

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

В. М. Корнев, Н. Д. Мельникова

(Новосибирск)

Методами теории возмущений [1—4] получены верхние критические нагрузки неидеальных цилиндрических оболочек при поперечном и гидростатическом нагружении. Специально изучены вопросы аппроксимации, при определении числа и номеров степеней свободы используется информация о плотности спектра соответствующих линейных задач устойчивости [5—7]. Получена полоса разброса для верхней критической нагрузки. Численный эксперимент позволил рассчитать вероятностные характеристики процесса потери устойчивости.

Рассматривается нелинейная система уравнений теории оболочек, которая относительно функции напряжений F и нормального прогиба w описывает выпучивание идеальных тонкостенных цилиндрических оболочек при поперечном или гидростатическом нагружении (см., например, [4]). Согласно теории возмущений, функции w , F и параметр нагружения λ разлагаются в асимптотические ряды

$$(1) \quad \lambda = \lambda/\lambda_1 = 1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2 + \dots, \quad \varepsilon \ll 1,$$

где ε — малый параметр, характеризующий амплитуду выпученного состояния; λ_1 — первое собственное значение линейной задачи; a и b — коэффициенты, $a \equiv 0$, значения коэффициента b получены в работе [4].

Зная коэффициент b , можно рассчитать верхнюю критическую нагрузку λ_+ неидеальной конструкции [4] при одночленной аппроксимации

$$(2) \quad \left(1 - \frac{\lambda_+}{\lambda_1}\right)^{3/2} = \frac{3}{2} |f_1| V - b \frac{\lambda_+}{\lambda_1}.$$

Здесь $|f_1|$ — безразмерная амплитуда неправильности, когда неправильность совпадает с первой формой потери устойчивости.

Данная работа дополняет результаты работ [2—4] по устойчивости неидеальных цилиндрических оболочек: 1) изучен спектр в задачах устойчивости при разных способах закрепления торцов цилиндров [5, 8, 9]; 2) определено число и номера равноправных форм потери устойчивости для неоднородных линейных задач [6, 7]; 3) подобрана соответствующая одночленная аппроксимация для системы с несколькими степенями свободы.

Вопросы аппроксимации неидеальных систем с распределенными параметрами [6, 7] непосредственно связаны с характером спектра в окрестности наименьшего собственного значения λ_1 . В этой окрестности выражение для критических нагрузок $q(n, 1)$ упрощается

$$(3) \quad \tilde{q}(n, 1) = \frac{n^2}{12(1-\nu^2)} \frac{t}{R} + \frac{\pi^4 R^4}{L^4} \frac{R}{t}, \quad \left(\frac{\pi R}{n_* L}\right)^2 \ll 1,$$

$$\min q(n, 1) = q(n_*, 1), \quad n_*^2 \approx \pi [6(1-\nu^2)^{1/2}]^{1/2} (R/L) (R/t)^{1/2},$$

где L , R и t — длина, радиус и толщина цилиндрической оболочки; ν — коэффициент Пуассона. Очевидно, что число волн по окружной координате $n_* \gg 1$ для достаточно тонкостенных оболочек средней длины ($L/R =$

$= O(1)$). Следовательно, соседним формам с номерами $n_1, n_1 + 1, \dots, n_*, \dots, n_2$ соответствуют критические параметры $q(n_1, 1), \dots, q(n_*, 1), \dots, q(n_2, 1)$, которые мало отличаются, если $n_0 \ll n_*$, $n_0 = \max(n_* - n_1, n_2 - n_*)$. Введем обозначение

$$(4) \quad n = n_*(1 \pm \mu), \quad \mu = n_0/n_* \ll 1, \quad n_0 = \max(n_* - n_1, n_2 - n_*).$$

Если соотношение (4) подставить в выражение (3) и опустить второстепенные малые члены, то имеем $q(n, 1) = (1 + 1,5 \mu^2)q(n_*, 1)$. Приближенно число степеней свободы [6, 7], которые равноправны в асимптотических разложениях для неоднородных линейных задач выпучивания, когда все коэффициенты Фурье правых частей одного порядка малости, подсчитывается по формулам

$$(5) \quad l = 1 + 2\mu n_*, \quad \mu = \left(\frac{1 - \kappa_+ + 1 - \beta}{1,5 - \beta} \right)^{1/2}, \quad \kappa_+ = \frac{\lambda_+}{\lambda_1},$$

где β — коэффициент, характеризующий отношение амплитуды формы $(n_* \pm n_0, 1)$ к амплитуде формы $(n_*, 1)$ в неоднородной линейной задаче выпучивания. В расчетах этот коэффициент β принят равным 0,9.

При получении формулы (5) предполагалось, что неправильности, соответствующие формам выпучивания с номерами

$$(6) \quad n_1, n_1 + 1, \dots, n_2 \text{ при } n = 1; \quad n_1 \leq n_* \leq n_2, \quad l = 1 + n_2 - n_1,$$

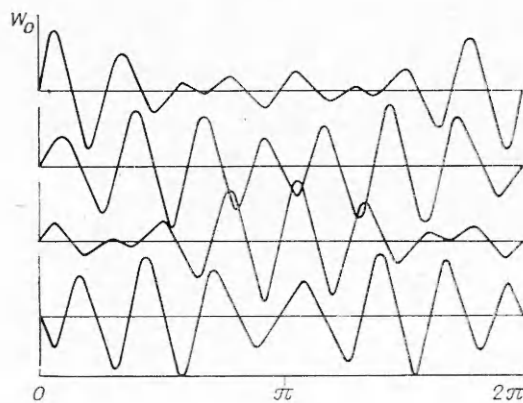
имеют один порядок малости. Так как $n_1 = O(n_*)$, $n_2 = O(n_*)$, $n_* = O[(R/t)^{1/4}]$, то данное предположение естественно: коэффициенты ряда Фурье с достаточно большими номерами от n_1 до n_2 соизмеримы. Отметим, что последнее предположение в других задачах не будет естественным (см., например, работу [6], где изучается неоднородная задача для уравнения Клейна — Гордона).

Итак, рассматриваются оболочки, начальный прогиб которых задается в виде тригонометрического многочлена

$$(7) \quad W_0 = t \sin \frac{\pi x}{L} \sum_{i=n_1}^{n_2} f_i \sin \frac{i(y + y_{i0})}{R}.$$

В отличие от работ [2—4] рассматривается не какая-то одна неправильность, совпадающая с первой формой потери устойчивости, а целый класс неправильностей W_0 , соответствующий равноправным формам потери устойчивости (6); осесимметричные неправильности исключаются из рассмотрения. Очевидно, что функции из класса (7) имеют характер биений по окружной координате ($n_* \gg 1$).

Далее рассматривается такой класс неправильностей (7), в котором $|f_i| = |f_{n_*}|$, $y_{i0} \equiv 0$, т. е. одна неправильность отличается от другой знаками коэффициентов отрезка ряда Фурье (фиг. 1). Каждая из функций W_0 в окрестности мак-



Ф и г. 1

$ f_i $	0,025			0,05			0,1		
	l	κ_1	κ_2	l	κ_1	κ_2	l	κ_1	κ_2
2	2	0,937	0,937	2	0,903	0,903	3	0,840	0,812
1	3	0,892	0,872	4	0,819	0,772	5	0,733	0,636
0,5	5	0,847	0,778	6	0,755	0,650	7	0,619	0,507

симального значения хорошо описывается функцией

$$(8) \quad W = t f_* \sin(\pi x/L) \sin n_*(y + y_*) R^{-1}, \quad f_* = \pm \max W_0.$$

В самом деле, перенося начало отсчета в точку, где функция W_0 максимальна, получим

$$(9) \quad W_0 = t |f_{n_*}| \sin \frac{\pi x}{L} \sum_{j=n_1-n_*}^{n_2-n_*} c_j \sin \left[\left(\frac{n_* z}{R} + \varphi_j \right) + j \frac{z}{R} \right], \quad |c_j| = 1,$$

где φ_j — начальная фаза синусоидальной величины. Если преобразовать синус под знаком суммы по формуле суммы углов, то для z , для которых $|jz/R| \ll 1$, преобразованное выражение (9) существенно упрощается. Принимая во внимание, что линейная комбинация нескольких синусоидальных величин $c_j \sin(n_* z/R + \varphi_j)$ с одной и той же частотой есть синусоидальная величина с той же частотой, имеем

$$(10) \quad W_0 = t \sin \frac{\pi x}{L} \left[f_* \sin \left(\frac{n_* z}{R} + \varphi \right) + A \right],$$

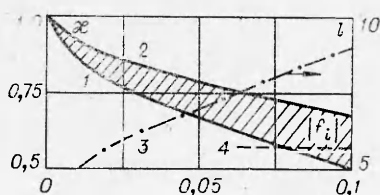
$$|A| \leq |f_{n_*}| \sum_{j=n_1-n_*}^{n_2-n_*} |j| \frac{z}{R} < 2n_0^2 \frac{z}{R} |f_{n_*}|.$$

Из соотношения (10) следует (8).

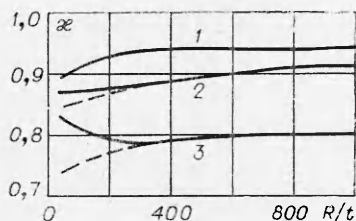
Переходя к расчету верхней критической нагрузки λ_+ , для систем со многими степенями свободы (6) получим оценки для этого параметра λ_+ снизу. В каждом конкретном случае начальная неустойчивость W_0 уже оценена (8). Поэтому можно воспользоваться формулой (2) для расчетов, но вместо безразмерной амплитуды $|f_1|$, соответствующей первой форме потери устойчивости, надо подставлять безразмерную амплитуду начальной неустойчивости W_0 , т. е. $|f_{n_*}|$. Предлагаемый подход обоснован в экспериментальных работах [10, 11]. В работе [11] отмечено, что «... выпучивание, вообще говоря, — весьма локализованное явление — не зависит от смежных областей оболочки, которые могут быть, а могут и не быть охвачены дальнейшими стадиями выпучивания».

В таблице для оболочки с $R/t = 300$ приведены результаты расчетов по определению числа степеней свободы l , безразмерного параметра κ_+ ($\kappa_+ = \lambda_+/\lambda_1$) в зависимости от безразмерных амплитуд $|f_i|$ и относительной длины оболочки L/R (см. (2), (5), (7)) (в таблице и далее значок у параметра κ_+ опущен, $\kappa_1 = \max \kappa_+$, $\kappa_2 = \min \kappa_+$). Из приведенных расчетов видно, что характер спектра существенным образом влияет на число степеней свободы l . При возрастании амплитуд начальных неустойчивостей $|f_i|$ и при уменьшении относительных длин оболочек L/R этот параметр возрастает, что приводит в конечном счете к появлению полосы разброса для верхних критических нагрузок

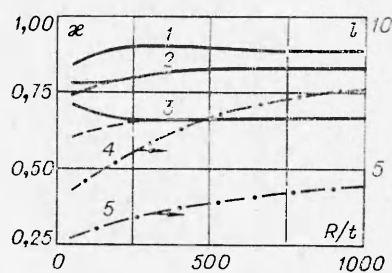
$$(11) \quad \kappa_2 \leq \kappa < \kappa_1.$$



Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4

Пока параметр нагружения меньше λ_2 , ни одна оболочка из рассматриваемой серии не теряет устойчивости, при достижении параметром нагружения значения λ_1 все оболочки рассматриваемой серии теряют устойчивость. Под серией оболочек понимаются та-

кие, у которых для расчетного числа свободы совпадают все абсолютные величины коэффициентов $|f_i|$ тригонометрического многочлена (7), отличие связано только с разными знаками. Практические расчеты показали, что минимальный параметр нагружения λ_2 почти совпадает с параметром нагружения, который получается при такой безразмерной амплитуде неправильностей

$$f_0 = l|f_i|.$$

Очевидно, что $f_0 \geq |f_*|$ (см. (8)).

В таблице имеется параметр $\lambda_2 = 0,507$ ($|f_i| = 0,1$, $L/R = 0,5$), который ниже нижней критической нагрузки для рассматриваемой задачи. Теория возмущений не описывает существенно нелинейные эффекты; решение нелинейной системы при использовании методов теории возмущений [1—4] раскладывается в ряд по малому параметру (см. (1)); норма решения не мала, когда верхняя критическая нагрузка приближается к нижней. Эти нелинейные эффекты можно описать, если использовать при решении нелинейных задач метод Бубнова — Галеркина [12], специально подбирая аппроксимацию.

На фиг. 2 приведена полоса разброса верхних критических нагрузок при изменении безразмерных амплитуд начальных неправильностей для оболочек с $R/t = 800$ и $L/R = 0,5$; кривые 1 и 2 соответствуют минимальным и максимальным значениям верхних критических нагрузок, кривая 3 — число степеней свободы при расчетах, линия 4 соответствует нижней критической нагрузке. Кривая 1 в правом нижнем углу фиг. 2 расположена ниже линии 4, так как теория возмущений не описывает существенно нелинейные эффекты. Вся полоса разброса «экспериментальных» результатов, приведенная на фиг. 2, расположена ниже кривой для верхней критической нагрузки, полученной в [4].

На фиг. 3, 4 приведены результаты расчетов по определению минимальных критических нагрузок (сплошные и штриховые кривые), на фиг. 4 даны штрихпунктирные кривые для числа степеней свободы l . Фиг. 3, 4 соответствуют величинам безразмерных амплитуд начальных неправильностей $|f_i| = 0,025$ и $0,05$, кривые 1—3 построены для оболочек с $L/R = 2$; 1; 0,5, причем сплошные кривые для параметра $-b_2 = \min(-b)$, а штри-

ховые — для параметра — $b_1 = \max(-b)$. На фиг. 4 кривые 4 и 5 соответствуют оболочкам с $L/R = 0,5$ и 1. Полученные расчетные кривые для критических нагрузок располагаются существенно ниже, чем аналогичные кривые из работы [4].

Выполненные расчеты позволяют построить вероятностные характеристики процесса потери устойчивости (см. (7), (11) и фиг. 2), получение вероятностных характеристик несколько отличается от способов, предлагаемых, например, в [13]. В результате численного эксперимента для каждой серии получен набор критических нагрузок

$$(12) \quad \kappa_2 \leq \kappa^1, \kappa^2, \dots, \kappa^i \leq \kappa_1,$$

где параметр i определяется числом степеней свободы l в рассматриваемом случае. Каждое событие считается равновероятным: в тригонометрическом многочлене (7) перебираются всевозможные сочетания знаков коэффициентов. Группируя соответствующим образом критические нагрузки (12), получаем вероятностные характеристики. На фиг. 5 приведены результаты вероятностных расчетов: кривая 1 соответствует оболочке с $R/t = 800$, $L/R = 0,5$, $|f_i| = 0,1$, $l = 9$; 2 — $R/t = 600$, $L/R = 0,5$, $|f_i| = 0,05$, $l = 7$; 3 — $R/t = 800$, $L/R = 1$, $|f_i| = 0,1$, $l = 5$. При параметре нагрузки, меньшем κ_2 , вероятность, что оболочка не потеряет устойчивость, равна единице, а при превышении κ_1 вероятность, что оболочка не потеряет устойчивость, равна нулю. Полоса разброса в приведенных примерах велика; как правило, в окрестности наименьшего параметра критической нагрузки κ_2 располагается незначительное число критических нагрузок (12) для каждой серии. Прямая 4, соответствующая нижней критической нагрузке, пересекает кривую 1 (теория возмущений не учитывает существенные нелинейности).

Построенные по численному эксперименту вероятностные характеристики процесса устойчивости желательно учитывать при натурных экспериментах. Если число степеней свободы l , которые надо принять во внимание при расчетах, велико, то нужен достаточно массовый натуральный эксперимент, чтобы с большой достоверностью давать практические рекомендации для расчетов.

Поступила 29 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. К вопросу об устойчивости пластинки. — ПММ, 1936, т. 3, вып. 1.
2. Койтер В. Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем. — Сб. пер. Механика, 1960, т. 63, № 5.
3. Хатчинсон Дж., Койтер В. Т. Теория послекритического поведения конструкций. — Сб. пер. Механика, 1971, т. 128, № 4.
4. Amazigo J. C., Budiansky V. Initial post-buckling behavior of cylindrical shells under external pressure. — J. Mathem. and Physics, 1968, vol. 47, N 3.
5. Бендич Н. Н., Корнев В. М. О плотности собственных значений в задачах устойчивости тонких упругих оболочек. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.

6. Корнев В. М. Об аппроксимации в задачах устойчивости и колебаний упругих оболочек при сгущении собственных значений.—«Изв. АН СССР. МТТ», 1972, № 2.
7. Корнев В. М. Особенности задач выпучивания тонкостенных оболочек.— В кн.: Динамика твердого тела. Вып. 25. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1976.
8. Корнев В. М. О структурных формулах при расчете цилиндрических оболочек на колебания и устойчивость.— ПМ, 1974, т. 10, вып. 4.
9. Корнев В. М. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, нагруженной внешним поперечным давлением, с учетом краевого эффекта.—«Инж. журн. МТТ», 1967, № 3.
10. Шкутин Л. И., Шубин И. А. Экспериментальное исследование устойчивости пологих конических оболочек при статическом нагружении давлением.— ПМ, 1966, т. 2, № 6.
11. Tenneyson R. C. Buckling modes of circular cylindrical shells under axial compression.—«AIAA J.», 1969, vol. 7, N 8. Рус. пер. «Ракетп. техника и космонавтика», 1969, № 8.
12. Ворович И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
13. Болотин В. В. Статические методы в строительной механике. Изд. 2-е. М., Стройиздат, 1965.

УДК 539.30 + 620.171.5

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ ПО МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПО МЕТОДУ ФОТОУПРУГОСТИ

Я. М. Ширяев

(Ленинград)

Концентрация напряжений вблизи вершины трещины, находящейся в поперечном поле простого растяжения, в рамках моментной теории упругости уже была объектом исследований [1—5]. Из работ [1—3] следует, что наличие моментных напряжений приводит к повышению концентрации напряжений вблизи вершины трещины. Этот результат «противоречит» снижающему эффекту моментных напряжений в известной задаче о концентрации напряжений вблизи кругового отверстия в растянутом поле. В работе [4] говорится, что наличие моментных напряжений не влияет на величину коэффициента интенсивности напряжений, в [5] рассматривается концентрация напряжений вблизи эллиптического отверстия, находящегося в поле простого растяжения. Из анализа результатов данной работы вытекает, что концентрация напряжений уменьшается с увеличением новой упругой постоянной материала l , введенной моментной теорией упругости.

Экспериментальные работы, в которых выявлялся бы эффект влияния моментных напряжений на концентрацию напряжений вблизи трещины, судя по литературе, пока отсутствуют.

Данная работа посвящена выявлению эффекта влияния моментных напряжений на концентрацию напряжений вблизи трещины как аналитически, так и экспериментально методом фотоупругости.

1. Рассматривается концентрация напряжений вблизи вершины трещины, находящейся в поперечном поле простого растяжения в системе координат (фиг. 1).

Для определения коэффициентов интенсивности напряжений по моментной теории упругости полезно ввести в рассмотрение сумму нормальных напряжений (инвариант), которая по классической и моментной тео-