{1268}|, |M_{2456}|, \ldots, |M_{3478}|\right) = 1; \tag{18}$$

2) условие неотрицательности миноров M_{1256}, M_{1257}, M_{1356}, M_{1357}, M_{2456}, M_{2457}, M_{3456}, M_{3457} и неположительности миноров M_{1268}, M_{1278}, M_{1368}, M_{1378}, M_{2468}, M_{2478}, M_{3468}, M_{3478};

3) условие Плюккера (16).

Выполнение условия 1 обеспечивает существование двух решений (две точки пересечения прямой (см. (17)) и сферы (см. (18)). Условие 2 следует из физического смысла коэффициентов, выполняется априори и позволяет выбрать одно из двух решений (одну из двух точек пересечения). Выбор знака “$\leqslant$” или “$\geqslant$” непринципиален, он соответствует выбору одного из двух решений, получающихся при пересечении прямой (см. (17)) и сферы (см. (18)).

Из определения множества M следует, что оно является компактом.

Пусть V — пространство $\mathbb{R}^{15}$ элементов $v = (v_1, v_2, \ldots, v_{15})$ с нормой $\|v\| = \max\left(|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_{15}|\right)$; Z — пространство $\mathbb{R}^{14}$ элементов $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{14})$ с нормой $\|z\| = \max\left(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_{14}|\right)$, образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество Λ, т. е. $\Lambda = RM$. Тогда задача $Rv = z$ является корректной по Тихонову, так как все три условия определения корректности по Тихонову выполнены: априори известно, что решение задачи идентификации набора из 15 значений $S_{1257} = M_{1257} - M_{1356}$, M_{1268}, ..., M_{3478} по собственным значениям существует (так как именно с помощью уравнения (11) описываются собственные значения реальной идентифицируемой механической системы); компактность множества M и единственность решения на нем показаны выше. Таким образом, условия 1, 2 выполнены. Условие 3 следует из аналитичности функции $f_{ijrl}(\omega_k)$ по параметру ω_k.

Заметим, что матрица C (а значит, и краевые условия) в явном виде однозначно выражается через 15 значений $S_{1257} = M_{1257} - M_{1356}$, M_{1268}, ..., M_{3478}. Поэтому задача определения краевых условий также корректна по Тихонову.

Покажем, каким образом строится матрица C (приближенное решение).

Если значения $S_{1257} = M_{1257} - M_{1356}$, M_{1268}, ..., M_{3478} принадлежат множеству корректности M и наибольшим по модулю минором порядка 14 матрицы F является минор $|F_{1357}|$, то решение для матрицы C, как показано выше, может быть представлено формулой (12):

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -F_{3457}/F_{1357} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{1257}/F_{1357} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -F_{1378}/F_{1357} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{1356}/F_{1357} & 1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{19}$$

Если наибольшим по модулю минором порядка 14 матрицы F является другой минор, например $|F_{1378}|$, то решение для матрицы C представляется в виде

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -F_{3478}/F_{1378} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{1278}/F_{1378} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -F_{1357}/F_{1378} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{1368}/F_{1378} & 1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{20}$$

Зависимость погрешностей определения миноров M_{ijkl}
от погрешностей определения собственных значений ω_k задачи (2), (4)
с параметрами (13) системы труба — жидкость

ω_1	ω_2	ω_3	$\Delta\omega_k$	M_{1378}	ΔM_{ijkl}
21,81	61,32	120,58	$2{,}8 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}993\,560\,00$	$0{,}3 \cdot 10^{-1}$
21,8138	61,3159	120,5828	$3{,}0 \cdot 10^{-7}$	$-0{,}999\,961\,00$	$0{,}4 \cdot 10^{-4}$
21,813 809	61,315 916	120,582 864	$3{,}2 \cdot 10^{-10}$	$-0{,}999\,999\,94$	$0{,}6 \cdot 10^{-7}$

Аналогично можно построить матрицу C при другом наибольшем по абсолютной величине миноре.

Заметим, что миноры M_{1257} и M_{1356} находятся из соотношения $F_{1257} = M_{1257} - M_{1356}$ и соотношений Плюккера (16).

Запись матрицы C в виде (19), (20) или в другой подобной форме удобна тем, что набор миноров этой матрицы принадлежит множеству корректности M (минор $M_{1357} = 1$, остальные миноры не превышают единицу). Метод решения, основанный на выделении наибольшего по модулю минора и представлении с его помощью матрицы, состоящей из единиц, и элементов, которые по модулю меньше единицы, является, по сути, частным случаем метода подбора, используемого для решения корректных по Тихонову задач.

Если известны лишь приближенные собственные значения ω_k, а значит, миноры $F_{1257}, F_{1268}, \ldots, F_{3478}$ заданы приближенно, то равенства (16) могут не выполняться и поэтому формально по значениям $F_{1257}, F_{1268}, \ldots, F_{3478}$ матрицу C построить невозможно. Однако в записи (19) (или (20), или другой аналогичной записи) для матрицы C не используются некоторые миноры, поэтому их значения не нужны. Если M_{1357} является наибольшим по модулю минором 14-го порядка матрицы F, то матрицу (19) можно считать приближенным решением задачи идентификации матрицы C. При этом из сказанного выше следует, что чем ближе числа ω_k к точным, тем ближе к точным значениям и элементы матрицы C.

Для оценки точности восстановления граничных коэффициентов в зависимости от точности найденных собственных значений проведен численный эксперимент. В таблице приведены погрешности определения собственных значений спектральной задачи (2), (4) и соответствующие им погрешности восстановления миноров матрицы C для системы труба — жидкость с параметрами (13) (указаны вещественные резонансные значения первых трех собственных значений и значения одного из миноров, при вычислении погрешностей использованы точные значения всех указанных параметров с 10 знаками после запятой).

Заметим, что если для задачи (2), (4) с параметрами (13) системы труба — жидкость известны, например, собственные значения с четырьмя знаками после запятой, то миноры восстанавливаются с точностью до четырех знаков после запятой: $M_{3478} = -0{,}999\,934$, $M_{1378} = -0{,}999\,963$, $M_{1357} = 0{,}500\,027$, $M_{3457} = 0{,}499\,975$. В этом случае с использованием описанного выше метода восстанавливается матрица

$$
C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -0{,}999\,945 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}499\,997 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.
$$

При этом граничные условия имеют вид

$$
X(0) - 0{,}999\,95 X'''(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(l) + 2{,}000\,01 X'''(l) = 0, \quad X''(l) = 0.
$$

Если известны собственные значения с двумя знаками после запятой, то миноры восстанавливаются с точностью до одного знака после запятой: $M_{3478} = -0{,}970\,463$,

$M_{1378} = -0{,}993\,56$, $M_{1357} = 0{,}499\,48$, $M_{3457} = 0{,}498\,61$. В данном случае восстанавливается матрица

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -0{,}9893 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}498\,51 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

При этом граничные условия имеют вид

$$X(0) - 0{,}989X'''(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(l) + 1{,}994X'''(l) = 0, \quad X''(l) = 0.$$

Таким образом, если погрешность определения значений частот равна 10^{-5}, то погрешность восстановления миноров (а следовательно, элементов матрицы C с точностью до эквивалентности строк и параметров краевых условий) составит 10^{-2}. Заметим также, что для восстановления краевых условий рассматриваемой спектральной задачи (2), (3) необходимо знать не менее 14 собственных значений задачи колебаний трубы с текущей в ней жидкостью.

Пусть в задаче (13), (3) известны только 13 собственных значений. Необходимо восстановить краевые условия. Решая обратную задачу с помощью пакета Maple, покажем, что ранг матрицы системы (11) равен 13, а ее решение имеет вид $M_{1357} = K_1$, $M_{3457} = K_1$, $M_{1378} = -2K_1$, $M_{3478} = -2K_1$, $M_{1257} - M_{1356} = K_2$ ($K_1 = \text{const} \neq 0$, $K_2 = \text{const} \neq 0$), остальные миноры M_{ijkl} матрицы C равны нулю.

Из равенства $M_{1378} \neq 0$ следует $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $b_4 \neq 0$, $b_3 \neq 0$. С использованием преобразований, описанных выше, получаем $M_{1357} = 0{,}5$ ($K_1 = 0{,}5$). Учитывая равенства

$$M_{3457} = 0{,}5, \qquad M_{1378} = -1, \qquad M_{3478} = -1,$$

получаем $a_4 = -1$, $b_4 = 1$. При этом матрица C принимает вид

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим условие

$$M_{1257} - M_{1356} = K_2 \neq 0,$$

из которого следует $a_2 - b_2 = K_2 \neq 0$ (причем $a_2 \neq b_2$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ одновременно). Учитывая, что остальные миноры матрицы системы уравнений (11) равны нулю, из приведенных выше условий можно получить следующие представления матрицы C с точностью до эквивалентности строк:

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, имеем представления для краевых условий

$$X(0) - X'''(0) = 0, \qquad X'(0) + X''(0) = 0,$$

$$X(l) + 2X'''(l) = 0, \qquad X''(l) = 0$$

или

$$X(0) - X'''(0) = 0, \qquad X''(0) = 0,$$
$$X(l) + 2X'''(l) = 0, \qquad X'(l) + X''(l) = 0.$$

Таким образом восстанавливаются два вида упругого закрепления трубы с текущей в ней жидкостью, отличающиеся от реальных закреплений. Из рассмотренного примера следует, что для единственности восстановления краевых условий задачи (13), (3) необходимо использовать 14 значений из спектра частот колебаний трубы.

Заключение. В работе показана единственность решения задачи определения параметров упругого закрепления концов трубы с текущей в ней жидкостью по известным собственным значениям спектральной задачи. Разработан метод решения этой задачи. Доказана единственность решения задачи и показана ее корректность по Тихонову.

Проведенные исследования показывают, что движение жидкости влияет на процедуру восстановления граничных условий.

От того, течет ли жидкость по трубе, зависит также количество собственных значений, необходимых для определения вида закрепления концов трубы. Если жидкость не течет по трубе [9], то для восстановления двух типов краевых условий достаточно знать девять собственных значений задачи. Показано, что в случае жидкости, текущей по трубе, для определения всех четырех краевых условий необходимо знать 14 собственных значений.

Результаты проведенных исследований могут быть использованы при выборе вида закрепления, при котором колебания трубы с жидкостью происходят в безопасном спектре частот. Кроме того, они применимы для акустической диагностики закрепления трубы (однако в этом случае требуется очень высокая точность приборов, измеряющих собственные частоты).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гладвелл Г. М. Л.** Обратные задачи теории колебаний. М.; Ижевск: Науч.-издат. центр “Регулярная и хаотическая динамика”: Ин-т компьютер. исслед., 2008.
2. **Юрко В. А.** Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
3. **Сергиенко И. В.** Системный анализ многокомпонентных распределенных систем / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека. Киев: Наук. думка, 2009.
4. **Халилов С. А., Минтюк В. Б.** Исследование устойчивости отсека крыла методом идентификации краевых условий на основе упрощенной модели // Авiцiйно-космiчна технiка и технологiя. 2003. Вып. 2. С. 6–10.
5. **Ватульян А. О.** Обратные и некорректные задачи: Учеб. / А. О. Ватульян, О. А. Беляк, Д. Ю. Сухов, О. В. Явруян. Ростов н/Д: Изд-во Южного федерал. ун-та, 2011.
6. **Ahmadian H., Mottershead J. E., Friswell M. I.** Boundary condition identification by solving characteristic equation // J. Sound Vibrat. 2001. N 247. P. 755–763.
7. **Hung-Jen Liu, Nien-Sheng Hsu, Tim Hau Lee.** Simultaneous identification of parameter, initial condition, and boundary condition in groundwater modelling // Hydrol. Process. 2009. N 23. P. 2358–2367.
8. **Ахтямов А. М.** Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009.
9. **Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф.** Определение виброзащитного закрепления трубопровода // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 139–147.

10. **Сафина Г. Ф.** Моделирование в диагностировании закреплений цилиндрических оболочек. Уфа: Баш. гос. ун-т, 2010.
11. **Сафина Г. Ф.** Сохранение частот колебаний трубы с жидкостью // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 3. С. 124–134.
12. **Ахтямов А. М., Муфтахов А. В.** Корректность по Тихонову задачи идентификации закреплений механических систем // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 24–37.
13. **Ильгамов М. А.** Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969.
14. **Томпсон Дж. М. Т.** Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1985.
15. **Вибрации** в технике: Справ.: В 6 т. М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина.
16. **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968.
17. **Ланкастер П.** Теория матриц: Пер. с англ. М.: Наука, 1982.
18. **Левин Б. Я.** Распределение корней целых функций. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
19. **Постников М. М.** Лекции по геометрии. Семестр 2. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979.
20. **Ходж В.** Методы алгебраической геометрии / В. Ходж, Д. Пидо. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. Т. 1.
21. **Тихонов А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. М.: Наука, 1974.
22. **Иванов В. К.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. М.: Наука, 1978.
23. **Лаврентьев М. М.** Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский. М.: Наука, 1980.
24. **Тихонов А. Н.** Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. М.: Наука, 1990.
25. **Лаврентьев М. М.** Одномерные обратные задачи математической физики / М. М. Лаврентьев, К. Х. Резницкая, В. Г. Яхно. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1982.

Поступила в редакцию 13/I 2014 г.,
в окончательном варианте — 16/I 2015 г.