ОБ УСЛОВИЯХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЛИНИЙ РАЗРЫВА НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Г. В. Иванов *(Новосибирск)*

При построении статически возможных напряженных состояний [1] в идеально пластическом теле, испытывающем плоскую деформацию, важное значение имеют условия пересечения в одной точке прямолинейных линий разрыва напряжений, разделяющих четыре области постоянных напряжений (фиг. 1). Эти условия изучались Винцером и Карррьером [2], Прагером и Ходжем [3], но установленные ими соотношения между углами α, β, γ не охватывают всех возможных случаев.

1. На линии разрыва напряжений имеют место соотношения [1]

$$\theta_+ = -\theta_- + 2\varphi \pm m\pi, \qquad \sigma_+ = \sigma_- + 2k \sin 2(\theta_- - \varphi) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.1}$$

где $\sigma = 1/2(\sigma_x + \sigma_y)$ — среднее давление; k — предел текучести при чистом сдвиге; θ — угол между осью x и первым семейством характеристик; φ — угол между осью x и линией разрыва, положительными считаются углы, отсчитываемые от оси x против часовой стрелки; индексы минус и плюс соответствуют разным сторонам линии разрыва.

Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением (фиг. 1) углов α, β, γ, удовлетворяющих неравенствам

$$-\pi < \alpha < \beta < \gamma < \pi \tag{1.2}$$

Пусть в области *1* известно θ_1. Для того чтобы соотношения (1.1) были выполнены на всех четырех, указанных на фиг. 1, линиях разрыва, необходимо

$$\sin 2(-\theta_1 - 2\gamma + 2\beta - \alpha) + \sin 2(\theta_1 + 2\gamma - \beta) + \sin 2(-\theta_1 - \gamma) + \sin 2\theta_1 = 0$$

$$2\gamma + 2\alpha - 2\beta = \pm i\pi \qquad (i = 0, 1) \tag{1.3}$$

при $i \geqslant 2$ неравенства (1.2) не выполняются). Соотношения между θ_1 и α, β, γ, при которых удовлетворяются уравнения (1.3), будут существенно различными в зависимости от того, будет ли i равным нулю или единице. Соотношения, установленные в работах [2,3], соответствуют только случаю $i = 0$.

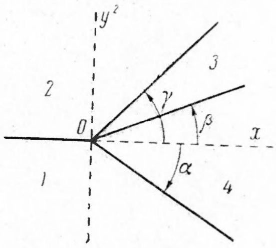
2. В случае, когда $i = 0$, соотношнеия [2]

$$\gamma = \beta - \alpha, \qquad 2\theta_1 = 2\alpha - \beta \pm n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.1}$$

являются единственно возможными соотношениями между θ_1 и α, β, γ, при которых уравнения (1.3) удовлетворяются.

3. В случае, когда $i = 1$, уравнения (1.3) принимают вид

$$\sin 2(-\theta_1 + \alpha) + \sin 2(\theta_1 + \beta - 2\alpha) +$$
$$+ \sin 2(\theta_1 - \alpha + \beta) + \sin 2\theta_1 = 0 \tag{3.1}$$
$$\gamma = \beta - \alpha \pm \tfrac{1}{2}\pi$$



Фиг. 1

Здесь, в отличие от случая, когда $i = 0$, не удается указать всех возможных соотношений между углами θ_1 и α, β, γ, при которых уравнения (3.1) удовлетворяются, но можно указать различные частные случаи таких соотношений.

Так, принимая, что в (3.1) в первом уравнении слагаемые попарно уничтожаются, например, первое слагаемое равно второму с противоположным знаком, третье — четвертому с противоположным знаком и т. п., получим соотношения

$$\alpha = \tfrac{1}{4}\pi, \qquad \gamma = \beta + \tfrac{1}{4}\pi, \qquad 2\theta_1 = \tfrac{1}{4}\pi - \beta + n\pi \tag{3.2}$$

$$\alpha = \beta - \tfrac{3}{4}\pi, \qquad \gamma = \tfrac{1}{4}\pi, \qquad 2\theta_1 = \alpha - \tfrac{1}{2}\pi \pm n\pi \tag{3.3}$$

$$\alpha = -\tfrac{\pi}{4}, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \tfrac{3}{4}\pi, \qquad \theta_1 \text{ — любое} \tag{3.4}$$

$$\alpha = -\tfrac{3}{4}\pi, \quad \gamma = \beta + \tfrac{1}{4}\pi, \qquad \beta \neq -\tfrac{1}{4}\pi, \qquad 2\theta_1 = \tfrac{1}{4}\pi - \beta + n\pi \tag{3.5}$$

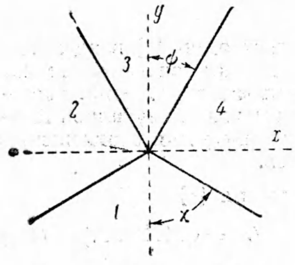
$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

4. Прагер и Ходж [3] изучали условия пересечения в случае, когда все поле напряжений и, следовательно, линии разрыва имеют ось симметрии (фиг. 2, ось y — ось симметрии). Они нашли, что такое пересечение возможно при

$$\psi + \chi = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \theta_1' = \tfrac{1}{4}\pi \pm n\tfrac{1}{2}\pi \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.1}$$

(штрихами будем отмечать углы θ, соответствующие указанной на фиг. 2 системе координат). Условия (4.1) есть частный случай условий (2.1).

Легко видеть, что линии разрыва, пересекающиеся в одной точке при условиях (3.2) в случае, когда $\beta = \pi/2$, в условиях (3.3) — (3.5), симметричны относительно оси так, что



Фиг. 2

$$\psi + \chi = \frac{3}{4}\pi \quad \left(\psi = \frac{1}{8}\pi, \ \chi = \frac{5}{8}\pi\right) \tag{4.2}$$

$$\theta_1' = \frac{1}{4}\pi \pm n\frac{1}{2}\pi, \qquad \psi + \chi = \frac{1}{4}\pi$$

$$\theta_1' = \frac{1}{4}\pi \pm n\frac{1}{2}\pi \tag{4.3}$$

$$\psi + \chi = \frac{3}{4}\pi, \qquad \psi = \chi, \qquad \theta_1' \text{ — любое} \tag{4.4}$$

$$\psi + \chi = \frac{3}{4}\pi \quad \left(\psi, \chi \neq \frac{1}{4}\pi\right), \qquad \theta_1' = \frac{1}{4}\pi \pm n\frac{1}{2}\pi$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.5}$$

Поля напряжений при пересечениях, удовлетворяющих условиям (4.2), (4.3), (4.5), а также условиям (4.4) в случае, когда $\theta_1' = {}^1/_4\pi \pm {}^1/_2 n\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, будут осесимметричными. Замечательной особенностью этих полей является то, что

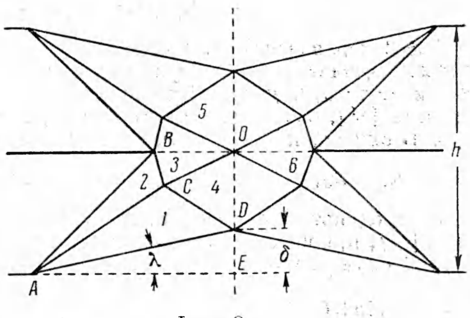
$$\theta_1' = \theta_3' \pm \frac{1}{2}\pi \pm n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

т. е. при растяжении (сжатии) в области *1* (фиг. 2) в направлении оси x (оси y), в области *3* в направлении оси x (оси y) реализуется сжатие (растяжение). В поле напряжений при пересечении, удовлетворяющем условиям (4.1),

$$\theta_1' = \theta_3' \pm n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

т. е. в направлении оси x (оси y) в областях *1* и *3* реализуется либо сжатие, либо растяжение.

5. На фиг. 3 в качестве примера использования рассмотренных выше условий пересечения линий разрыва напряжений приведено статически возможное поле напряжений при чистом изгибе полосы с двумя симметричными угловыми надрезами $\lambda = 0.2086$, $\delta/h = 0.17615$.



Фиг. 3

Области *1*, *2*, *3*, *4* образуют пересечение линий разрыва, удовлетворяющее условиям (2.1), области *5*, *3*, *4*, *6* — пересечение, удовлетворяющее условиям (4.4),

$$\angle ADE = \frac{1}{2}\pi - \lambda, \qquad \angle CDA = \angle CDO = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\lambda, \qquad \angle COD = \frac{3}{8}\pi$$

$$\angle COB = \angle CAD = \frac{1}{8}\pi, \qquad \angle BCO = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}\lambda$$

Нижняя оценка предельной величины изгибающего момента, определяемая полем напряжений на фиг. 3, есть

$$\frac{M}{M_0} = 1.2071, \qquad M_0 = 2kd^2, \qquad d = \frac{h - 2\delta}{2}$$

Верхняя оценка предельной величины изгибающего момента, определяемая кинематически возможным полем напряжений, построенным в работе [4], есть

$$\frac{M}{M_0} = 1.2086$$

Поступила 21 XI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
2. Winzer A., Carrier G. F. The interaction of discontinuity surfaces in plastic fields of stress. J. Appl. Mech., 1948, vol. 15, № 3.
3. Прагер В. и Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. ИИЛ, 1956.
4. Грин А. Пластическое течение надрезанных полос при изгибе. Механика. Сб. перев., 1955, № 4.