УДК 532.542:536.73

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ СОГЛАСОВАННОСТЬ КАК МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В УЗЛАХ КАНАЛОВ

Ю. А. Дубравин

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993 Москва, Россия
E-mail: dubravin_yu@mail.ru

Газодинамические законы сохранения в интегральной форме для участков каналов, где имеют место излом оси, скачок площади поперечного сечения, разветвление канала, представляют собой незамкнутую систему уравнений. Проблема незамкнутости решается методом, основанным на независимости термодинамической функции (коэффициента восстановления давления) от указанных геометрических аргументов. Математическая модель сводится к замкнутой системе нелинейных алгебраических уравнений, не требующих использования дополнительных гипотез и допускающих решение в явном виде при малых значениях числа Маха.

Ключевые слова: газодинамика, узлы каналов, второй закон термодинамики, сильные разрывы, проблема незамкнутости.

DOI: 10.15372/PMTF20210602

1. В окрестности узла трех каналов (рис. 1) выделяется некоторый объем сечениями каналов S_1, S_2, S_3, для которых параметры потока можно считать постоянными (за пределами зоны возможного отрыва потока). Данное допущение предполагает использование моделей идеального газа или развитых турбулентных течений вязкого газа. Для описания последних в соответствии с трактовкой Рейнольдса используются осредненные значения параметров состояния среды, а молекулярный и молярный переносы далее рассматриваются как внешние (задаваемые) воздействия на поток в узле. Параметры состояния газа в одном из сечений на входе в узел полагаются известными (отмечены индексом 1), в двух других сечениях — искомыми (индексы 2, 3).

Аналогичные задачи рассматривались в ряде работ. В [1, 2] неизвестное давление на скачке площади p_σ в условиях адиабатического дозвукового течения идеального газа варьировалось в диапазоне от значения давления, соответствующего вакууму, до значения давления торможения. Произвольный выбор значения давления на скачке площади противоречит законам сохранения, а также, согласно [3], второму закону термодинамики. В цикле работ, представленных в [4], векторное уравнение движения заменяется его скалярным следствием, что исключает возможность корректного определения сил, возникающих при изломе оси канала и (или) на скачке площади. В работе [5] в соответствии с результатами численного решения стационарных уравнений Навье — Стокса в узле разветвления давление p_σ и гидравлические потери аппроксимируются степенными полиномами, зависящими только от геометрических характеристик узла. На основе данных аппроксимаций

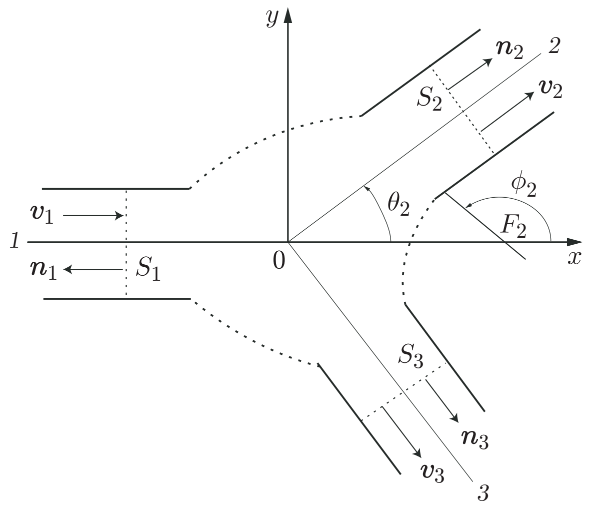

Рис. 1. Схема узла разветвления потока газа:
1 — сечение, в котором параметры состояния газа полагаются известными, *2, 3* — сечения, в которых параметры состояния газа полагаются искомыми

с использованием одномерной модели потока на границах узла исследуются колебания потока в этом узле. Величина p_σ определяется в “некоторой точке прямого канала” узла в отсутствие сформулированных критериев выбора ее местоположения, что ограничивает область применения результатов работы в пределах допустимых вариаций существенных критериев подобия.

2. Законы сохранения в интегральной форме записываются для двух трубок тока, каждая из которых занимает долю $-d_i$ $(d_2 + d_3 = 1)$ начального сечения узла S_1 и заканчивается в выходном сечении S_i “своего” канала. В каждой трубке тока поток пересекает общую зону, где он перестраивается с некоторым средним давлением p_σ, поворачивает на угол θ_i, при этом площадь поперечного сечения изменяется от начального значения d_iS_1 до значения S_i. Углы θ_i отсчитываются от первоначального направления вдоль оси канала 1 до направления вдоль оси i-го канала, каждый в своей плоскости $1{-}0{-}i$. На рис. 1 оси трубки тока 1–0–2 лежат в плоскости (x, y) декартовой системы координат; плоскость осей другой трубки тока повернута на угол χ вокруг оси x. (На рис. 1 плоскости обеих трубок тока условно помещены в общую плоскость.) Предполагается также, что линейные размеры зоны перестройки потока в каждой трубке тока малы по сравнению с размерами внешних участков соответствующих потоков, что позволяет считать такой участок сильным разрывом или полагать течение стационарным, а массовые эффекты незначительными. В результате система законов сохранения для каждой трубки тока принимает вид [6]

$$\int\limits_{\Sigma_i} \rho v_n \, dS = 0, \qquad \int\limits_{\Sigma_i} \rho v_n \boldsymbol{v} \, dS = -\int\limits_{\Sigma_i} p\boldsymbol{n} \, dS + \int\limits_{\Sigma_i} \boldsymbol{\tau}_n \, dS, \quad i = 2, 3,$$
$$\int\limits_{\Sigma_i} \rho v_n (v^2/2 + u) \, dS = -\int\limits_{\Sigma_i} p v_n \, dS + \int\limits_{\Sigma_i} (-q_n + \boldsymbol{\tau}_n \cdot \boldsymbol{v}) \, dS, \tag{2.1}$$

где ρ, p, v, u — плотность, давление, скорость, внутренняя энергия; $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{\tau}_n$ — векторы плотности теплового потока и напряжения (включая молекулярную и турбулентную составляющие); $\Sigma_i = d_iS_1 + S_i + \sigma_i$; σ_i — площадь боковой поверхности i-й трубки тока.

Осредняя параметры состояния на характерных участках поверхности узла, введем граничные условия $v_n(S_1) = -v_1$, $v_n(S_i) = v_i$, $v_n(\sigma_i) = 0$, записанные с использованием средних по расходу скоростей, и выполним разделение сил давления на боковой поверхности трубки тока σ_i на две составляющие:

$$\int\limits_{\Sigma_i} p\boldsymbol{n}\,dS = d_i(Sp\boldsymbol{n})_1 + (Sp\boldsymbol{n})_i + \int\limits_{\sigma_i} p\boldsymbol{n}\,dS = d_i(Sp\boldsymbol{n})_1 + (Sp\boldsymbol{n})_i - p_{\sigma i}(S_i - d_iS_1)\boldsymbol{n}_i - \boldsymbol{F}_i.$$

Систему уравнений (2.1) можно записать в виде

$$(S\rho v)_i = d_i(S\rho v)_1; \tag{2.2}$$

$$(S\rho vH)_i - d_i(S\rho vH)_1 + \int\limits_{\Sigma_i}(q_n - \boldsymbol{\tau}_n\cdot\boldsymbol{v})\,dS = 0; \tag{2.3}$$

$$S_i(\alpha\rho v\boldsymbol{v} + p\boldsymbol{n})_i + d_iS_1(-\alpha\rho v\boldsymbol{v} + p\boldsymbol{n})_1 - p_{\sigma i}(S_i - d_iS_1)\boldsymbol{n}_i - \boldsymbol{F}_i - \int\limits_{\Sigma_i}\boldsymbol{\tau}_n\,dS = 0, \qquad i = 2, 3. \tag{2.4}$$

Здесь $H = \beta v^2/2 + p/\rho + u$; α, β — коэффициенты неравномерности поля скоростей в характерных сечениях потока; $\boldsymbol{F}_i$ — сила реакции стенок соответствующей ветви канала, обеспечивающая поворот потока на угол θ_i. Сила, связанная с давлением $p_{\sigma i}$, обусловлена разностью площадей поперечных сечений i-й трубки тока на границах узла и в общем случае зависит от конструкции узла разветвления потока. С некоторой долей условности, не влияющей на конечный результат, силы трения можно представить в виде суммы сил трения на участках боковой поверхности трубки тока до и после поворота: $\sigma_i = \sigma_{ix} + \sigma_{in}$. Тогда

$$\int\limits_{\Sigma_i}\boldsymbol{\tau}_n\,dS = d_iG_1v_1(-\Delta_{\tau ix}\boldsymbol{i} - \Delta_{\tau in}\boldsymbol{n}_i),$$

$$\Delta_{\tau ix} = \frac{1}{d_iG_1v_1}\int\limits_{d_iS_1+\sigma_{ix}}|\boldsymbol{\tau}_n|\,dS, \qquad \Delta_{\tau in} = \frac{1}{d_iG_1v_1}\int\limits_{\sigma_{in}+S_i}|\boldsymbol{\tau}_n|\,dS, \qquad G_1 = (S\rho v)_1.$$

Уравнения движения (2.4) принимают вид

$$J_i\cos\theta_i - F_i\cos\phi_i - d_iJ_1 = 0, \quad i = 2, 3; \tag{2.5}$$

$$J_2\sin\theta_2 - F_2\sin\phi_2 = 0; \tag{2.6}$$

$$(J_3\sin\theta_3 - F_3\sin\phi_3)\cos\chi = 0; \tag{2.7}$$

$$(J_3\sin\theta_3 - F_3\sin\phi_3)\sin\chi = 0, \tag{2.8}$$

где

$$J_i = (\alpha S\rho v^2 + Sp)_i - p_{\sigma i}(S_i - d_iS_1) + d_iG_1v_1\Delta_{\tau in},$$
$$d_iJ_1 = d_i(\alpha S\rho v^2 + Sp)_1 - d_i(Gv)_1\Delta_{\tau ix}.$$

Исключая F_i, уравнения движения можно записать в виде

$$A_iJ_i - d_iJ_1 = 0, \quad i = 2, 3, \qquad A_i = \sin(\phi_i - \theta_i)/\sin\phi_i.$$

Далее для каждой трубки тока с помощью весового коэффициента φ_{pi} среднее значение давления $p_{\sigma i}$ располагается между значениями давления на границах $p_{\sigma i} = \varphi_{pi} p_i + (1 - \varphi_{pi}) p_1$. В результате уравнение движения для каждой трубки тока принимает вид

$$\begin{gathered} A_i(\alpha S\rho v^2)_i + A_i(pS_\sigma)_i - d_i(\alpha S\rho v^2)_1 - A_i p_1 S_{\sigma i} + \\ + d_i(Gv)_1(\Delta_{\tau ix} + A_i\Delta_{\tau in}) + (pS)_1 d_i(A_i - 1) = 0, \qquad i = 2,3; \qquad (2.9) \\ S_{\sigma i} = S_i(1 - \varphi_{pi}\Delta_{si}), \qquad \Delta_{si} = (S_i - d_i S_1)/S_i. \end{gathered}$$

Полученная математическая модель узла включает законы сохранения массы и энергии для обеих трубок тока (2.2), (2.3); уравнения движения (2.6), (2.7), (2.9); уравнения состояния совершенного газа $p = \rho RT$, $u = p/[\rho(\gamma - 1)]$; условия сопряжения двух потоков в виде равенства средних давлений на боковых поверхностях соприкасающихся трубок тока в зоне разделения потока $p_{\sigma 2} = p_{\sigma 3}$; условие $\Sigma d_i = 1$. Для каждой трубки тока в модели неизвестными являются параметры состояния в выходном сечении ρ_i, p_i, v_i; давление $p_{\sigma i}$ или коэффициент φ_{pi}; реакция стенки F_i и угол ϕ_i или величина A_i; доля d_i и имеется четыре уравнения для их определения.

Как и в работах [7, 8], уравнения движения (2.9) наряду с остальными законами сохранения и уравнениями состояния позволяют установить связи между параметрами состояния на границах зоны перестройки потока для каждой трубки тока:

$$\frac{v_i}{v_1} = \frac{K_i \pm \nu N_i}{(n_i + 1)\,\mathrm{M}_1^2}; \qquad (2.10)$$

$$\frac{\rho_i}{\rho_1} = \frac{(1 - \Delta_{si})(n_i + 1)\,\mathrm{M}_1^2}{K_i \pm \nu N_i} \qquad (2.11)$$

$$\frac{p_i}{p_1} = \frac{K_i \mp \nu n_i N_i}{I_i(n_i + 1)}; \qquad (2.12)$$

$$\frac{T_i}{T_1} = \frac{(K_i \mp \nu n_i N_i)(K_i \pm \nu N_i)}{I_i(1 - \Delta_{si})(n_i + 1)^2\,\mathrm{M}_1^2}; \qquad (2.13)$$

$$\mathrm{M}_i^2 = (1 - \Delta_{si}) I_i \,\frac{K_i \pm \nu N_i}{K_i \mp \nu n_i N_i}; \qquad (2.14)$$

$$\frac{p_{\sigma i}}{p_1} = 1 + \varphi_{pi}\Big(\frac{p_i}{p_1} - 1\Big). \qquad (2.15)$$

Здесь

$$\mathrm{M} = \frac{v}{a}, \qquad a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}, \qquad \nu = \mathrm{sign}\,(\mathrm{M}_1 - 1), \qquad \alpha_i = \beta_i = 1, \quad i = 2,3,$$

$$n_i = \frac{\gamma}{1 + (\gamma - 1)\varphi_{pi}\Delta_{si}}, \qquad I_i = \frac{n_i - 1}{(\gamma - 1)(1 - \Delta_{si})},$$

$$K_i = I_i + \frac{n_i\,\mathrm{M}_1^2(\alpha_1 - \Delta_{\tau i})}{A_i} - \frac{n_i(A_i - 1)}{\gamma A_i}, \qquad (2.16)$$

$$N_i = \Big[K_i^2 - 2\,\frac{n_i^2 - 1}{\gamma - 1}\;\mathrm{M}_1^2\,\Big(1 + \beta_1\,\frac{\gamma - 1}{2}\;\mathrm{M}_1^2 + (\gamma - 1)\Delta_{qi}\Big)\Big]^{1/2},$$

$$\Delta_{\tau i} = \Delta_{\tau ix} + A_i\Delta_{\tau in}, \qquad \Delta_{qi} = -\frac{1}{d_i(Ga^2)_1}\int\limits_{\Sigma_i}(q_n - \boldsymbol{\tau}_n\cdot\boldsymbol{v})\,dS, \qquad \Delta_{si} = 1 - \frac{d_i S_1}{S_i}.$$

При отсутствии каких-либо воздействий ($\Delta_{si} = \Delta_{\tau i} = \Delta_{qi} = 0$, $\theta_i = 0$ $(A_i = 1)$) выбор верхнего знака в соотношениях (2.10)–(2.14) соответствует непрерывным течениям, нижнего — приводит к соотношениям Рэнкина — Гюгонио на прямом скачке уплотнения; функция ν определяет реакцию потока на воздействия в области до- и сверхзвуковых течений.

При наличии воздействий соотношения между параметрами состояния на границах узла имеют вид

$$\psi_i/\psi_1 = \Lambda_i[X_i, \Delta_{si}, A_i(\theta_i), \varphi_{pi}(X_i, \Delta_{si}, A_i)] \qquad (2.17)$$

и допускают множество решений в силу неопределенности величин и неизвестной зависимости A_i, φ_{pi} от аргументов. Среди аргументов различаются геометрические (Δ_{si}, A_i) и физические ($X_i = \{x_{ij}\} = \{\Delta_{\tau i}, \Delta_{qi}\}$), последние ниже рассматриваются как внешние (задаваемые) параметры.

3. Для выбора единственного решения из множества решений, допускаемых законами сохранения, используется метод [7, 8], основанный на предположении, что термодинамическая функция (коэффициент восстановления давления) $\Phi_i = p_{0i}/p_{01}$ не зависит от геометрических воздействий (p_0 — давление торможения) как независимых аргументов этой функции. Подобная зависимость может проявляться лишь неявно ($\Phi_i = f_{0i}(X_i)$). При интегральном подходе данное утверждение имеет качественный характер и следует из первого и второго начал термодинамики. В то же время законы сохранения в виде (2.10)–(2.14) позволяют построить функции, подобные коэффициентам восстановления давления:

$$f_i = \frac{p_{0i}}{p_{01}} = \frac{p_{0i}}{p_i}\,\frac{p_i}{p_1}\,\frac{p_1}{p_{01}} = \pi(\mathrm{M}_1)\,\frac{K_i \mp \nu n_i N_i}{(n_i+1)I_i}\Big(1 + \frac{n_i-1}{2}\,\frac{K_i \pm \nu N_i}{K_i \mp \nu n_i N_i}\Big)^{\gamma/(\gamma-1)} \qquad (3.1)$$

($\pi(\mathrm{M}_1) = (1 + (\gamma-1)\,\mathrm{M}_1^2/2)^{-\gamma/(\gamma-1)}$) и согласно (2.17) имеющие вид

$$f_i = f_i[X_i, \Delta_{si}, A_i(\theta_i), \varphi_{pi}(X_i, \Delta_{si}, A_i)].$$

Противоречие между двумя подходами, разрешаемое в пользу выводов термодинамики [7, 8], устраняется с помощью двух равнозначных способов (“дифференциального” и “алгебраического” соответственно) или их комбинацией:

$$df_i - df_{0i} = 0, \qquad f_i - f_{0i} = 0, \qquad i = 2, 3. \qquad (3.2)$$

Заменяя полные дифференциалы суммой частных дифференциалов, первое из условий (3.2) с учетом $\partial f_{0i}/\partial\Delta_{Si} = \partial f_{0i}/\partial\theta_i = 0$ приведем к виду

$$\Big[\frac{\partial f_{0i}}{\partial x_{ij}} - \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_{ij}} + \frac{\partial f_i}{\partial\varphi_{pi}}\,\frac{\partial\varphi_{pi}}{\partial x_{ij}}\Big)\Big]\,dx_{ij} + \Big[-\Big(\frac{\partial f_i}{\partial\Delta_{si}} + \frac{\partial f_i}{\partial\varphi_{pi}}\,\frac{\partial\varphi_{pi}}{\partial\Delta_{si}}\Big)\Big]\,d\Delta_{si} +$$
$$+ \Big[-\Big(\frac{\partial f_i}{\partial\theta_i} + \frac{\partial f_i}{\partial A_i}\,\frac{\partial A_i}{\partial\theta_i} + \frac{\partial f_i}{\partial\varphi_{pi}}\,\frac{\partial\varphi_{pi}}{\partial A_i}\,\frac{\partial A_i}{\partial\theta_i}\Big)\Big]\,d\theta_i = 0, \qquad i = 2, 3.$$

Отсюда вследствие независимости всех аргументов задачи следуют дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial A_i}{\partial\theta_i} = -\frac{\partial f_i}{\partial\theta_i}\Big(\frac{\partial f_i}{\partial A_i} + \frac{\partial f_i}{\partial\varphi_{pi}}\,\frac{\partial\varphi_{pi}}{\partial A_i}\Big)^{-1}, \qquad A_i\big|_{\theta_i=0} = 1; \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial\varphi_{pi}}{\partial\Delta_{si}} = -\frac{f_i}{\partial\Delta_{si}}\Big(\frac{\partial f_i}{\partial\varphi_{pi}}\Big)^{-1}, \qquad n_i\big|_{\Delta_{si}=0} = \gamma. \qquad (3.4)$$

При отсутствии явной зависимости функций f_i в (3.1) от аргумента θ_i уравнения (3.3) сводятся к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений $dA_i/d\theta_i = 0$, $A_i|_{\theta_i=0} = 1$ с частными интегралами

$$A_i = \frac{\sin(\phi_i - \theta_i)}{\sin\phi_i} = 1, \qquad \operatorname{tg}\phi_i = \frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i - 1}, \qquad \theta_i \in [0, \pi). \qquad (3.5)$$

Соотношения (3.5) определяют линии действия сил F_i и величины $A_i = 1$, вследствие чего в уравнениях (2.9) и в их следствиях (2.10)–(2.15), (3.1) в явном виде исчезает влияние угла разворота потока в трубках тока. Подобное влияние может иметь место при учете диссипативных потерь в трубках тока с использованием величин $\Delta_{\tau i}$. При этом уравнения (3.4) превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с переменными параметрами

$$\frac{d\varphi_{pi}}{d\Delta_{si}} = Y_i(\Delta_{si}, \varphi_{pi}, X_i), \qquad n_i\big|_{\Delta_{si}=0} = \gamma. \tag{3.6}$$

Решение уравнений (3.6) для случая одиночного канала в отсутствие излома оси исследовано в [7] и может быть заменено равноценным решением на основе "алгебраического" подхода, реализация которого сводится к ряду процедур. Устраняя в уравнении (3.1) влияние геометрических аргументов ($\Phi_i = f_{0i}(X_i) = f_i(X_i, \Delta_{si} = 0, A_i = 1)$), получаем значения коэффициентов восстановления давления в каждой трубке тока

$$\Phi_i = f_{0i}(X_i) = \pi(\mathrm{M}_1)\,\frac{K_{0i} \mp \nu\gamma N_{0i}}{\gamma+1}\Big(1 + \frac{\gamma-1}{2}\,\frac{K_{0i} \pm \nu N_{0i}}{K_{0i} \mp \nu\gamma N_{0i}}\Big)^{\gamma/(\gamma-1)}, \tag{3.7}$$

где

$$K_{0i} = 1 + \gamma\,\mathrm{M}_1^2(\alpha_1 - \Delta_{\tau i}), \qquad \Delta_{\tau i} = \Delta_{\tau ix} + \Delta_{\tau in} = \frac{1}{d_i G_1 v_1}\int\limits_{\Sigma_i} |\boldsymbol{\tau}_n|\, dS,$$

$$N_{0i} = \Big[K_{0i}^2 - 2(\gamma+1)\,\mathrm{M}_1^2\Big(1 + \beta_1\,\frac{\gamma-1}{2}\,\mathrm{M}_1^2 + (\gamma-1)\Delta_{qi}\Big)\Big]^{1/2}.$$

Из разности функций $f_i[X_i, \Delta_{si}, A_i = 1, \varphi_{pi}(X_i, \Delta_{si})] - f_{0i}(X_i) = 0$ можно определить функции $\varphi_{pi}[\Delta_{si}, X_i]$. При этом из условия равенства средних давлений на боковых поверхностях соприкасающихся трубок тока в зоне разделения потока $p_{\sigma 2} = p_{\sigma 3}$ и условия $\Sigma d_i = 1$ получаем систему уравнений для функций $\varphi_{pi}(\Delta_{si}, X_i)$, $d_i(\Delta_{si}, X_i)$:

$$f_i\big|_{A_i=1} - f_{i0}(X_i) = 0,$$

$$f_i\big|_{A_i=1} = \pi(\mathrm{M}_1)\Big(\frac{K_i \mp \nu n_i N_i}{I_i(n_i+1)}\Big)_{A_i=1}\Big(1 + \frac{n_i-1}{2}\,\frac{K_i \pm \nu N_i}{K_i \mp \nu n_i N_i}\Big)^{\gamma/(\gamma-1)}_{A_i=1}, \tag{3.8}$$

$$\varphi_{p2}\Big(\frac{K_2 \mp \nu n_2 N_2}{I_2(n_2+1)} - 1\Big)_{A_2=1} = \varphi_{p3}\Big(\frac{K_3 \mp \nu n_3 N_3}{I_3(n_3+1)} - 1\Big)_{A_3=1}, \qquad d_2 + d_3 = 1,$$

где

$$K_i\big|_{A_i=1} = I_i + n_i\,\mathrm{M}_1^2(\alpha_1 - \Delta_{\tau i}), \qquad \Delta_{si} = 1 - \frac{d_i}{s_i}, \qquad s_i = \frac{S_i}{S_1}, \qquad i = 2, 3,$$

$$N_i\big|_{A_i=1} = \Big[K_i^2\big|_{A_i=1} - 2\,\frac{n_i^2-1}{\gamma-1}\,\mathrm{M}_1^2\Big(1 + \beta_1\,\frac{\gamma-1}{2}\,\mathrm{M}_1^2 + \xi_i\Big)\Big]^{1/2}, \qquad \xi_i = (\gamma-1)\Delta_{qi}.$$

Численное решение системы уравнений (3.8) в окрестности $\Delta_{si} = 0$ связано с наличием особенностей в поведении функций φ_{pi} вида $0/0$. Для устранения этих особенностей в [7] применительно к каждой трубке тока используются соотношения

$$\varphi_{pi} = \begin{cases} 1/(1-(\gamma-1)\Delta_{si}), & |\Delta_{si}| \leqslant \varepsilon_\Delta, \quad \Psi_i \neq 0, \\ 1/(2-(\gamma-1)\Delta_{si}), & |\Delta_{si}| \leqslant \varepsilon_\Delta, \quad \Psi_i = 0, \quad |\,\mathrm{M}_1 - 1| > \varepsilon_{\mathrm{M}}, \\ 2/(3-2(\gamma-1)\Delta_{si}), & 0 \leqslant \Delta_{si} \leqslant \varepsilon_\Delta, \quad \Psi_i = 0, \quad |\,\mathrm{M}_1 - 1| \leqslant \varepsilon_{\mathrm{M}} \end{cases} \tag{3.9}$$

и анализируется функция $\Psi_i = K_{0i} \mp \nu\gamma N_{0i} - (\gamma + 1)$. Функция $\Psi_i = 0$, в случае если отношение давлений $p_i/p_1 = 1$ в результате комбинирования воздействий с противоположными знаками.

Силы, действующие на каждый из потоков на "скачке" площади поперечного сечения i-го потока и обеспечивающие поворот потока на угол θ_i, определяются соотношениями

$$P_{\sigma i} = p_{\sigma i}\Delta_{si}S_i,$$
$$\frac{F_i}{d_iG_1v_1} = \Big\{\frac{v_i}{v_1} + \frac{1}{\gamma\,\mathrm{M}_1^2}\,\frac{s_i}{d_i}\Big(\frac{p_i}{p_1} - \frac{p_{\sigma i}}{p_1}\,\Delta_{si}\Big) + \Delta_{\tau in}\Big\}\frac{\sin\theta_i}{\sin\phi_i}, \tag{3.10}$$

а их геометрическая сумма является главным вектором сил давления в узле.

4. В случае малых чисел Маха решение всей задачи можно представить в явном виде. Путем разложения всех функций в соотношениях (2.10)–(2.14), (3.1), (3.7), (3.8) в ряды по степеням чисел Маха и сохранения линейных составляющих относительно M_1^2 получаем

$$K_i = I_i\Big\{1 - \frac{n_i}{\gamma I_i}\Big[\frac{A_i - 1}{A_i} - \frac{\gamma\,\mathrm{M}_1^2(\alpha_1 - \Delta_{\tau i})}{A_i}\Big]\Big\},$$
$$N_i = K_i - \frac{A_i(n+1)(1-\Delta_{si})\,\mathrm{M}_1^2(1+\xi_i)}{A_i - n_i(A_i-1)/(\gamma I_i)},$$
$$f_i = \pi(\mathrm{M}_1)\Big\{1 + \frac{n_i}{\gamma I_i}\Big[\Big(\frac{\alpha_1 - \Delta_{\tau i}}{A_i} - \frac{A_i(1-\Delta_{si})(1+\xi_i)}{A_i - n_i(A_i-1)/(\gamma I_i)}\Big)\gamma\,\mathrm{M}_1^2 - \frac{A_i - 1}{A_i}\Big] + {}$$
$$+ \frac{A_i(1-\Delta_{si})^2(1+\xi_i)}{A_i - n_i(A_i-1)/(\gamma I_i)}\,\frac{\gamma\,\mathrm{M}_1^2}{2}\Big\}, \qquad i = 2, 3. \tag{4.1}$$

Из (4.1) вследствие зависимости $\Phi_i = f_{0i}(X_i)$, реализуемой при $\Delta_{si} = 0$, $\theta_i = 0$ ($n_i = \gamma$, $A_i = 1$), или из (3.7) после разложения в ряды следуют соотношения

$$\Phi_i = f_{0i}(X_i) = \frac{2\,\mathrm{Eu}_1 + 1 + 2\delta_i - \xi_i}{2\,\mathrm{Eu}_1 + 1}, \qquad \delta_i = \alpha_1 - 1 - \Delta_{\tau i}, \qquad \mathrm{Eu}_1 = \Big(\frac{p}{\rho v^2}\Big)_1, \tag{4.2}$$

где Eu — число Эйлера.

Разность функций (4.1), (4.2), равную нулю и содержащую комбинацию частных интегралов для величин A_i и φ_{pi} в дифференциальных условиях (3.3), (3.4), представим в виде

$$\frac{A_i - 1}{A_i} = \gamma\,\mathrm{M}_1^2\Big[\Big(\frac{1}{A_i} - \frac{\gamma I_i}{n_i}\Big)(\alpha_1 - \Delta_{\tau i}) - \Big(\frac{A_i(1-\Delta_{si})}{A_i - n_i(A_i-1)/(\gamma I_i)} - \frac{\gamma I_i}{n_i}\Big)(1+\xi_i) + {}$$
$$+ \frac{\gamma I_i}{n_i}\Big(\frac{A_i(1-\Delta_{si})}{A_i - n_i(A_i-1)/(\gamma I_i)} - 1\Big)\frac{1+\xi_i}{2}\Big].$$

Из этого выражения в силу независимости и произвольности значений переменных Δ_{si} и θ_i следует равенство нулю обеих его частей. Получаем соотношения

$$\varphi_{pi} = \frac{\Delta_{si}(1+\xi_i) + 2\delta_i - 2\xi_i}{\Delta_{si}(2-\Delta_{si})(1+\xi_i) + 2\delta_i - 2\xi_i}, \qquad A_i = 1 = \frac{\sin(\phi_i - \theta_i)}{\sin\phi_i}. \tag{4.3}$$

С учетом (4.3) соотношения (2.10)–(2.15) принимают вид

$$v_i/v_1 = (1-\Delta_{si})(1+\xi_i); \tag{4.4}$$

$$\rho_i/\rho_1 = (1+\xi_i)^{-1}, \qquad i = 2, 3; \tag{4.5}$$

$$p_i/p_1 = 1 + [\Delta_{si}(2-\Delta_{si})(1+\xi_i) + 2\delta_i - 2\xi_i]/(2\,\mathrm{Eu}_1); \tag{4.6}$$

$$p_{\sigma i}/p_1 = 1 + [\Delta_{si}(1+\xi_i) + 2\delta_i - 2\xi_i]/(2\,\mathrm{Eu}_1); \tag{4.7}$$

$$\mathrm{M}_i^2 = \frac{(v_i/v_1)^2(\rho_i/\rho_1)}{p_i/p_1}. \tag{4.8}$$

Соотношение (4.8) позволяет оценить воздействие на поток в рамках модели малосжимаемой среды.

В рассматриваемой модели силы трения $\Delta_{\tau i}$ могут быть связаны с диссипативными потерями в трубке тока: $\zeta_i = (p_{01} - p_{0i})/(\rho_1 v_1^2/2)$. В случае несжимаемой среды эта зависимость с учетом (4.2) имеет вид

$$\zeta_i = (1 + 2\,\mathrm{Eu}_1)(1 - f_{0i}) = -2\delta_i = -2(\alpha_1 - 1 - \Delta_{\tau i}),$$

что позволяет использовать методы и экспериментальные данные прикладной гидрогазодинамики [9–11] для расчета гидравлических потерь в узлах в пределах области дозвуковых течений [7, 12, 13].

Зависимости между параметрами состояния среды на границах зоны перестройки потока (4.4)–(4.8) используются в качестве рабочих формул после определения доли d_i сечения S_1, занятой трубкой тока, и величины $\Delta_{si} = 1 - d_i/s_i$ из условий $p_{\sigma 2} = p_{\sigma 3}$, $d_2 + d_3 = 1$:

$$d_2 = (s_{2q}/s_{+q})[1 + s_{3q}(\zeta_3 - \zeta_2 + \xi_3 - \xi_2)], \qquad d_3 = (s_{3q}/s_{+q})[1 - s_{2q}(\zeta_3 - \zeta_2 + \xi_3 - \xi_2)],$$

где $s_+ = s_2 + s_3$; $s_{+q} = s_{2q} + s_{3q}$; $s_{iq} = s_i/(1 + \xi_i)$; $\xi_i = (\gamma - 1)\Delta_{qi}$.

Для идеальной жидкости в адиабатическом процессе ($\zeta_i = \xi_i = 0$) доли расхода в каждую ветвь узла определяются только размерами поперечных сечений каналов ($d_i = s_i/s_+$) с одинаковыми параметрами на выходе.

5. Рассмотренная задача обобщается на случай разветвления потока из канала 1 на произвольное число ветвей $i \in [2, n]$. Для малосжимаемой среды соотношения (3.10), (4.2)–(4.8) дополняются уравнениями

$$\begin{gathered} d_i = \frac{s_{iq}}{s_{+q}}\Big[1 + \sum_{j=2}^{n}(s_{jq}\zeta_j) + s_+ - s_{+q}(1 + \xi_i)\Big] - s_{iq}\zeta_i, \qquad s_{+q} = \sum_{i=2}^{n} s_{iq}, \\ \Delta_{si} = \frac{1}{(1 + \xi_i)s_+}\Big\{2(1 + \xi_i)s_{+q} + \zeta_i s_{+q} - \Big[1 + \sum_{j=2}^{n}(s_{jq}\zeta_j) + s_+\Big]\Big\}, \qquad s_+ = \sum_{i=2}^{n} s_i. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Для произвольных чисел Маха уравнения (2.10)–(2.15), (3.5), (3.7), (3.9), (3.10) выполняются для каждой трубки тока в узле, а порядок системы уравнений, подобной (3.8), увеличивается до величины $2(n-1)$. С использованием этой системы определяются функции $d_i[\Delta_{si}, \zeta_i(\theta_i, \Delta_{si}), \xi_i]$, $\varphi_{pi}[\Delta_{si}, \zeta_i(\theta_i, \Delta_{si}), \xi_i]$:

$$f_i\big|_{A_i=1} - f_{0i} = 0, \qquad p_{\sigma 2} = p_{\sigma 3} = \ldots = p_{\sigma n}, \qquad \sum_{i=2}^{n} d_i = 1. \tag{5.2}$$

6. В рассматриваемой модели параметры потока на выходе из узла определяются его конструкцией, параметрами на входе и величиной физических воздействий в пределах узла. При наличии дополнительных ограничений на свободные параметры накладываются дополнительные связи. Например, при $\Delta_{qi} = 0$, $\rho_i = \rho_1$ для обеспечения равенства давлений ($p_i/p_1 = \mathrm{idem}$) из (4.6), (5.1) следует связь $d_i^2/s_i^2 + \zeta_i = \mathrm{idem}$; для обеспечения равенства расходов ($d_i = \mathrm{idem}$) из (5.1) следует связь $s_i\Big[1 + \sum\limits_{j=2}^{n} s_j(\zeta_j - \zeta_i)\Big] = \mathrm{idem}$ и т. д.

В случае сжимаемой среды в качестве дополнительных ограничений рассматривается задача о переводе исходного потока в критическое состояние $\mathrm{M}_i = 1$ в i-й трубке тока. Тогда из (2.14) следует $(\gamma - n_i)K_i \mp \nu(\gamma n_i - 1)N_i = 0$ и соответствующее число уравнений дополняет систему уравнений (5.2), налагая ограничения на значения геометрических

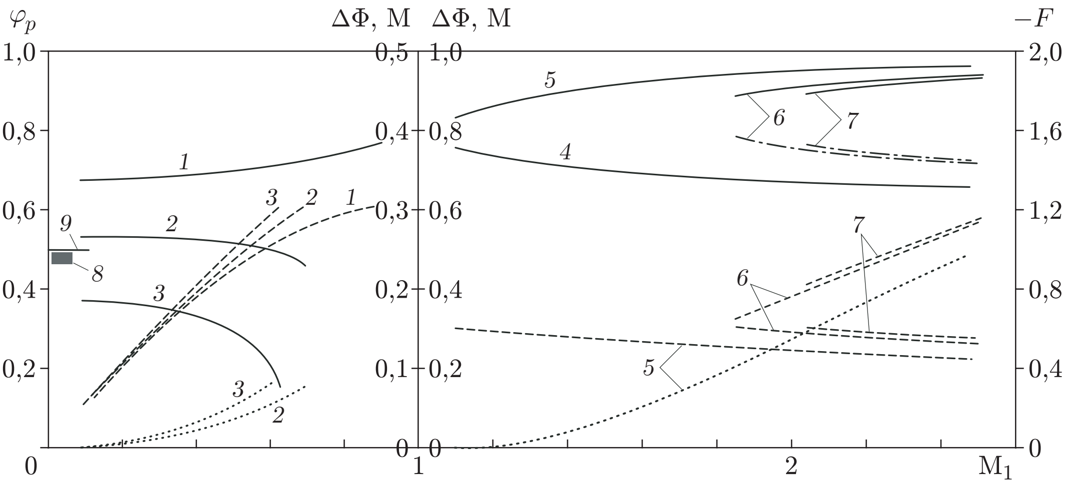

Рис. 2. Результаты расчетов расширяющихся до- и сверхзвуковых течений в бинарных симметричных узлах ($\Delta_{si} = 0{,}5$, $a_i = 0{,}2$) при различных значениях параметров:

сплошные кривые — φ_p, штриховые — M, пунктирные — $\Delta\Phi = 1 - \Phi$, штрихпунктирные — $-F$; *1* — $\zeta_i = 0$, $\Delta_{qi} = 0$, $\theta_i = 0°$, *2* — $\zeta_i \neq 0$, $\Delta_{qi} = 0$, $\theta_i = 90°$, *3* — $\zeta_i \neq 0$, $\Delta_{qi} = 0{,}2$, $\theta_i = 90°$, *4* — $\zeta_i = 0$, $\Delta_{qi} = 0$, $\theta_i = 0°$, *5* — $\zeta_i = 0$, $\Delta_{qi} = 0$, $\theta_i = 0°$ при наличии скачка уплотнения, *6* — $\zeta_i \neq 0$, $\Delta_{qi} = 0$, $\theta_i = 90°$ при наличии скачка уплотнения, *7* — $\zeta_i \neq 0$, $\Delta_{qi} = 0{,}2$, $\theta_i = 90°$ при наличии скачка уплотнения; *8, 9* — данные работ [7, 13] для φ_p (*8* — эксперимент, *9* — расчет [7] ($\varphi_p = 1/2$))

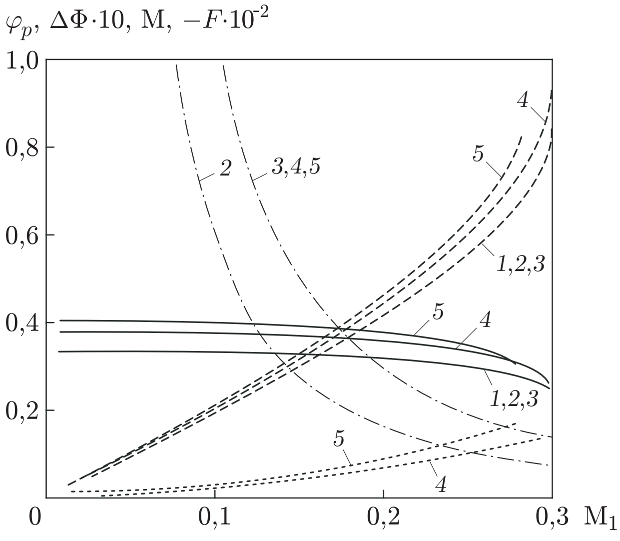

Рис. 3. Результаты расчетов сужающихся дозвуковых течений в бинарных симметричных узлах ($\Delta_{si} = -1{,}0$, $a_i = 0{,}2$) при различных значениях параметров:

сплошные линии — φ_p, штриховые — M, пунктирные — ΔΦ, штрихпунктирные — $-F$; *1* — $\zeta_i = 0$, $\Delta_{qi} = 0$, $\theta_i = 0°$, *2* — $\zeta_i = 0$, $\Delta_{qi} = 0$, $\theta_i = 45°$, *3* — $\zeta_i = 0$, $\Delta_{qi} = 0$, $\theta_i = 90°$, *4* — $\zeta_i \neq 0$, $\Delta_{qi} = 0$, $\theta_i = 90°$, *5* — $\zeta_i \neq 0$, $\Delta_{qi} = 0{,}2$, $\theta_i = 90°$

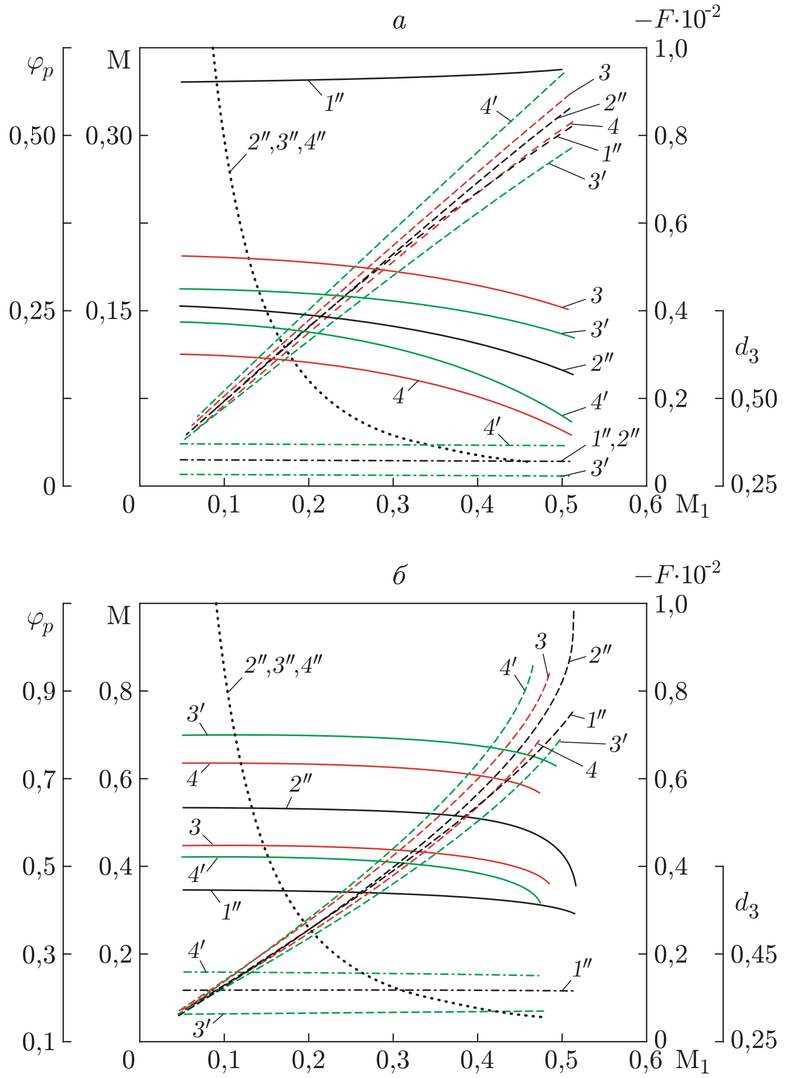

Рис. 4. Результаты расчетов для асимметричных конструкций и физических воздействий при различных значениях параметров:

а — $s_2 = 1{,}0$, $s_3 = 0{,}5$, $\Delta_{si} > 0$, $a_i = 0{,}1$, *б* — $s_2 = 0{,}5$, $s_3 = 0{,}3$, $\Delta_{si} < 0$, $a_i = 0{,}1$; *1*, *1′*, *1″* — $\zeta_i = 0$, $\Delta_{qi} = 0$, $\theta_i = 0^\circ$, *2*, *2′*, *2″* — $\zeta_i \neq 0$, $\Delta_{qi} = 0$, $\theta_i = 90^\circ$, *3*, *3′*, *3″* — $\zeta_i \neq 0$, $\Delta_{q2} = -0{,}1$, $\Delta_{q3} = 0{,}1$, $\theta_i = 90^\circ$, *4*, *4′*, *4″* — $\zeta_i \neq 0$, $\Delta_{q2} = 0{,}1$, $\Delta_{q3} = -0{,}1$, $\theta_i = 90^\circ$; сплошные линии — φ_p, штриховые — M, штрихпунктирные — d_3, пунктирные — F; *1–4* — трубка тока 2, *1′–4′* — трубка тока 3, *1″–4″* — случай совпадения трубок 2, 3 характеристик и величину физических воздействий в узле. В случае одиночного канала постоянного сечения ($d = 1$, $\Delta_s = 0$) из (3.9), (2.16) следует $\varphi_p = 1$, $n = \gamma$, $I = 1$, тогда $N = 0$. Отсюда находим величину теплового воздействия и соответствующее ей изменение коэффициента восстановления давления при наличии диссипативных потерь в канале:

$$\begin{gathered} \Delta_q = [(1/\mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_1)^2 - \gamma\zeta(1 + \gamma\,\mathrm{M}_1^2(1 - \zeta/4))]/[2(\gamma^2 - 1)], \\ f_0 = p_0/p_{01} = [((\gamma + 1)/2)^{1/(\gamma-1)}]\pi(\mathrm{M}_1)[1 + \mathrm{M}_1^2(1 - \zeta/2)]/2. \end{gathered} \qquad (6.1)$$

При $\zeta = 0$ соотношения (6.1) совпадают с известными решениями [10].

Используемые ниже параметры физических воздействий на поток не связаны с возможностью их технической реализации, а служат для качественной и количественной оценки их влияния на выходные параметры. В частности, для учета диссипативных потерь в области дозвуковых течений использовались соотношения [9, 11]

$$\zeta_i = k_i[1 + (d_i/s_i)^{2m} - 2(d_i/s_i)^m \cos\theta_i], \qquad k_i = a_i(5/8 + 0{,}5\sin^2(\theta_i/2)).$$

На рис. 2, 3 представлены результаты расчетов течений газа в бинарных симметричных узлах ($d_i = 0{,}5$, $\theta_2 = \theta_3$): на рис. 2 — в расширяющихся до- и сверхзвуковых течениях, на рис. 3 — в сужающихся дозвуковых течениях. (Согласно (2.10) все величины на рис. 2, 3 безразмерные.) На рис. 4 аналогичный анализ выполнен для случая асимметричных конструкций и физических воздействий (нумерация кривых соответствует варианту расчета). В рассмотренных на рис. 2–4 примерах значения давления $p_{\sigma i}$ не выходят за пределы интервала $p_1 \div p_i$, а равнодействующая сил в (3.10) в сопоставимых условиях совпадает с известными результатами.

Рассмотренный в работе метод, согласующий выводы термодинамики и законы сохранения в интегральной форме, позволяет замкнуть систему уравнений гидрогазодинамики в интегральной форме без использования каких-либо гипотез (дополнительные соотношения содержатся в комбинации законов сохранения). При этом дополнительные соотношения, замыкающие систему законов сохранения, обеспечивают единственность решения задачи. Учитывать диссипативные потери позволяет сопряжение данного метода и результатов эксперимента, при их отсутствии необходим целевой эксперимент (физический или численный).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Белов В. М.** Параметрическое исследование решений и построение алгоритмов и программ расчета некоторых обобщенных задач о распаде произвольного разрыва: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2006.
2. **Белов В. М.** Учет второго закона термодинамики в задании параметрической структуры решения задачи о распаде произвольного разрыва на скачке площади сечения // Аэродинамика. Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 1992. С. 38–44.
3. **Яушев И. К.** Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. № 8, вып. 2. С. 109–120.
4. **Дулов В. Г., Павлов С. В., Яушев И. К.** Обобщенная задача о распаде разрыва и ее приложения. Новосибирск, 1985. (Препр. / СО АН СССР. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 10-85).
5. **Зарипов Д. И.** Колебания потока в разветвленных каналах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань: Изд-во Каз. науч. центра РАН, 2014.
6. **Седов Л. И.** Механика сплошных сред. М.: Наука, 1983. Т. 1.

7. **Дубравин Ю. А.** О связи гидродинамических параметров в зонах локальных воздействий на поток // ПМТФ. 1989. № 3. С. 60–69.
8. **Дубравин Ю. А.** Условия в узле одномерных течений газа // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 98–109.
9. **Гинзбург И. П.** Прикладная гидрогазодинамика. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1958.
10. **Абрамович Г. Н.** Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1991.
11. **Остренко С. А.** Гидравлические и пневматические системы транспортировки и транспортно-технологических машин и оборудования / С. А. Остренко, В. В. Пермяков. Владивосток: Изд-во Владивосток. гос. ун-та экономики и сервиса, 2010.
12. **Ульянов И. Е.** Проектирование воздуховодов самолетных силовых установок / И. Е. Ульянов, Н. Н. Крумина, Н. В. Вакар. М.: Машиностроение, 1979.
13. **Беклемишев Н. Н.** Прикладная гидрогазодинамика внутренних течений. Специальные задачи / Н. Н. Беклемишев, Ю. А. Дубравин. М.: Изд-во Моск. авиац. ин-та, 2016.

Поступила в редакцию 22/V 2020 г.,
после доработки — 20/VII 2020 г.
Принята к публикации 31/VIII 2020 г.