структуры, приводит в соответствии с зависимостью (3.1) к снижению частоты пульсаций и вплоть до $n = 500$ практически не влияет на Re_L^0.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мёрч К.** Теория струйного генератора Гартмана // Механика: Сб. пер.— М., 1965.— № 2.
2. **Семилетенко Б. Г., Собколов Б. Н., Усков В. Н.** Приближенный расчет амплитудно-частотных характеристик неустойчивого взаимодействия сверхзвуковой струи с нормально расположенной плоской преградой // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1975.— № 13, вып. 3.
3. **Глазнев В. Н., Демин В. С.** Полуэмпирическая теория генерации дискретных тонов сверхзвуковой недорасширенной струей, натекающей на преграду // ПМТФ.— 1975.— № 6.
4. **Дулов В. Г.** Математическая модель колебательного цикла при нестационарном взаимодействии струи с преградой // ПМТФ.— 1978.— № 6.
5. **Набережнова Г. В., Нестеров Ю. Н.** Неустойчивое взаимодействие расширяющейся сверхзвуковой струи с преградой // Тр. ЦАГИ.— 1976.— Вып. 1765.
6. **Солотчин А. В.** О неустойчивости сверхзвуковой недорасширенной струи, натекающей на преграду // Газодинамика и акустика струйных течений.— Новосибирск: Наука, 1976.
7. **Соколов Е. И., Усков В. Н.** Взаимодействие сверхзвуковой осесимметричной струи с преградой и встречным сверхзвуковым потоком // Струйные и отрывные течения/ Под ред. Г. Г. Черного, А. И. Зубкова, М. М. Гилинского.— М.: Изд-во МГУ, 1986.
8. **Волчков В. В., Иванов А. В., Кисляков Н. И. и др.** Струи низкой плотности за звуковым соплом при больших перепадах давления // ПМТФ.— 1973.— № 2.
9. **Соколов Е. И., Шаталов И. В.** Параметры подобия течения при взаимодействии сверхзвуковой недорасширенной струи с перпендикулярной плоской преградой // Динамика неоднородных и сжимаемых сред.— Л.: Изд-во ЛГУ.— 1984.

г. Ленинград *Поступила 22/I 1990 г., в окончательном варианте — 12/VI 1990 г.*

УДК 532.517

С. Р. Богданов

ЗАМЫКАНИЕ УРАВНЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ КАК ПРОБЛЕМА АНАЛИТИЧЕСКИХ И СКЕЙЛИНГОВЫХ СВОЙСТВ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Предлагается спектральный метод замыкания уравнений развитой сдвиговой турбулентности, основанный на гипотезах о масштабной инвариантности длинноволновых пульсаций поля скорости и факторизации зависимостей спектральных функций от модуля волнового вектора k и его ориентации. Предполагается также, что свойством аналитичности по аргументу k обладают не отдельные компоненты спектральных тензоров, а универсальные скалярные функции, возникающие при параметризации. Показано, что в рамках этих допущений структура турбулентности локально описывается лишь небольшим числом определяющих (секулярных) параметров-полей, для которых выведена относительно простая система квазилинейных дифференциальных уравнений. В отличие от известных полуэмпирических моделей набор секулярных величин включает помимо интегрального масштаба, средней скорости диссипации энергии и тензора рейнольдсовых напряжений также и «быструю» часть тензора корреляций давление — скорость деформации или, что эквивалентно, вторые ориентационные моменты спектральной функции F_{ij}.

В [1] показано, что структура развитой изотропной турбулентности за решеткой в длинноволновом диапазоне может быть описана полями лишь двух секулярных величин — средней скорости диссипации энергии $\langle\varepsilon\rangle$ и корреляционного радиуса (интегральным масштабом) r_c.

Возможность такого сокращенного описания тесно связана с представлением о турбулентном потоке как критической системе. Основанием для аналогии служат при этом подобие крупномасштабных возмущений поля скорости и существование степенного (с показателем β) участка спектра в инерционном интервале. Роль атомарных масштабов длины и времени играют диссипативные (колмогоровские) масштабы $r_d =$

$= (\eta^3/\langle\varepsilon\rangle)^{1/4}$ и $t_d = (\eta/\langle\varepsilon\rangle)^{1/2}$; масштабная размерность a поля скорости в приближении $\beta = 5/3$ равна $1/3$, а поля ε — $(-\mu/2)$ (μ — спектральный индекс, характеризующий флуктуации диссипации энергии, η — коэффициент кинематической вязкости).

В рамках такой аналогии предполагается, что спектральные функции при $\bar{k} \ll 1$ имеют масштабно-инвариантный (скейлинговый) вид

$$\bar{F} = \bar{r}_c^{2a}\varphi(kr_c), \quad \bar{T} = \bar{r}_c^{3a}t(kr_c). \tag{1}$$

Здесь $F = F(x, k)$ и $T = T(x, k)$ характеризуют двухточечные квадратичные и кубичные по скорости корреляции; x — расстояние до решетки; $k = |\mathbf{k}|$; $\mathbf{k}$ — волновой вектор; черта означает обезразмеривание с помощью масштабов длины r_d и времени t_d. Тензоры $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = (2\pi)^{-3}\int \langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle \exp(-i\mathbf{kr})\,d\mathbf{r}$ и определяемый аналогично $T_{il,j}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ связаны с F и T соотношениями

$$F_{ij} = p_{ij}F, \; T_{il,j} = i(p_{ij}\theta_l + p_{lj}\theta_i)T, \tag{2}$$

где $p_{ij} = \delta_{ij} - \theta_i\theta_j$; $\theta_i = k_i/k$. Согласно (1) и (2), спектральные функции зависят от x неявным образом — через $\langle\varepsilon\rangle$ и r_c, что и означает, если использовать терминологию статистической физики, секулярность полей $\langle\varepsilon\rangle$ и r_c.

В свою очередь, зависимость $\langle\varepsilon\rangle$ и r_c от x удается конкретизировать, используя данные о поведении универсальных функций φ и t на малых k. Следуя [2], примем условие аналитичности для этих функций, причем

$$\varphi \to \mathrm{const} \neq 0, \; t \to 0 \text{ при } kr_c \to 0. \tag{3}$$

Константу в первом из соотношений (3) для определенности можно принять равной 1. Следует отметить, что в рамках предположения (3) функции F_{ij}, $T_{il,j}$, ... оказываются неаналитическими при $kr_c \to 0$: имеют особенность дипольного типа. Это согласуется с наличием гидродинамического дальнодействия в несжимаемой жидкости.

Непосредственный анализ спектральных уравнений приводит с применением условия (3) к степенной зависимости основных характеристик турбулентности от x [3]. При этом, в частности, для показателей затухания величин $\langle u_i^2\rangle$ и r_c получаются значения $48/(40-3\mu)$ и $-16/(40-3\mu)$ ($-1{,}2$ и $0{,}4$ в колмогоровском приближении, когда $\mu = 0$), весьма близкие к экспериментальным. В [3] также показано, что при учете (3) в спектральных уравнениях остается единственный параметр $\tau = \frac{t_d}{2} U \frac{d \ln r_c}{dx} \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$ (U — средняя скорость, Re — число Рейнольдса), представляющий собой отношение t_d к соответствующему «внешнему» временно́му масштабу. В рамках проводимой аналогии естественно отождествить τ с приведенной температурой, характеризующей близость системы к критической точке (которой в данном случае отвечает предел $\mathrm{Re} \to \infty$), и использовать для него обычное представление

$$\bar{r}_c = \tau^{-\nu} \tag{4}$$

($\nu = 6/(4+3\mu)$ — критический индекс, определяющий масштабную размерность поля τ [1]).

При распространении изложенного метода на случай течения со сдвигом необходимо прежде всего решить вопрос о неизотропной форме спектральных тензоров, обобщающей представление (2). Известные варианты решения этой проблемы основываются на непосредственной параметризации: в число тензорных аргументов спектральных функций помимо θ включают дополнительные величины, чаще всего тензор рейнольдсовых напряжений $\langle u_iu_j\rangle$ ($\mathbf{u}$ — пульсационная скорость) [4—9] или тензор $f_{ij}^{(0)}$, получаемый интегрированием F_{ij} по всем возможным ориентациям вектора θ [10].

Существенные выводы о зависимости спектральных тензоров от $\boldsymbol{\theta}$ можно сделать, не прибегая к ее конкретизации. Действительно, многие экспериментальные данные свидетельствуют об отсутствии изотропии в инерционном интервале [11, 12]. В то же время в этом интервале для продольных и поперечных спектров, которые существенно отличаются с точки зрения ориентационной структуры, выполняется «закон пяти третей» [12]. Это возможно лишь в случае, когда зависимости тензора F_{ij} и тензоров более высокого порядка от kr_c и прочих аргументов факторизуются:

$$F_{ij}(\mathbf{x},\ \mathbf{k}) = f_{ij}(\mathbf{k},\ \boldsymbol{\theta})\varphi(kr_c); \tag{5}$$

$$T_{il,j}(\mathbf{x},\ \mathbf{k}) = f_{il,j}(\mathbf{x},\ \boldsymbol{\theta})t(kr_c). \tag{6}$$

Гипотеза (5), (6) косвенно подтверждается анализом зависимости констант Колмогорова от параметров анизотропии [13], однако ее прямая проверка по имеющимся экспериментальным данным представляет трудную задачу. С другой стороны, функции f_{ij} и $f_{il,j}$, характеризующие форму турбулентных структур, легко связать с непосредственно измеряемыми величинами. Так, интегрируя (5) по всем $\boldsymbol{\theta}$ и учитывая, что основной вклад в интеграл дает длинноволновая область, нетрудно получить

$$\langle u_i u_j \rangle = \alpha r_c^{-3} f_{ij}^{(0)} \tag{7}$$

$\left(\alpha = \int\limits_0^\infty \varphi(t)\, t^2\, dt\right.$ — универсальная константа, определяемая формой спектра в длинноволновой области$\Big)$.

Перейдем к отысканию набора секулярных величин сдвиговой турбулентности. При этом, как и для изотропной турбулентности, будем основываться на рассмотрении уравнений для спектральных функций, первое из которых (для функции F_{ij}) с учетом условия локальной однородности $r_c \ll L$ (L — характерный внешний масштаб длины) можно записать в виде [10, 14, 15]

$$U_k \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} + (U_{il}F_{lj})_s - U_{lm}k_l \frac{\partial F_{ij}}{\partial k_m} - ik_l\,(T_{il,j})_s + 2\eta k^2 F_{ij} = \tag{8}$$
$$= 2U_{lm}\,(\theta_i\theta_l F_{mj})_s - ik_l\theta_m\,(\theta_i T_{lm,j})_s.$$

Здесь $U_{ij} = \partial U_i/\partial x_j$; индекс s означает симметризацию; по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Третье и четвертое слагаемые в левой части (8) описывают перенос энергии по спектру [16], а слагаемые в правой части — межкомпонентный перенос. Для определенности рассматривается стационарный случай и принимается условие $\sqrt{\langle u_i^2\rangle} \ll U$. Последнее означает, что диффузионными слагаемыми в уравнениях можно пренебречь, а поле средней скорости считать заданным, не искаженным наличием турбулентности. Указанное условие хорошо выполняется, например, в течениях, возникающих при различных искажениях потока за решеткой. Здесь экспериментально хорошо изучены плоское безвихревое искажение [10, 17, 18], поджатие [19, 20], однородный сдвиг [21—23]. Несмотря на относительную простоту, подобные течения до сих пор представляют большой интерес с теоретической точки зрения: они являются своеобразным эталоном при изучении взаимодействия среднего сдвига с пульсациями. Кроме того, полученные для них опытные данные обычно используются при выборе численных значений констант в полуэмпирических моделях.

Интегрирование (8) по всем $\mathbf{k}$ приводит к уравнению переноса для тензора Рейнольдса $\langle u_i u_j \rangle$, в котором присутствует неизвестное слагаемое $\Phi_{ij} = \langle p\partial u_i/\partial x_j \rangle$, описывающее корреляцию пульсаций давления p и скорости деформации. При моделировании этого слагаемого возникают значительные трудности. Обычно его представляют в виде суммы двух частей, первая из которых $\Phi_{ij,1}$ обусловлена нелинейным взаимодействием турбулентных пульсаций, вторая $\Phi_{ij,2}$ связана со средней скоростью деформации. Для $\Phi_{ij,1}$ чаще всего используется аппроксимация Ротта, а для $\Phi_{ij,2}$ — так называемая квазиизотропная модель, в простейшем варианте которой [24—26]

$$\Phi_{ij,2} = \mathrm{const}\,(D_{ij} - D\delta_{ij}/3) \tag{9}$$

$(D_{ij} = -(\langle u_i u_k \rangle \partial U_j/\partial x_k)_s$ — тензор, описывающий порождение напряжений средним сдвигом, $D = D_{ii})$.

Возвращаясь к основной задаче (отысканию набора секулярных величин сдвиговой турбулентности и выводу уравнений для них), следует иметь в виду, что помимо $\langle \varepsilon \rangle$ и r_c указанный набор должен включать величины, характеризующие анизотропию; ими могут служить ориентационные моменты функций f, например, для f_{ij}:

$$f_{ij}^{(l\ldots m)}(\mathrm{x}) = \int f_{ij}(\mathrm{x}, \theta)\,\theta_l \ldots \theta_m\, d\theta. \tag{10}$$

Порядок моментов определяется числом верхних индексов.

Моменты второго порядка непосредственно связаны с тензором $\Phi_{ij,2}$: умножая (5) на $U_{li}\theta_l\theta_m$ и осуществляя интегрирование по всем k, получим

$$\Phi_{ij,2} = 2U_{lm} f_{mj}^{(li)} \alpha r_c^{-3}. \tag{11}$$

Результаты [27—29] косвенно свидетельствуют о том, что в искомый набор может входить лишь небольшое число моментов, причем низшего порядка. В этой связи естественно вначале рассмотреть уравнение Крэйа [10], получаемое из (3) интегрированием по всем возможным ориентациям θ:

$$U_k \frac{\partial f_{ij}^{(0)}}{\partial x_k}\varphi + U_k \frac{\partial \ln r_c}{\partial x_k} f_{ij}^{(0)} k \frac{d\varphi}{dk} + (U_{il} f_{lj}^{(0)})_s \varphi - \varphi U_{lm} \int k_l \frac{\partial f_{ij}}{\partial k_m} d\theta -$$
$$- U_{lm} f_{ij}^{(lm)} k \frac{d\varphi}{dk} + 2\eta k^2 f_{ij}^{(0)} \varphi + (f_{il,j}^{(l)} - f_{lm,j}^{(lmi)})_s kt = 2U_{lm} (f_{mj}^{(li)})_s \varphi. \tag{12}$$

Здесь помимо $f_{ij}^{(0)}$ присутствуют моменты высших порядков функции f_{ij} и моменты кубичных корреляций. Однако при учете аналитических свойств скалярных спектральных функций φ, t ... можно существенно продвинуться в анализе этих уравнений [30—32]. Следуя в основном схеме, изложенной выше для изотропной турбулентности, рассмотрим вначале уравнение (12) в пределе при $kr_c \to 0$. При этом с учетом условия (3) находим уравнения для моментов нулевого порядка:

$$U_k \frac{\partial f_{ij}^{(0)}}{\partial x_k} + (U_{il} f_{lj}^{(0)})_s + K_{ij} = 2U_{lm} (f_{mj}^{(li)})_s \tag{13}$$
$$\left(K_{ij} = -U_{lm} \int k_l \frac{\partial f_{ij}}{\partial k_m} d\theta \right).$$

Тензор K_{ij} можно выразить через ориентационные моменты второго порядка. Для этой цели используем тождество [16] $U_{lm} \int k_l \frac{\partial F_{ij}}{\partial k_m} d\mathbf{k} = 0$, которое с учетом представления (5) преобразуется:

$$K_{ij} = -3U_{lm} f_{ij}^{(lm)}. \tag{14}$$

Соотношение (13) можно рассматривать как баланс энергии наиболее крупных $(k \ll r_c^{-1})$ вихрей. С математической же точки зрения оно представляет собой дифференциальное уравнение для тензора $f_{ij}^{(0)}$, в котором однако, присутствуют и моменты второго порядка.

С учетом (13) и (14) уравнение (12) запишем в более простом виде

$$\left(U_k \frac{\partial \ln r_c}{\partial x_k} f_{ij}^{(0)} - U_{lm} f_{ij}^{(lm)} \right) k \frac{d\varphi}{dk} + (f_{il,j}^{(l)} - f_{lm,j}^{(lmi)})_s kt + 2\eta k^2 f_{ij}^{(0)} \varphi = 0. \tag{15}$$

В частном случае, когда $U_{lm} = 0$ и турбулентность изотропна, т. е.

$f_{ij}^{(0)} \sim \delta_{ij}$ и $f_{il,j}^{(l)} \sim \delta_{ij}$, (15) с учетом (1) и (2) легко сводится к уравнению

$$\tau\bar{k}\, d\varphi/d\bar{k} + \bar{r}_c^{\alpha}\bar{k}t + \bar{k}^2\varphi = 0, \tag{16}$$

которое представляет собой, по существу, известное уравнение Кармана — Ховарта [33], записанное в спектральной форме с учетом гипотезы о скейлинге (1).

Представляя уравнение (15) в безразмерном виде, после сравнения с (16) получаем

$$t_d\left(U_k\frac{\partial \ln r_c}{\partial x_k} f_{ij}^{(0)} - U_{lm}f_{ij}^{(lm)}\right) = 2\tau' f_{ij}^{(0)} = 2\bar{r}_c^{-1/\nu} f_{ij}^{(0)}; \tag{17}$$

$$(\bar{f}_{il,j}^{(l)} - \bar{f}_{lm,j}^{(lmi)})_s = -2\bar{r}_c^{\alpha}\bar{f}_{ij}^{(0)} \tag{18}$$

(τ' — «температура» сдвигового потока). В отсутствие сдвига τ', как следует из (17), совпадает с τ. В общем случае, когда $U_{ij} = 0$, формула (17) сводится к алгебраическому соотношению, связывающему моменты нулевого и второго порядка функции f_{ij}.

Интегрируя (15) по всем $\mathbf{k}$, имеем уравнение баланса турбулентной энергии. Учитывая соотношение (17) и предполагая, что в диссипативном интервале пульсации изотропны, его можно свести к виду

$$2\langle\varepsilon\rangle\,\delta_{ij}/3 - \Phi_{ij,1} = 3\alpha r_c^{-3}\bar{r}_c^{-1/\nu} t_d^{-1} f_{ij}^{(0)}. \tag{19}$$

После сворачивания индексов с учетом (7) находим алгебраическое соотношение

$$\langle\varepsilon\rangle = 3t_d^{-1}\bar{r}_c^{-1/\nu}\langle u_i^2\rangle/2. \tag{20}$$

Наконец, с учетом (20) уравнение (19) нетрудно преобразовать:

$$\Phi_{ij,1} = -2\frac{\langle\varepsilon\rangle}{\langle u_k^2\rangle}\left(\langle u_i u_j\rangle - \frac{1}{3}\langle u_k^2\rangle\,\delta_{ij}\right). \tag{21}$$

Последнее соотношение совпадает с формулой Ротта, если принять константу Ротта C равной 2, а в качестве временнóго масштаба выбрать $\langle u_k^2\rangle/\langle\varepsilon\rangle$; $C = 2$ означает, что нелинейные взаимодействия фактически не участвуют в процессе изотропизации [5, 10]. Последнее согласуется с квазилинейным видом уравнения (13).

Резюмируя, можно сказать, что использование допущений (3) и (5), (6) позволило свести уравнения для тензора $\langle u_i u_j\rangle$ (или, что с точностью до r_c^{-3} эквивалентно, для $f_{ij}^{(0)}$) к существенно более простым уравнениям (13) и алгебраическим соотношениям (17), (20), (21). Проблема замыкания и отбора секулярных величин этим, однако, не исчерпывается: в уравнении (13) присутствуют различные линейные комбинации компонент тензора $f_{ij}^{(lm)}$, представляющие собой продольные $\left(U_{lm}f_{ij}^{(lm)}\right)$ и поперечные $\left(P_{ij} \equiv U_{lm}f_{mj}^{(li)}\right)$ свертки с U_{lm}. И если первые непосредственно выражаются через нулевые моменты по формуле (17), то для отыскания всех компонент P_{ij} указанной формулы в общем случае может быть недостаточно.

В этой ситуации представляется естественным расширить набор секулярных величин, включив в него кроме r_c, $\langle\varepsilon\rangle$, $f_{ij}^{(0)}$ и моменты второго порядка $f_{ij}^{(pq)}$. Уравнения для этих величин получаются из (8) после умножения на $\theta_p\theta_q$ и интегрирования по всем θ:

$$U_k\frac{\partial f_{ij}^{(pq)}}{\partial x_k}\varphi + U_k\frac{\partial \ln r_c}{\partial x_k} f_{ij}^{(pq)} k\frac{d\varphi}{dk} + \left(U_{il}f_{lj}^{(pq)}\right)_s\varphi + K_{ij}^{(pq)} - U_{lm}f_{ij}^{(lmpq)} k\frac{d\varphi}{dk} +$$
$$+ \left(f_{il,j}^{(lpq)} - f_{lm,j}^{(lmipq)}\right)_s kt + 2\eta k^2 f_{ij}^{(pq)}\varphi =$$
$$= 2U_{lm}\left(f_{mj}^{(lipq)}\right)_s\varphi \quad \left(K_{ij}^{(pq)} = -U_{lm}\int k_l\theta_p\theta_q\frac{\partial f_{ij}}{\partial k_m}\,d\theta\right). \tag{22}$$

Выражение для $K_{ij}^{(pq)}$ можно получить аналогично тому, как это сделано для K_{ij}, а именно: осуществляя интегрирование по частям, величину $J_{ij}^{(pq)} - U_{lm}\int \theta_p\theta_q k_l \frac{\partial F_{ij}}{\partial k_m} d\mathbf{k}$ с учетом определения (10) представим в виде

$$J_{ij}^{(pq)} = -\alpha r_c^{-3}\left(U_{lp}f_{ij}^{(lq)} + U_{lq}f_{ij}^{(lp)} - 2U_{lm}f_{ij}^{(lmpq)}\right),$$

с другой стороны, с учетом (15) находим

$$J_{ij}^{(pq)} = \alpha r_c^{-3}\left(-K_{ij}^{(pq)} - 3U_{lm}f_{ij}^{(lmpq)}\right).$$

Из сравнения двух последних формул получаем

$$K_{ij}^{(pq)} = -5U_{lm}f_{ij}^{(lmpq)} + \left(U_{lq}f_{ij}^{(lp)}\right)_s. \tag{23}$$

Дальнейший анализ уравнения (22) осуществляется аналогично тому, как было сделано для (12). В пределе при $kr_c \to 0$ из уравнения (22) следует

$$U_k\frac{\partial f_{ij}^{(pq)}}{\partial x_k} + \left(U_{il}f_{lj}^{(pq)}\right)_s + K_{ij}^{(pq)} = 2U_{lm}\left(f_{mj}^{(lipq)}\right)_s. \tag{24}$$

С учетом (24) уравнение (22) примет вид

$$\left(U_k\frac{\partial \ln r_c}{\partial x_k}f_{ij}^{(pq)} - U_{lm}f_{ij}^{(lmpq)}\right)k\frac{d\varphi}{dk} + \left(f_{il,j}^{(lpq)} - f_{lm,j}^{(lmipq)}\right)_s kt + 2\eta k^2 f_{ij}^{(pq)}\varphi = 0. \tag{25}$$

Откуда после сравнения с (16) имеем

$$t_d\left(U_k\frac{\partial \ln r_c}{\partial x_k}f_{ij}^{(pq)} - U_{lm}f_{ij}^{(lmpq)}\right) = 2\bar{r}_c^{-1/\nu}f_{ij}^{(pq)}; \tag{26}$$

$$\left(\bar{f}_{il,j}^{(lpq)} - \bar{f}_{lm,j}^{(lmipq)}\right)_s = -2\bar{r}_c^{-a}\bar{f}_{ij}^{(pq)}. \tag{27}$$

Формула (27), как и (18), устанавливает алгебраическую связь между моментами функций f_{ij} и $f_{il,j}$. У соотношения (26) та же структура, что и у (17). Они иллюстрируют общее правило: сворачивание двух верхних индексов ориентационного тензора $f_{ij}^{(l\ldots m)}$ с U_{lm} понижает его порядок на 2.

С помощью соотношения (26) можно получить недостающую для замыкания информацию о компонентах тензора P_{ij}. Действительно, с учетом (23) и (26) уравнение (24) можно представить в виде

$$U_k\frac{\partial f_{ij}^{(pq)}}{\partial x_k} + \left(U_{il}f_{lj}^{(pq)}\right)_s + \left(U_{lq}f_{ij}^{(lp)}\right)_s - 5Af_{ij}^{(pq)} = 2U_{lm}\left(f_{mj}^{(lipq)}\right)_s. \tag{28}$$

Сворачивая в (28) индексы p, i; q, j с U_{pi} и U_{qj}, с учетом (26) получим

$$U_k\frac{\partial(\widehat{P}\widehat{U})}{\partial x_k} + 4\widehat{P}\widehat{U}^2 - 9A\widehat{P}\widehat{U} = 2U_k f_{ij}^{(pq)}\left(U_{qj}\frac{\partial U_{pi}}{\partial x_k} + U_{pi}\frac{\partial U_{qj}}{\partial x_k}\right). \tag{29}$$

Здесь

$$A = U_k\frac{\partial \ln r_c}{\partial x_k} - 2\bar{r}_c^{-1/\nu}t_d^{-1}, \tag{30}$$

выражения $\widehat{P}\widehat{U}$ и аналогичные используются для обозначения сверток соответствующих тензоров.

Система уравнений (13), (17), (20), (29) для $\langle\varepsilon\rangle$, r_c, $f_{ij}^{(0)}$, P_{ij} (или, что, согласно (7), (9), эквивалентно, r_c, $\langle\varepsilon\rangle$, $\langle u_iu_j\rangle$, $\Phi_{ij,2}$) может служить основой для расчета рассматриваемого класса турбулентных течений. В этой системе содержится лишь одна константа α, которая к тому же может быть независимо определена из спектральных данных.

Следует отметить, что замыкания удалось добиться, привлекая моменты лишь нулевого и второго порядков. Моменты высших порядков выражаются через низшие алгебраическими соотношениями. В то же время наличие в указанной системе дифференциального уравнения для $\widehat{P}\widehat{U}$ свидетельствует о том, что предпринимаемые в рамках известных моделей [5, 24—26, 34] попытки локального описания турбулентности лишь с помощью полей $\langle\varepsilon\rangle$, r_c, $\langle u_i u_j\rangle$ не вполне корректны.

В качестве апробации метода применим полученную систему уравнений к расчету ускоряющегося течения за решеткой в осесимметричном конфузоре. Соответствующие каналы широко используются для улучшения характеристик турбулентности в аэродинамических трубах [19, 20, 35—38], однако экспериментальные данные обнаруживают большой разброс, а подчас и не согласуются между собой [20, 38]. Здесь существует и ряд нерешенных теоретических проблем. Например, до сих пор, по существу, остается открытым вопрос о том, уменьшается или увеличивается интенсивность $\langle u_1^2\rangle$ продольных турбулентных пульсаций в результате поджатия [39].

Поле средней скорости в данном случае можно считать заданным: оно определяется лишь геометрией стенок канала. Для простоты ограничимся также рассмотрением характеристик турбулентности лишь на оси канала, продольную координату и соответствующую компоненту средней скорости обозначим x и U. В этом случае тензор средних скоростей деформаций имеет простой вид

$$U_{ij} = 3\varkappa\delta_{i1}\delta_{j1} - \varkappa\delta_{ij}, \quad \varkappa(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x},$$

тензоры $f_{ij}^{(0)}$ и P_{ij} диагональны, а уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным.

После несложных преобразований свертки $\widehat{P}\widehat{U}$ и $\widehat{P}\widehat{U}^2$ выражаются через единственную независимую компоненту тензора P_{ij} — P_{11}:

(31)
$$\widehat{P}\widehat{U} = 3\varkappa P_{11}, \quad \widehat{P}\widehat{U}^2 = 3\varkappa^2 P_{11}.$$

Используя вытекающее из условия несжимаемости тождество $f_{lj}^{(li)} = 0$, величину P_{11} представим как

(32)
$$P_{11} = 3\varkappa f_{11}^{(11)}.$$

С другой стороны, с учетом соотношения $f_{ij}^{(ll)} = f_{ij}^{(0)}$ и определения (30) из уравнения (17) получаем

(33)
$$3\varkappa f_{ij}^{(11)} = (A + \varkappa) f_{ij}^{(0)}.$$

Из сравнения формулы (33), взятой при $i = j = 1$, с соотношением (32) имеем

(34)
$$P_{11} = (A + \varkappa) f_{11}^{(0)},$$

С учетом представлений (31), (32), (34) система уравнений для секулярных величин принимает вид

(35)
$$U\frac{df_{11}^{(0)}}{dx} = 7Af_{11}^{(0)}, \quad U\frac{df_{ii}^{(0)}}{dx} = (3A + 2\varkappa) f_{ii}^{(0)} - 6\varkappa f_{11}^{(0)},$$

$$U\frac{d}{dx}\left((A + \varkappa)\varkappa f_{11}^{(0)}\right) + 4\varkappa^2(A + \varkappa) f_{11}^{(0)} - 9A\varkappa(A + \varkappa) f_{11}^{(0)} = 2U\frac{d\varkappa}{dx}(A + \varkappa) f_{11}^{(0)},$$

$$U\frac{dr_c}{dx} = Ar_c + 2r_c\bar{r}_c^{-1/\nu} t_d^{-1}.$$

Учитывая алгебраическое представление (20) для $\langle\varepsilon\rangle$, нетрудно убедиться, что эта система для функций r_c, $f_{11}^{(0)}$, $f_{ii}^{(0)}$ и A замкнутая. Перейдем к ее решению.

Из первого и третьего уравнений получим «интеграл движения»

$$\frac{|A+\varkappa|U^2}{\varkappa\left(f_{11}^{(0)}\right)^{2/7}} = b = \mathrm{const}, \tag{36}$$

позволяющий исключить из системы переменную A. При этом для $f_{11}^{(0)}$ после некоторых преобразований и замены переменной находим уравнение Бернулли

$$\frac{df_{11}^{(0)}}{dU} + \frac{7}{2}\frac{f_{11}^{(0)}}{U} - \frac{7}{2}\frac{b}{U^3}\left(f_{11}^{(0)}\right)^{9/7} = 0. \tag{37}$$

Его решение запишем как

$$f_{11}^{(0)} = \left(\frac{1+\beta}{1+\beta c^3}\right)^{7/2} c^7, \tag{38}$$

где $\beta = 3U^2(0)/b - 1$ — константа; $c = U(x)/U(0)$ — эффективная конфузорность потока; значение x, равное 0, соответствует начальному сечению конфузора. Здесь и в дальнейшем приводятся искомые функции, нормированные по своему начальному значению, так что, например, $f_{11}^{(0)} = 1$ при $c = 1$.

Подставляя выражение (38) для $f_{11}^{(0)}$ в формулу (36), имеем

$$A = 3\varkappa/(1+\beta c^3) - \varkappa. \tag{39}$$

Наконец, с использованием формул (38) и (39) легко решаются два оставшихся уравнения системы (35). При этом для интенсивности продольных пульсаций, интегрального масштаба и параметра анизотропии $\langle u_i^2\rangle/\langle u_1^2\rangle$, представляющих наибольший практический интерес, получаем

$$\langle u_1^2\rangle = c^4\left(\frac{1+\beta}{1+\beta c^3}\right)^2\left[1 + \frac{B}{L(1+\beta)^{1/2}}\int_0^x \left((\gamma\beta-\beta-1) + (\gamma+\beta+1)c^{-3}\right)^{1/2} dx\right]^{-6/5}; \tag{40}$$

$$r_c = \left(\langle u_1^2\rangle\right)^{-1/3} c^{7/3}\left(\frac{1+\beta}{1+\beta c^3}\right)^{7/6}; \tag{41}$$

$$\langle u_i^2\rangle/\langle u_1^2\rangle = \frac{1+\beta c^3}{c^3(1+\beta)^2}\left((\gamma\beta-\beta-1)c^3 + (\gamma+\beta+1)\right). \tag{42}$$

Здесь L — длина участка поджатия; $B = 5\sqrt{\langle u_1^2(0)\rangle}\,L/(U(0)\,r_c(0))$ — параметр, представляющий собой отношение «внешнего» временного масштаба L/U к соответствующему масштабу r_c/u энергосодержащих турбулентных пульсаций; $\gamma = \langle u_i^2(0)\rangle/\langle u_1^2(0)\rangle$. При изотропных начальных условиях $\gamma = 3$.

Проанализируем результаты расчета и сформулируем некоторые выводы.

1. В случае $c = 1$ (отсутствие поджатия) формулы (40), (41) сводятся к полученным ранее степенным соотношениям, описывающим вырождение турбулентности за решеткой.

2. Подставляя выражение (39) для функции A в формулу (34), получим $P_{11} = \frac{3\varkappa}{1+\beta c^3} f_{11}^{(0)}$ или, что эквивалентно,

$$\Phi_{11,2} = 3\langle u_1^2\rangle \frac{dU}{dx_1}\Big/(1+\beta c^3).$$

Последняя формула иллюстрирует отличие предлагаемого метода от упомянутых выше моделей, в рамках которых для $\Phi_{ij,2}$ постулируется представление (9).

3. Относительная простота, с которой удается проинтегрировать систему (35), объясняется квазилинейным (по ориентационным моментам) характером исходных уравнений. В этой связи представляется естественным сравнить предлагаемый метод расчета с известной теорией быстрого искажения.

В пределе $B \ll 1$, соответствующем допущению о «быстроте» искажения, из формул (40), (42) для больших c имеем $\langle u_1^2(x)\rangle \sim c^{-2}$, $\langle u_i^2(x)\rangle \sim c$, что согласуется как с результатами указанной теории, так и с более ранними оценками Прандтля и Тейлора [20]. Однако подобное согласие и сам приведенный результат нельзя переоценивать хотя бы по той причине, что указанный формальный предел вряд ли физически осуществим: в опытах удается в лучшем случае получить значения B, близкие к 1.

Различие же между двумя методами гораздо более существенно. В теории быстрого искажения нелинейные и диссипативные слагаемые просто исключаются из спектральных уравнений. В предлагаемом же методе эти слагаемые учитываются и играют принципиальную роль, заключающуюся прежде всего в формировании универсальных спектральных функций, свойства которых в длинноволновом диапазоне (скейлинг, факторизация и предельное поведение при $k \to 0$) обусловливают возможность получения замкнутой системы уравнений для основных характеристик турбулентности и ее квазилинейный характер. При этом фактически не возникает необходимость использовать явный вид зависимости спектральных функций от аргумента k в отличие от теории быстрого искажения, где такая конкретизация обязательна при постановке начальных условий.

4. Решение системы (35) включает параметр β, который, согласно (36) и соотношению $U_{lm}f_{ij}^{(lm)} = Af_{ij}^{(0)}$, определяется начальными значениями нулевых и вторых ориентационных моментов. Непосредственное измерение $f_{ij}^{(lm)}$ представляет собой, однако, сложную задачу. Кроме того, возникает и принципиальная трудность: если турбулентность на входе изотропна в том смысле, что $F_{ij} \sim p_{ij}$, условие $U_{lm}f_{ij}^{(lm)} \sim f_{ij}^{(0)}$, очевидно, не может выполняться. Разрешение этого противоречия заключается, по-видимому, в том, что для тензора $f_{ij}^{(lm)}$ в общем случае нельзя использовать изотропную параметризацию, даже если тензор $f_{ij}^{(0)}$ изотропен. Объясняется это тем, что воздействие среднего сдвига сказывается на всех ориентационных моментах, причем, как показано в данной работе, по крайней мере, на нулевых и вторых — независимо. Турбулентность, порождаемая сдвигом при прохождении потоком решетки, не должна быть исключением и поэтому вряд ли является таким простым объектом, как это обычно считается: даже если удается добиться выполнения условия $\langle u_iu_j\rangle \sim f_{ij}^{(0)} \sim \delta_{ij}$, из него не следует автоматически изотропия $F_{ij} \sim p_{ij}$.

В этом смысле уместно говорить о «памяти» турбулентности, о породившем ее сдвиге, причем память может сохраняться даже в моментах высших порядков в виде их нелокальной зависимости от U_{ij}. Само понятие изотропной турбулентности в этой связи следует рассматривать лишь как весьма грубую модель реального турбулентного потока, буквальная реализация которой в общем случае невозможна. Практический вывод по отношению к течениям в конфузорах заключается в том, что значение параметра β и количественный результат поджатия существенно зависят от типа решетки и уровня турбулентности в начальном сечении сопла. Такой вывод непосредственно подтверждается экспериментом и объясняет значительный разброс опытных данных.

5. При непосредственном сравнении с экспериментом параметр β проще всего найти из уравнения (42). Например, по результатам [20] при $\gamma = 3$ для β получается значение, несколько большее 0,5. При этом зависимость основных характеристик турбулентности от x оказывается монотонной.

В ряде экспериментальных работ отмечалось более сложное поведение. Например, уменьшение $\langle u_1^2 \rangle$ наблюдалось в [19, 20] лишь до сечения с $c = 4$, после чего интенсивность продольных пульсаций возрастала. Однако такой эффект, как отмечается в [38], может возникнуть из-за акустических возмущений на выходе из конфузора.

Автор выражает глубокую признательность Л. Ц. Аджемяну за обсуждение работы и полезные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аджемян Л. Ц., Богданов С. Р., Сыщиков Ю. В.** Гипотеза подобия при описании длинноволновых спектров развитой турбулентности // Вести. ЛГУ.— 1982.— № 10.
2. **Saffman P. G.** Coherent structures in turbulent flow // Lecture Notes in Physics.— 1981.— V. 136.— P. 1.
3. **Богданов С. Р.** Изучение закономерностей вырождения локально-однородной и изотропной турбулентности на основе гипотезы скейлинга // ЖТФ.— 1983.— Т. 53, вып. 3.
4. **Lumley J. L., Newman G. R.** The return to isotropy of homogeneous turbulence // J. Fluid Mech.— 1977.— V. 82, pt 1.
5. **Ламли Дж.** Модели второго порядка для турбулентных течений // Методы расчета турбулентных течений.— М.: Мир, 1984.
6. **Naot D., Shavit A., Wolfshtein M.** Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stresses // Phys. Fluids.— 1973.— V. 16, N 6.
7. **Лин А., Вольфштейн М.** Теоретическое исследование уравнений для напряжений Рейнольдса // Турбулентные сдвиговые течения. I.— М.: Машиностроение, 1982.
8. **Gallagher B., Magaard L., Gutteling E.** Closure for velocity/pressure-gradient correlations in turbulent shear flow // Phys. Fluids.— 1981.— V. 24, N 9.
9. **Gallagher B.** Testing a closure for velocity/pressure-gradient correlations in nonuniform turbulent flow // Phys. Fluids.— 1985.— V. 28, N 7.
10. **Матье Ж., Жандель Д.** Патологическое поведение турбулентных течений и спектральный метод // Методы расчета турбулентных течений.— М.: Мир, 1984.
11. **Mestayer R.** Local isotropy and anisotropy in a high-Reynolds-number turbulent boundary layer // J. Fluid Mech.— 1982.— V. 125.— P. 475.
12. **Мьолснесс Р. К.** Возможные отклонения от локальной изотропии в мелкомасштабной структуре турбулентных полей скорости // Турбулентные сдвиговые течения. II.— М.: Машиностроение, 1983.
13. **Богданов С. Р.** О константах Колмогорова в спектрах анизотропной турбулентности // ПМТФ.— 1990.— № 5.
14. **Хинце И. О.** Турбулентность.— М.: ГИФМЛ, 1963.
15. **Cambon C., Jeandel D., Mathieu J.** Spectral modelling of homogeneous non-isotropic turbulence // J. Fluid Mech.— 1981.— V. 104.— P. 247.
16. **Diessler R. G.** Spectral energy transfer for in homogeneous turbulence // Phys. Fluids.— 1981.— V. 24, N 10.
17. **Таунсенд А. А.** Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом.— М.: ИЛ, 1959.
18. **Tucker H. G., Reynolds A. J.** The distortion of turbulence by irrotational plane strain // J. Fluid Mech.— 1968.— V. 32, pt 4.
19. **Uberoi M. S.** Equipartition of energy and local isotropy in turbulent flow // J. Appl. Phys.— 1957.— V. 28, N 10.
20. **Хуссейн, Рамье.** Влияние формы осесимметричного конфузорного канала на турбулентное течение несжимаемой жидкости // Теор. основы инж. расчетов.— М.: Мир, 1976.— № 2.
21. **Champagne F. H., Harris V. G., Corrsin S.** Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow // J. Fluid Mech.— 1970.— V. 41, pt 1.
22. **Rose W. G.** Results of an attempt to generate a homogeneous turbulent shear flow // J. Fluid Mech.— 1966.— V. 25, pt 1.
23. **Harris V. G., Graham J. A. H., Corrsin S.** Further experiments in nearly homogeneous turbulent shear flows // J. Fluid Mech.— 1977.— V. 81.— P. 657.
24. **Launder B. E., Reece G. J., Rodi W.** Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure // J. Fluid Mech.— 1975.— V. 68, pt 3.
25. **Лаундер Б. Е.** Модели замыкания для напряжений — третье поколение // Турбулентные сдвиговые течения. I.— М.: Машиностроение, 1982.
26. **Janicka J.** Model functions of Reynolds stress models // Phys. Fluids.— 1988.— V. 31, N 1.
27. **Herring J. R.** Approach of axisymmetric turbulence to isotropy // Phys. Fluids.— 1974.— V. 17, N 5.
28. **Фукс Г. Ф., Меркер Е., Михель У.** Разложение по модам когерентных структур в следе за круглым диском // Турбулентные сдвиговые течения. II.— М.: Машиностроение, 1983.
29. **Кузьмин Г. А., Паташинский А. З.** Параметры организованных структур турбулентных течений.— Новосибирск, 1984.— (Препр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ИЯФ; № 84—155).

30. **Kida S., Murakami Y.** Kolmogorov similarity in freely decaying turbulence // Phys. Fluids.— 1987.— V. 30, N 7.
31. **Lesieur M., Schertzer D.** Amortissement autosimilaire d'une turbulence a grand nombre de Reynolds // J. de Mech.— 1978.— V. 17, N 4.
32. **Lin A., Wolfshtein M.** Tensorial volume of turbulence // Phys. Fluids.— 1980.— V. 23, N 3.
33. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, 1967.— Т. 2.
34. **Hanjalic K., Launder B. E.** A Reynolds stress model of turbulence and its applications to thin shear flows // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 52, pt 4.
35. **Comte-Bellot G., Corrsin S.** The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence // J. Fluid Mech.— 1966.— V. 25, pt 4.
36. **Uberoi M. S.** Effects of wind — tunnel contraction on freestream turbulence // J. Aero. Science.— 1965.— V. 23, pt 3.
37. **Klein A., Ramjee V.** Effects of contraction geometry on nonisotropic free-stream turbulence // Aero. Quart.— 1973.— V. 24, pt 1.
38. **Дербунович Г. И., Земская А. С., Репик Е. У., Соседко Ю. П.** Влияние конфузорности течения на уровень турбулентности потока // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1987.— № 2.
39. **Tsuge S.** Effects of flow contraction on evolution of turbulence // Phys. Fluids.— 1984.— V. 27, N 8.

г. Петрозаводск *Поступила 6/VI 1989 г., в окончательном варианте — 10/VII 1990 г.*

УДК 539.3

Л. Е. Колегов, Э. Э. Лин, В. Т. Рязанов, А. И. Фунтиков

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ КРУГЛЫХ АЛЮМИНИЕВЫХ ПЛАСТИН ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НИХ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Поведение пластин при достаточно интенсивных воздействиях на них ударных волн представляет интерес для изучения больших пластических деформаций и разрушений. В большинстве имеющихся работ, обзор которых представлен в [1—4], как правило, большие пластические деформации пластин и их разрушение рассматриваются раздельно. В настоящей работе экспериментально изучены зависимости остаточных прогибов алюминиевых пластин различных диаметров и толщин от импульсной нагрузки, создаваемой при взрыве плоского заряда ВВ в ударной трубе, и установлены критические значения остаточных прогибов, отвечающие их разрушению. Полученные результаты представлены в обобщенном виде.

Применение пластин в качестве диафрагм ударных труб предполагает их закрепление по периметру, например, сжатием пластины между двумя фланцами с помощью болтового соединения. В случае, когда диаметры камер высокого и низкого давления отличаются, закрепление пластины осуществляется по большому диаметру, т. е. имеет место импульсное нагружение пластины по части ее поверхности. Принималось, что нагружение пластин в том и в другом случае производится осесимметрично и равномерно.

Эксперименты проведены на ударных трубах с плоской ударной волной, создаваемой при взрыве плоского листового заряда ВВ в условиях нормальной атмосферы [5]. Ударная труба выполнялась в виде стального цилиндра с внутренним диаметром $d = 0{,}09$; 0,19 и 0,40 м, длиной $L = 0{,}5$ и 2 м. Заряд ВВ размещался в сечении, расположенном на равном расстоянии от торцов трубы. Один из торцов трубы оставался открытым. Инициирование заряда производилось в нескольких точках, равномерно расположенных на поверхности заряда. Изменение импульсной нагрузки на пластине осуществлялось изменением толщины заряда. Импульсная нагрузка определялась баллистическим методом по метанию достаточно массивной недеформируемой мишени, установленной на место изучаемой пластины, а форма отраженной от недеформируемой жесткой стенки ударной волны — пьезоэлектрическим датчиком [5]. Длительность импульса зависела от расстояния x от заряда до нагружаемого объекта и