ПМТФ, № 2, 1972

УДК 533.95:538.4

ДВУМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В. С. Имшенник

(Москва)

Рассмотрено простое двумерное плоское решение уравнений магнитной гидродинамики, указанное ранее в общем виде А. Г. Куликовским [1]. В рамках этого решения содержится случай плоской кумуляции вещества в окрестности нулевой линии магнитного поля, представляющий интерес для различных быстрых процессов в плазме (z-пинч, солнечные вспышки) [2].

За последнее время возрос интерес к двумерным магнитогидродинамическим движениям вещества в связи с рядом интенсивно изучаемых физических и астрофизических явлений, например плазменным фокусом в z-пинче и солнечными хромосферными вспышками. Существенно также, что эти явления вследствие прогресса вычислительной математики все в большей степени поддаются исследованию численными методами. В таких условиях представляется полезным рассмотрение тех немногих аналитических решений двумерной магнитной гидродинамики, которые имеют хотя бы косвенное отношение к актуальным магнитогидродинамическим задачам в полной физической постановке. Ниже рассматривается некоторый класс простых решений уравнений магнитной гидродинамики для двумерного плоского нестационарного движения. Оказывается возможным выделить два подкласса решений с совершенно разным физическим смыслом. Особый интерес представляет тот подкласс, в который входят решения с кумулятивным плоским сжатием вещества в окрестности нулевой линии магнитного поля.

1. Рассмотрим двумерную плоскую нестационарную задачу магнитной гидродинамики. Пусть движение вещества происходит в плоскости xy, т. е. z — компонента скорости $v_z = 0$. Если отсутствует также z-компонента магнитного поля, $B_z = 0$, и все величины зависят от координат x, y и времени t, то могут быть отличны от нуля лишь z-компоненты электрического поля E_z и плотности тока j_z. Пусть далее закон Ома имеет простейший вид

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}]) \tag{1.1}$$

В такой постановке задачи электромагнитное поле можно описать с помощью единственной компоненты вектор-потенциала $\mathbf{A}$, $A_z = A$

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad E_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \tag{1.2}$$

Скалярный потенциал φ положен равным нулю вследствие градиентной инвариантности электромагнитного поля [3]. Тогда, если проводимость вещества σ не зависит от пространственных координат, систему уравнений магнитной гидродинамики можно записать в виде

$$\frac{dA}{dt} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta A, \qquad \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \frac{1}{4\pi}\Delta A \nabla A$$
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.3}$$

где функции A, $\mathbf{v}$, ρ зависят от x, y, t. Уравнение для компоненты вектор-потенциала A в (1.3) совпадает с соответствующим уравнением из работы [2], если учесть соотношение (1.1).

2. Система уравнений (1.3) имеет некоторый класс простых решений, отмеченный А. Г. Куликовским [1]. Заранее положим, что давление p является функцией только плотности ρ. Проводимость вещества σ, вообще говоря, зависящая от давления и плотности, тогда становится функцией одной плотности. Указанное предположение, конечно, совместимо с выводом уравнений (1.3) только для не зависящей от пространственных координат плотности. Именно такой класс решений рассмотрен ниже

$$A = \mathbf{r}a_+\mathbf{r} + \alpha, \quad \mathbf{v} = U\mathbf{r}, \quad \rho = \rho(t), \quad p = p(\rho) \tag{2.1}$$

где радиус-вектор $\mathbf{r} = (x, y)$, а матрицы $a_+ = \| a_{ij} \|$, $U = \|u_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2)$. Отметим, что $a_{12} = a_{21}$. Зависимость девяти функций $a_{ij}(t)$, $u_{ij}(t)$, $\alpha(t)$ и $\rho(t)$ $(i, j = 1, 2)$ от времени определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которые получаются подстановкой выражений из (2.1) в исходную систему (1.3). Ниже эти уравнения представлены в матричном виде

$$U' + U^2 = -\frac{Spa_+}{\pi\rho}a_+, \quad \rho' = -SpU\rho \tag{2.2}$$

$$a_+' + a_+^{*\prime} + 2(a_+U + U^*a_+^*) = 0, \quad \alpha' = \frac{c^2}{2\pi\sigma}Spa_+$$

Здесь Spa_+ и SpU — след матриц a_+ и U соответственно, звездочка означает транспонирование матриц, штрих — дифференцирование по времени.

Из уравнений (2.2) видно, что случай конечной проводимости вещества весьма мало отличается от предельного случая бесконечной проводимости. Действительно, при $\sigma < \infty$ в решении появляется дополнительная функция $\alpha(t)$, определяемая из последнего уравнения системы (2.2) после решения всей остальной системы (в предельном случае $\sigma \to \infty$, $\alpha = 0$). Таким образом, в результате учета конечной проводимости вещества согласно (1.2) появляется только добавка в z-компоненте электрического поля. Магнитное поле и движение вещества сохраняются, как в предельном случае.

Системе уравнений (2.2) целесообразно придать безразмерный вид. Для этого заметим, что в начальных условиях задачи, которые получаются из (2.1) при $t = 0$, содержится две размерные постоянные: ρ_0 — начальная плотность вещества и величина a_0, равная для определенности первому коэффициенту в квадратичной форме для функции A, a_{11} [1]. Легко убедиться, что комбинация

$$t_0 = (\pi\rho_0)^{1/2}a_0^{-1} \tag{2.3}$$

имеет размерность времени. Тогда для безразмерных функций

$$\bar{a}_{ij} = a_0^{-1}a_{ij}, \quad \bar{u}_{ij} = t_0u_{ij}, \quad \bar{\rho} = \rho_0^{-1}\rho \tag{2.4}$$

получим из (2.2) безразмерные уравнения.

При этом в обозначениях безразмерных функций из (2.4) далее опустим отличительные верхние черточки, чтобы не усложнять запись. Ниже, если не будет специально оговорено, рассматриваются безразмерные величины

$$U' + U^2 = -Spa_+a_+\rho^{-1}, \quad \rho' = -SpU\rho \tag{2.5}$$

$$a_+' + a_+^{*\prime} + 2(a_+U + U^*a_+^*) = 0, \quad \alpha' = \tau_0Spa_+$$

[1] Наличие в начальных условиях только двух указанных размерных постоянных позволяет при помощи соображений теории размерности [4] сконструировать записанный в (2.1) класс решений.

причем теперь штрих означает дифференцирование по безразмерному времени $\tau = tt_0^{-1}$. В (2.5) $\tau_0 = t_0/t_0'$, где $t_0' = l_0^2 2\pi\sigma c^{-2}$ с l_0 — произвольной единицей длины, входящей в определение безразмерной функции $\bar{\alpha} = \alpha l_0^{-2} a_0^{-1}$.

3. Несмотря на крайне простую зависимость рассматриваемого решения от пространственных координат, оно имеет интересный физический смысл. Не исчерпывая всего разнообразия решений системы (2.5) (его определяют шесть безразмерных чисел — начальных значений функций a_{ij} и u_{ij}), укажем на два частных подкласса решений. Если в начальных условиях матрицы U и a_+ имеют диагональный вид ($a_{12}(0) = u_{12}(0) = u_{21}(0) = 0$), то, согласно условиям (2.5), для всех $\tau > 0$ их диагональный вид сохраняется

$$a_{12} = u_{12} = u_{21} = 0 \tag{3.1}$$

В данном случае движущееся вещество не пересекает осей координат, а магнитные силовые линии направлены перпендикулярно осям. Упрощенная система уравнений с $\tau_0 = 0$ получается из (2.5) с учетом (3.1)

$$\rho\,(u_{11}' + u_{11}^2) = -a_{11}\,(a_{11} + a_{22}), \qquad \rho\,(u_{22}' + u_{22}^2) = -a_{22}(a_{11} + a_{22}),$$

$$\rho' + \rho\,(u_{11} + u_{22}) = 0 \tag{3.2}$$

$$a_{11}' + 2a_{11}u_{11} = 0, \qquad a_{22}' + 2a_{22}u_{22} = 0$$

Если в начальный момент знаки величин a_{11} и a_{22} противоположны, то система уравнений (3.2) описывает нестационарное движение вещества в окрестности нулевой линии магнитного поля. Наиболее важным свойством этого движения является кумулятивное сжатие вещества, происходящее за конечное размерное время $t_k \sim t_0$. Докажем кумулятивный характер общего решения уравнений (3.2). С этой целью введем новые функции ξ и η

$$a_{11} = \xi^{-2}, \qquad a_{22} = -\,\eta^{-2} \tag{3.3}$$

Начальные значения функции ξ и η обозначим ξ_0, η_0. Из последних трех уравнений системы (3.2), считая без ограничения общности $\xi, \eta > 0$, найдем

$$\rho = (\xi\eta)^{-1}\xi_0\eta_0, \quad u_{11} = \xi'\xi^{-1}, \quad u_{22} = \eta'\eta^{-1} \tag{3.4}$$

Оставшиеся два уравнения системы (3.2) дают два дифференциальных уравнения второго порядка для функций ξ, η

$$\xi'' = -\frac{\eta}{\xi_0\eta_0}(\xi^{-2} - \eta^{-2}), \qquad \eta'' = \frac{\xi}{\xi_0\eta_0}(\xi^{-2} - \eta^{-2}) \tag{3.5}$$

В случае начальных условий $\xi_0 > \eta_0$ и $\xi_0' > \eta_0'$ из уравнений (3.5) следует, что $\xi_0'' > 0$ и $\eta_0'' < 0$. Это, очевидно, означает дальнейшее усиление неравенства $\xi > \eta$. Вторые производные ξ'', η'' из (3.5) не изменяют знаков вплоть до особой точки $\tau = \tau_k$, в которой $\eta(\tau_k) = 0$. При начальных условиях $\xi_0 < \eta_0$ и $\xi_0' < \eta_0'$, наоборот, усиливается неравенство $\xi < \eta$, и особенность наступает при обращении в нуль функции ξ. Все другие типы начальных условий ($\xi_0 > \eta_0$, $\xi_0' < \eta_0'$ или $\xi_0 < \eta_0$, $\xi_0' > \eta_0'$), как легко понять, тоже приводят к той или другой особенности в зависимости от того, изменится или нет знак неравенства первых производных до пересечения кривых ξ и η друг с другом [1]. Заметим, что время особенности τ_k всегда конечно, поскольку соответствующая вторая производная строго меньше нуля. Кумуляция, отвечающая доказанной выше особенности решения, характеризуется неограниченным ростом величин ρ, a_{11} и u_{11} (при $\xi \to 0$) или величин ρ, a_{22} и u_{22} (при $\eta \to 0$). Кумулятивное сжатие происходит перпендикулярно плоскости yz или xz. Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (3.2) и исследование физических свойств полученных решений дано в работе [2].

Другой подкласс решений с совершенно иными физическими свойствами получается, если в начальных условиях считать равными нулю диагональные элементы матрицы U, а матрицу a_+ — по-прежнему диагональной. Тогда из уравнений (2.5), во-первых, следует сохранение начальной структуры матриц, во-вторых, однозначно определяются оставшиеся компоненты

$$\begin{aligned} &a_{12} = u_{11} = u_{22} = 0, \qquad a_{11} = a_{22} = a \\ &u_{12} = -u_{21} = u, \qquad u = \pm\sqrt{2}a \end{aligned} \tag{3.6}$$

Физический смысл стационарного решения (3.6) элементарен. Вещество с некоторой постоянной угловой скоростью вращается вокруг оси z, силовые линии магнитного поля являются концентрическими окружностями. При этом плотность электрического тока соответствует угловой скорости вращения, так что во всех точках пространства одна другую компенсируют центробежная и пондеромоторная силы

$$\frac{1}{c}[\mathbf{j}\cdot\mathbf{B}] + \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \tag{3.7}$$

Тождество (3.7) легко доказать, если учесть, что $4\pi\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{B}$ и воспользоваться соотношениями (1.2), (2.1), (2.3), (2.4) и (3.2).

4. Можно сказать, что рассмотренное решение полезно прежде всего для исследования плоской кумуляции вещества в окрестности нулевой линии магнитного поля. В конкретной граничной магнитогидродинамической задаче данное решение при некоторых ограничениях можно использовать в качестве разложения вблизи нулевой линии. Особенно важно такое разложение при наличии кумулятивной особенности общего решения, получаемого с помощью численных методов.

Большое значение, в частности, для физического истолкования решения имеет характер кумулятивной особенности. Интересно, что сравнительно просто установить главные члены временной зависимости всех величин вблизи момента кумуляции τ_k. Подстановкой в полные уравнения (2.5) можно убедиться , что частное решение

$$a_+ = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{3}\dfrac{\beta}{\gamma}\Delta^{-4/3}, & \dfrac{2\beta}{\sqrt{3\gamma}}\Delta^{-1/3} \\ \dfrac{2\beta}{\sqrt{3\gamma}}\Delta^{-1/3}, & \beta\Delta^{2/3} \end{Vmatrix}, \qquad U = \begin{Vmatrix} -\dfrac{2}{3}\Delta^{-1}, & \sqrt{\dfrac{\gamma}{3}} \\ \sqrt{\dfrac{\gamma}{3}}, & \gamma\Delta \end{Vmatrix} \tag{4.1}$$

$$\rho = \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\gamma^2}\Delta^{-2/3}$$

---

[1] Частный случай равенства $\xi_0 = \eta_0$ не представляет собой исключения, так как при выполнении неравенства $\xi_0' > \eta_0'$ в близкие к $\tau = 0$ моменты времени неравенства $\xi'' > 0$ и $\eta'' < 0$ будут справедливы. Далее все рассуждение повторяется дословно. В действительности выделенным случаем оказывается решение с начальными условиями $\xi_0 = \eta_0$ и $\xi_0' = \eta_0'$. Такое решение не имеет особенности и соответствует равномерному расширению или сжатию вещества без участия пондеромоторных сил ($j_z = 0$).

где $\Delta = \tau_k - \tau$, а β, γ — произвольные постоянные, удовлетворяет всем уравнениям с точностью до членов второго порядка малости по отношению к основным. Для частного решения (4.1) размерные физические величины из (1.2) и (2.1) ведут себя следующим образом:

$$v_x \sim \Delta^{-1}x, \quad B_x \sim \Delta^{-1/3}x, \quad B_y \sim \Delta^{-4/3}x \tag{4.2}$$
$$\rho \sim \Delta^{-2/3}, \quad j_z \sim \Delta^{-4/3}, \quad E_z \sim \Delta^{-7/3}x^2$$

Следует вообще считать, что кумулятивное решение свойственно не только подклассу (3.1) (3.2). Оно в более широком смысле удовлетворяет и полной системе уравнений (2.6), как приведенное выше частное решение (4.1) (поскольку в (4.1) фигурируют недиагональные элементы матриц a_+, U).

В заключение отметим, что решение (2.1), относящееся к неограниченной физической системе, путем некоторых преобразований переносится на ограниченный цилиндрической поверхностью объем вещества [5]. Можно также на основе (4.1) перейти к найденному ранее похожему решению в случае несжимаемой жидкости [6]. В последнем случае необходимо учитывать в уравнениях (1.3) пространственную зависимость давления $p \sim bx^2 + cy^2 + d$ и рассматривать ограниченный объем вещества с заданным на его поверхности давлением.

Автор благодарит М. А. Леонтовича и С. И. Сыроватского за ценные обсуждения и Л. В. Овсянникова за критику и ряд полезных замечаний.

Поступила 7 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г. О движениях с однородной деформацией в магнитной гидродинамике. Докл. АН СССР, 1958, т. 120, № 5, стр. 984.
2. Имшенник В. С., Сыроватский С. И. Двумерные течения идеально проводящего газа в окрестности нулевой линии магнитного поля. ЖЭТФ, 1967, т. 52, вып. 4, стр. 990.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Гостехиздат, 1948.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1954.
5. Сыроватский С. И. Магнитогидродинамическая кумуляция вблизи нулевой линии поля. ЖЭТФ, 1968, т. 54, вып. 5, стр. 1422.
6. Chapman S., Kendall P. C. Liquid instability and energy transformation near a magnetic neutral line: a soluble non-linear hydromagnetic problem. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1963, vol. 271, No. 1347, p. 435.