УДК 532; 533

ИНЕРЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ СОСТОЯНИЯ ПОКОЯ

О. В. Воинов

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича, 625000 Тюмень
E-mail: o.v.voinov@mtu-net.ru

Рассматривается движение тела в идеальной несжимаемой жидкости при безвихревом обтекании в отсутствие внешних сил. Показано, что тело может двигаться по инерции из состояния покоя, если его форма удовлетворяет определенным условиям.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, безвихревое течение, движение тела в жидкости, инерция.

Введение. Первые исследования перемещения тел в жидкости под действием внутренних сил проведены при моделировании движения живых организмов в воде. Разработаны модели движения рыб, основанные на моделях движения тел при безвихревом течении невязкой жидкости. Одна из таких моделей движения тела в жидкости за счет конечных деформаций тела предложена в [1].

В работе [2] определены общие закономерности перемещения деформируемых тел в идеальной жидкости из состояния покоя. Возможность перемещения тела в идеальной жидкости, обусловленного деформациями тела и изменением расположения масс внутри него, установлена в [3]. Там же построены примеры перемещения пульсирующей сферы и эллипсоида с переменным эксцентриситетом, а также примеры перемещения тела за счет малых деформаций, задаваемых двумя параметрами.

Для описания перемещения деформирующегося тела в жидкости можно применять уравнения Лагранжа. С использованием этих уравнений изучены случаи осесимметричного и плоского обтеканий тел и найдены условия, ограничивающие возможность перемещения тела при произвольных заданных законах изменения формы тела и перемещения массы внутри него [4].

В работе [5] рассмотрена задача о движении в идеальной жидкости недеформируемого тела, имеющего переменные внутренние характеристики. Из известных решений следует, что перемещение тела в жидкости можно получить с помощью периодического изменения параметров, определяющих форму тела. При этом движение является неравномерным: поступательная скорость непостоянна и тело останавливается, если внутренние силы перестают действовать и прекращается деформирование (в случае деформирующегося тела). До сих пор в теории самодвижения тела в жидкости считалось, что на основе известных решений задачи о самодвижении тела равномерное движение получить невозможно [3]. Ниже показано, что тело, которое первоначально покоилось, может двигаться в идеальной жидкости равномерно в результате действия внутренних сил.

1. Форма тела, при которой возможно его инерциальное движение в жидкости из состояния покоя. Рассмотрим движение тела в безграничной идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Течение жидкости безвихревое, внешние силы отсутствуют. К этому случаю относится также движение в поле силы тяжести при нейтральной плавучести тела. В начальный момент тело находится в состоянии покоя.

Попытаемся определить форму тела, при которой возможно его инерционное движение из состояния покоя. Рассмотрим произвольные симметричные формы. Симметрия поверхности тела необходима для того, чтобы существовали решения уравнений динамики, соответствующие прямолинейному движению тела. Как известно, в случае осесимметричных или цилиндрических поверхностей тел решений поставленной задачи не существует, поэтому проанализируем случай трехмерного обтекания тела жидкостью.

Рассмотрим тело, поверхность S которого имеет ось симметрии N-го порядка. Это значит, что S совмещается с собой при повороте вокруг оси симметрии на угол $2\pi/N$, где $N = 2, 3, \ldots$. Примером тела с такой симметрией является корабельный винт, для которого число N равно числу лопастей. При $N = 2$ указанной симметрией обладает трехосный эллипсоид.

Исследуем симметричные движения тела, при которых ось симметрии тела совпадает с осью x. Очевидно, такие движения возможны в силу симметрии тела и безграничности жидкости. Будем рассматривать тело, у которого поверхность S не испытывает деформаций из-за наличия внешней твердой части (корпуса). Внутри тела находится другое твердое тело меньшего размера, которое симметрично относительно оси x и может вращаться вокруг нее. Центр масс тела неподвижен относительно поверхности S и расположен на оси x.

Тело и его положение в пространстве задают три обобщенные координаты: координата x_0 центра масс тела на оси x, угол φ поворота поверхности тела вокруг оси x и угол ψ поворота внутреннего тела вокруг оси x.

Движение твердого тела в идеальной жидкости при потенциальном обтекании описывается уравнениями Лагранжа второго рода [6]. Соответственно в отсутствие внешних сил уравнения движения рассматриваемой системы тело — жидкость определяются функцией Лагранжа, равной кинетической энергии T системы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Здесь $q_1 = x_0$; $q_2 = \varphi$; $q_3 = \psi$. Обобщенная сила $Q_1 = 0$, обобщенные силы Q_2 и Q_3 определяются моментом M внутренних сил относительно оси x, который действует на внутреннее тело:

$$Q_2 = -M, \qquad Q_3 = M.$$

Кинетическая энергия системы T зависит от трех скоростей:

$$T = T(u, \omega, \Omega), \qquad u = \dot{x}_0, \qquad \omega = \dot{\varphi}, \qquad \Omega = \dot{\psi}$$

(u — поступательная скорость тела; ω, Ω — угловые скорости корпуса тела и внутреннего тела соответственно). Кинетическая энергия системы T равна сумме кинетических энергий жидкости T_f и тела T_b:

$$T = T_f + T_b; \tag{2}$$

$$T_f = m_f u^2/2 + I_f \omega^2/2 + K\omega u; \tag{3}$$

$$T_b = m_b u^2/2 + I_0 \omega^2/2 + I_* \Omega^2/2. \tag{4}$$

Здесь коэффициенты кинетической энергии жидкости m_f, K, I_f зависят от формы и диаметра тела и пропорциональны плотности жидкости; коэффициент m_b — полная масса тела вместе с внутренним телом; I_0, I_* — моменты инерции твердого корпуса тела и внутреннего твердого тела соответственно. Коэффициенты квадратичных форм (3), (4) не зависят от координат и времени. Вследствие безграничности жидкости кинетическая энергия жидкости не зависит от поступательной координаты.

Рассмотрим нетривиальные формы трехмерных симметричных тел, для которых коэффициент K в выражении (3) отличен от нуля (например, когда тело имеет форму винта (см. п. **2**)). Отметим, что $K = 0$ в случае трехосного эллипсоида, который в данной работе не рассматривается.

Уравнения Лагранжа (1) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega} = -M; \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \Omega} = M. \tag{6}$$

С учетом того, что в начальный момент $t = 0$ тело неподвижно, начальные условия имеют вид

$$u = 0, \qquad \omega = \Omega = 0, \qquad t = 0. \tag{7}$$

Из (5)–(7) следуют интегралы задачи движения неоднородного тела в жидкости

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \omega} + \frac{\partial T}{\partial \Omega} = 0. \tag{8}$$

Соотношения (8) представляют собой законы сохранения импульса и момента импульса при движении системы из состояния покоя.

Из уравнений (2)–(4), (8) найдем поступательную скорость тела

$$u = KI_*\Omega/D, \qquad D = (m_f + m_b)(I_0 + I_f) - K^2. \tag{9}$$

Так как кинетическая энергия жидкости, определяемая выражением (3), неотрицательна: $T_f \geqslant 0$, то $m_f I_f \geqslant K^2$. Следовательно, $D > 0$.

Согласно (9) поступательная скорость u тела пропорциональна угловой скорости Ω вращения внутреннего твердого тела. Поэтому перемещение тела является линейной функцией угла поворота внутреннего твердого тела.

Из соотношений (2)–(4), (6), (7) найдем внутренний момент количества движения:

$$I_*\Omega = \int\limits_0^t M\,dt. \tag{10}$$

Предположим, что момент внутренних сил $M(t)$ отличен от нуля только на ограниченном интервале времени $0 < t < \tau$ и $M(t) = 0$ при $t > \tau$. При $t = \tau$ значение интеграла в правой части уравнения (10) можно считать произвольным (в данной работе это значение полагается отличным от нуля).

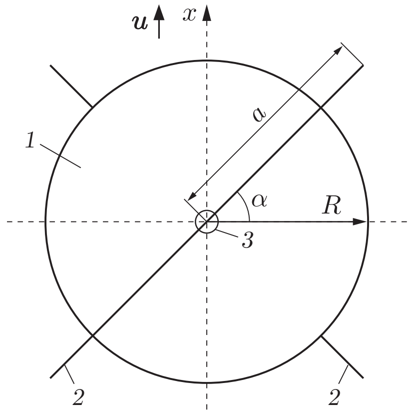
Из выражений (9), (10) найдем поступательную скорость

$$u = \mathrm{const} \neq 0, \qquad t \geqslant \tau. \tag{11}$$

Соотношение (11) означает, что тело движется равномерно вдоль оси x.

Таким образом, показано, что в результате действия внутренних сил на начальном интервале времени $(0, \tau)$ возможно равномерное движение тела в идеальной жидкости.

Итак, доказана теорема о форме тела, при которой возможно инерциальное движение тела из состояния покоя. Условия теоремы следующие: 1) поверхность тела имеет ось симметрии N-го порядка; 2) для случая движения тела вдоль этой оси выражение для кинетической энергии жидкости содержит ненулевой вклад произведения поступательной



Форма самодвижущегося тела в проекции на плоскость:
1 — сфера; *2* — диски; *3* — стержень

и угловой скоростей. Для реализации инерциального движения тела с указанной формой достаточно выполнения еще двух условий: 3) присутствие одного симметричного внутреннего тела на оси; 4) равномерное вращение этого твердого тела.

2. Пример формы трехмерного тела и расчет коэффициентов кинетической энергии. В качестве примера рассмотрим тело с осью симметрии второго порядка (N=2), состоящее из сферы и двух тонких круглых дисков. На рисунке представлена схема тела в проекции на плоскость, нормальную к дискам и содержащую ось симметрии. Обозначим радиус дисков через a, радиус сферы — через R. Сфера жестко соединена с дисками двумя твердыми стержнями, ортогональными оси x и лежащими в плоскостях дисков. Обозначим через α $(0 < \alpha < \pi/2)$ угол диска с плоскостью, ортогональной оси x.

Для того чтобы вычислить кинетическую энергию жидкости, введем следующие ограничения на геометрические параметры: диаметр стержней d мал ($d \ll R$, $d \ll a$); расстояние h от центра сферы до центра каждого диска велико ($h \gg R$, $h \gg a$). Как следует из результатов анализа гидродинамической задачи методом возмущений, при таких ограничениях учет гидродинамического взаимодействия сферы и дисков дает малые поправки к кинетической энергии порядка $(R/h)^3$ и $(a/h)^3$. В главном приближении по двум малым параметрам гидродинамическое взаимодействие несущественно.

Запишем выражение для кинетической энергии идеальной жидкости плотности ρ при движении одиночной сферы со скоростью u:

$$T_0 = (1/3)\pi\rho R^3 u^2. \tag{12}$$

При движении одиночного тонкого диска, являющегося частным случаем эллипсоида вращения, кинетическую энергию жидкости [7] можно представить в виде

$$T_1 = (4/3)\rho a^3 (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^2, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость центра диска; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, нормальный к плоскости диска. Вращение диска дает малый вклад в кинетическую энергию, пропорциональный $\rho a^5\omega^2$.

В главном приближении по малым параметрам R/h и a/h кинетическая энергия жидкости определяется формулой

$$T_f = T_0 + 2T_1. \tag{14}$$

Из (12)–(14) найдем коэффициент K в выражении (3) для T_f:

$$K = -(8/3)\rho a^3 h \sin 2\alpha. \tag{15}$$

Отсюда следует, что $K \neq 0$. Запишем также выражения для двух других коэффициентов:

$$m_f = (2/3)\pi\rho R^3 + (16/3)\rho a^3 \cos^2\alpha, \qquad I_f = (16/3)\rho a^3 h^2 \sin^2\alpha.$$

В формуле (15) учтена трехмерность потока, обусловленная тем, что ось симметрии каждого диска наклонена к оси симметрии всего тела.

Если момент внутренних сил создает внутри сферы момент импульса $I_*\Omega$, то сфера с двумя дисками будет поступательно перемещаться вдоль оси x со скоростью u, определяемой формулой (9). Одновременно это тело будет вращаться.

Отметим, что рассмотренная форма тела, включающая два диска и сферу, является аналогом формы корабельного винта. При этом диски соответствуют лопастям винта.

3. Инерциальное движение деформирующегося тела. Рассмотренная теория допускает, чтобы второе твердое тело было размещено не внутри корпуса тела, а снаружи. В этом случае все обозначения сохраняются. Взаимодействие первого тела со вторым определяется моментом внутренних сил. Формулы (2)–(11) остаются в силе, справедлива также доказанная выше теорема о форме инерциально движущегося тела. Рассматриваемое тело испытывает деформации, обусловленные вращением одного твердого тела относительно другого. Отметим, что если второе тело является осесимметричным, то в рамках модели динамики идеальной жидкости форма его поверхности остается неизменной.

4. Движение тела с вращающимся винтом из состояния покоя. Рассмотрим вопрос о возможности движения корабля с винтом из состояния покоя в идеальной жидкости. При этом условия работы винта будут необычными. Как известно, при безвихревом обтекании вращающийся винт не создает силы тяги. Будем считать, что корпус корабля имеет форму эллипсоида или любую другую форму, которая позволяет ему, не вращаясь, свободно перемещаться в жидкости вдоль оси винта. В корпусе корабля поместим внутреннее твердое тело, взаимодействующее с винтом. Результаты исследований, изложенные в п. **2**, можно использовать для решения данной задачи, если через I_0 обозначить момент инерции винта и вала, а через m_b — полную массу тела. Тогда доказанная выше теорема остается в силе. Следовательно, справедлив теоретический вывод о том, что в невязкой жидкости корабль может перемещаться за счет вращения винта, несмотря на отсутствие вихрей в жидкости.

Заключение. Таким образом, исследована динамика неоднородного тела в идеальной жидкости в случае безвихревого обтекания и в отсутствие внешних сил. Найдена форма тела, обеспечивающая возможность инерциального движения тела из состояния покоя, а именно доказана теорема о форме равномерно движущегося тела. Приведен пример формы тела, удовлетворяющей условиям теоремы, для этого тела вычислены коэффициенты кинетической энергии. Показано, что при отсутствии вихрей тело может перемещаться в идеальной жидкости за счет вращения винта.

Равномерное движение тела из состояния покоя возможно, если его поверхность имеет ось симметрии N-го порядка и в выражении (3) для кинетической энергии жидкости коэффициент K, стоящий перед произведением поступательной и угловой скоростей поверхности $u\omega$, отличен от нуля. В этом случае равномерное вращение внутреннего твердого тела приводит к инерциальному движению тела в жидкости.

Выявлены следующие новые особенности исследованного движения:

1. Движение тела из состояния покоя происходит равномерно, с поступательной скоростью, которая начиная с некоторого момента времени остается постоянной.

2. Движение тела продолжается по инерции после прекращения действия внутренних сил, вызвавших это движение.

3. Движение тела из состояния покоя происходит за счет изменения единственного параметра тела — угла поворота внутреннего твердого тела. В известных до сих пор

теориях для перемещения тела необходимо изменение не менее двух величин из числа координат, задающих форму, объем тела и расположение масс внутри тела.

Из полученного решения следует принципиальная возможность поступательного движения тела по инерции из состояния покоя за счет внутреннего вращения. В этом решении присутствует непосредственная связь внутреннего вращения и поступательного движения тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А.** Модель движения рыб, ужей // ПМТФ. 1973. № 2. С. 164–165.
2. **Kuznetsov V. M., Lugovtsov B. A., Sher Y. N.** On the motive mechanism of snakes and fish // Arch. Ration. Mech. Anal. 1967. V. 25, N 4. P. 367–387.
3. **Saffman P. G.** The self-propulsion of a deformable body in a perfect fluid // J. Fluid Mech. 1967. V. 28, N 2. P. 385–389.
4. **Воинов О. В., Петров А. Г.** О перемещении деформирующихся тел в идеальной жидкости из состояния покоя // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212, № 5. С. 1086–1088.
5. **Козлов В. В., Рамоданов С. М.** О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, № 4. С. 631–644.
6. **Thomson W.** Treatise on natural phylosophy / W. Thomson, P. Tait. Oxford: Clarendon Press, 1867.
7. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.

Поступила в редакцию 14/I 2008 г.