ПМТФ, № 1, 1974

УДК 539.371

ОБ ЭФФЕКТЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

А. Ф. Ревуженко, Е. И. Шемякин

(Новосибирск)

Обсуждается эффект поперечных деформаций для упругих и пластических тел. Показано, что для пластических тел поперечные деформации имеют ту же природу, что и продольные — поворот упругих элементов, вырезанных линиями Людерса. Для упругих тел продольные (активные) и поперечные (пассивные) деформации имеют различную природу и появление внутренних усилий связано с градиентами активных, а не полных смещений. В соответствии с этим уравнения состояния записываются в форме связей напряжений с активными деформациями и активных деформаций с пассивными.

Показано, что связь напряжений и деформаций, вычисленных по произвольной площадке, имеет физический смысл только для некоторых (определяющих) площадок. Деформации, вычисленные на остальных площадках, физического смысла не имеют, их роль сводится к инвариантному описанию процессов, происходящих на определяющих площадках. Поэтому для описания процессов, происходящих на всех площадках одного тензора деформаций недостаточно. Показано, что в случае линейно-упругого тела для такого описания достаточно тензора активных и тензора пассивных деформаций.

1. Рассмотрим деформирование упругого твердого тела. Математическая теория упругости строится обычно следующим образом [1]:

1) вводятся понятия тензоров напряжений и деформаций, причем тензор деформаций по определению характеризует изменение расстояний между парами близких точек упругого тела;

2) утверждается, что тензор напряжений есть некоторая функция тензора деформаций и постулируется вид этой функции.

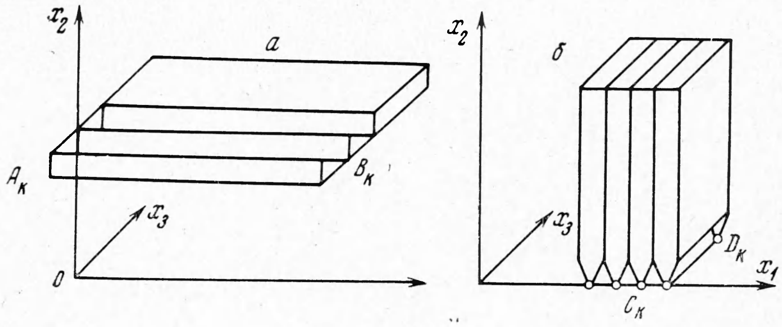
С физической точки зрения такой путь построения модели упругого тела либо противоречив, либо неявно содержит некоторые дополнительные гипотезы. Действительно из последней гипотезы и определения тензора деформаций можно заключить, что единственной причиной возникновения внутренних усилий в теле является изменение расстояний между всевозможными парами его близких точек. Отсюда следует, что по известным деформациям усилия на любой площадке можно вычислять двумя способами: либо через функцию, введенную гипотезой 2), либо через функции, характеризующие взаимодействия материальных точек упругого тела.

Если, следуя [2], предположить, что взаимодействуют только пары близких точек, то получится модель упругого тела с одним параметром C, если предположить, что взаимодействуют четверки близких точек, одна из которых лежит в вершине прямоугольного репера, а три другие — на его сторонах, то в изотропном случае получится модель тела с двумя параметрами (E и ν). Если E и ν постоянны, то оба способа определения напряжений приводят к одним и тем же результатам. Если E и ν меняются в процессе деформирования, то внутренние усилия, вычисленные вторым способом, не образуют тензора, и гипотезы 1), 2) противоречат заключенному в них физическому смыслу деформирования.

Гипотезу 2) можно изменить следующим образом: предположим, что только на некоторых (определяющих) площадках внутренние усилия возникают вследствие изменения расстояний между близкими точками тела; усилия и деформации на остальных площадках должны вычисляться по правилам тензорного проектирования через усилия и деформации на определяющих площадках. Следовательно, только на определяющих площадках связь напряжений и деформаций имеет физический смысл, на всех остальных площадках эта связь имеет только формальный смысл. Это можно интерпретировать следующим примером: пусть кинематика деформирования сплошной среды определяется равенствами

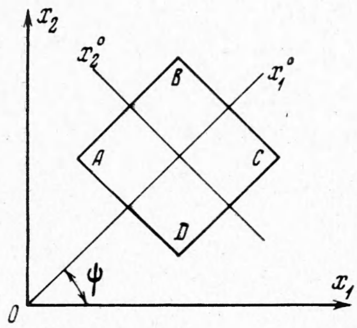
$$u_1 = \gamma (t) x_2, \quad u_2 \equiv 0, \quad u_1 \equiv 0 \tag{1.1}$$

где u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора смещений, $\gamma (t)$ — гладкая функция времени.



Фиг. 1

Движение (1.1) может быть реализовано тонкими жесткими пластинами $A_k B_k$, между которыми действуют определенные силы (фиг. 1, *а*). Для такой сплошной среды физический смысл имеют сдвиги только на площадках, параллельных плоскости $0x_1x_3$. Сдвиги и удлинения на других площадках имеют формальный смысл. Поэтому связь напряжений и деформаций имеет физический смысл только для площадок, параллельных плоскости $0x_1x_3$, которые будут в данном случае определяющими.



Фиг. 2

При малых значениях $|\gamma (t)|$ деформирование (1.1) можно также реализовать вращением тонких жестких пластин вокруг точек C_k, D_k (фиг. 1, *б*). В этом случае определяющими будут площадки, параллельные плоскости $0x_2x_3$.

Вопрос об отыскании определяющих площадок в рамках феноменологических представлений однозначного решения не имеет. Для его решения необходимы данные о физическом механизме деформирования исследуемого материала.

Предположим, что для упругого материала определяющими площадками являются площадки главных напряжений. Рассмотрим плоский случай деформирования. Предположим также, что до деформации упругое тело является однородным и изотропным. Выделим элемент $АВСД$ и рассмотрим его поведение под действием внешних нагрузок (фиг. 2). Если к сторонам $АД$ и $ВС$ приложить нормальные усилия, то переместятся не только стороны $АД$ и $ВС$, но и стороны $АВ$ и $ДС$. Перемещение площадки $АД$

будем называть активным; оно вызывается силой, действующей на эту же площадку. Перемещение площадки AB назовем пассивным, так как площадка AB свободна от напряжений. Внутренние усилия в теле возникают вследствие появления градиентов активных, а не полных смещений. В работе [3], содержащей подробную библиографию, исследуются причины возникновения пассивных смещений.

При классическом подходе достаточно считать, что единственной причиной пассивного смещения является активное смещение ортогональной площадки. В общем случае смещение каждой точки элемента $ABCД$ имеет две составляющие — активную $\bar{q}$ и пассивную $\bar{p}$. Введем понятия активной и пассивной деформаций элемента $ABCД$

$$q_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i}\right), \quad p_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \frac{\partial p_i}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1, 2 \tag{1.2}$$

Здесь ε_{ij}, p_{ij}, q_{ij}, i, $j = 1, 2$ — компоненты полной пассивной и активной деформаций.

В системе координат $0x_1^\circ x_2^\circ$ (фиг. 2) выполняются равенства

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij}^\circ = p_{ij}^\circ + q_{ij}^\circ, \quad \sigma_{12}^\circ = 0, \; p_{12}^\circ = 0, \quad q_{12}^\circ = 0 \\ q_{11}^\circ = \sigma_{11}^\circ / E_1, \quad q_{22}^\circ = \sigma_{22}^\circ / E_2, \quad p_{11}^\circ = -\nu_{12} q_{22}^\circ, \\ p_{22}^\circ = -\nu_{21} q_{11}^\circ\end{gathered} \tag{1.3}$$

В исходной системе координат $0x_1x_2$ уравнения (1.3) преобразуются к виду

$$\varepsilon_{11} = p_{11} + q_{11}, \quad \varepsilon_{22} = p_{22} + q_{22}, \quad \varepsilon_{12} = p_{12} + q_{12} \tag{1.4}$$

$$\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \operatorname{tg} 2\psi, \quad \frac{2p_{12}}{p_{11} - p_{22}} = \operatorname{tg} 2\psi, \quad \frac{2q_{12}}{q_{11} - q_{22}} = \operatorname{tg} 2\psi$$

$$\begin{gathered}\frac{q_{11} + q_{22}}{2} + \frac{q_{11} - q_{22}}{2}\cos 2\psi + q_{12}\sin 2\psi = \\ = \frac{1}{E_1}\left[\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\cos 2\psi + \sigma_{12}\sin 2\psi\right]\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{q_{11} + q_{22}}{2} - \frac{q_{11} - q_{22}}{2}\cos 2\psi - q_{12}\sin 2\psi = \\ = \frac{1}{E_2}\left[\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\cos 2\psi - \sigma_{12}\sin 2\psi\right]\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{p_{11} + p_{22}}{2} + \frac{p_{11} - p_{22}}{2}\cos 2\psi + p_{12}\sin 2\psi = \\ = -\nu_{12}\left[\frac{q_{11} + q_{22}}{2} - \frac{q_{11} - q_{22}}{2}\cos 2\psi - q_{12}\sin 2\psi\right]\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{p_{11} + p_{22}}{2} - \frac{p_{11} - p_{22}}{2}\cos 2\psi - p_{12}\sin 2\psi = \\ = -\nu_{21}\left[\frac{q_{11} + q_{22}}{2} + \frac{q_{11} - q_{22}}{2}\cos 2\psi + q_{12}\sin 2\psi\right]\end{gathered}$$

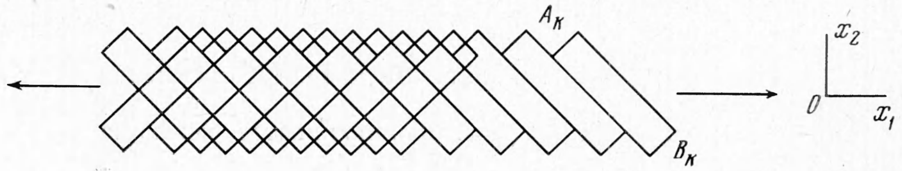
Активные и пассивные деформации кинематически неразличимы, поэтому условие неразрывности должно выполняться только для суммы $p_{ij} + q_{ij}$

(1.5) $$\partial^2\varepsilon_{11} / \partial x_2^2 + \partial^2\varepsilon_{22} / \partial x_1^2 = 2\partial^2\varepsilon_{12} / \partial x_1 \partial x_2$$

Уравнения равновесия

(1.6) $$\partial\sigma_{11} / \partial x_1 + \partial\sigma_{12} / \partial x_2 + \rho X_1 = 0,$$
$$\partial\sigma_{12} / \partial x_1 + \partial\sigma_{22} / \partial x_2 + \rho X_2 = 0$$

где ρX_1, ρX_2 — компоненты массивных сил, σ_{ij} — напряжения, замыкают систему (1.4), (1.5).



Фиг. 3

Для физически нелинейных материалов коэффициенты E_i, ν_{ij} зависят от напряжений. Если $E_1 \not\equiv E_2$ или $\nu_{12} \not\equiv \nu_{21}$, то упругое тело в результате деформирования становится анизотропным. Вопрос о поведении такого тела при последующем сложном догружении требует специального экспериментального исследования. Если $E_1 \equiv E_2 = E$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$, то уравнения (1.4) можно упростить

(1.7) $$\varepsilon_{11} = p_{11} + q_{11}, \quad \varepsilon_{22} = p_{22} + q_{22}, \quad \varepsilon_{12} = p_{12} + q_{12}$$
$$q_{11} = \sigma_{11} / E, \quad q_{22} = \sigma_{22} / E, \quad q_{12} = \sigma_{12} / E$$
$$p_{11} = -\nu q_{22}, \quad p_{22} = -\nu q_{11}, \quad p_{12} = +\nu q_{12}$$

Если $E = \text{const}$, $\nu = \text{const}$, то можно предположить, что все площадки являются определяющими. В этом случае для определяющей площадки необходимо ввести понятия активного и пассивного сдвигов q_{12}, p_{12}, причем

$$q_{12} = \sigma_{12} / E, \quad p_{12} = \nu q_{12}$$

2. Рассмотрим роль эффекта поперечных деформаций для пластических тел. Эксперименты показывают, что механизм пластической деформации связан с движением дислокаций в определенных направлениях [4], т. е. со сдвигами материала по некоторым (определяющим) площадкам. Для пластических материалов роль определяющих играют площадки наибольшего сдвига. На фиг. 3 схематически изображено пластическое растяжение несжимаемой плоской полосы. Продольная и поперечная деформации отражают один и тот же процесс — поворот элементов A_kB_k. При повороте элементов их проекция на ось $0x_1$ возрастает, а на ось $0x_2$ убывает. Первое дает деформацию удлинения, второе — поперечную деформацию. Для пластических тел (включая сжимаемые) продольная и поперечная деформации равноправны, и формальное разделение деформаций на активную и пассивную составляющие не имело бы физического смысла.

При плоском предельном деформировании несвязных сыпучих материалов роль определяющих площадок играют неортогональные площадки скольжения. Деформирование происходит вследствие изменения объема и скольжения материала по определяющим площадкам. Продольная и поперечная деформации имеют общее происхождение, и разделение деформаций на активную и пассивную составляющие также нецелесообразно. Анализируя процессы на определяющих площадках и используя правила тензорного проектирования, можно построить модель несвязного грунта.

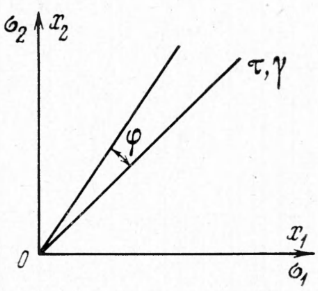
3. Трехмерный случай деформирования упругих материалов рассматривается аналогично плоскому. При пространственном деформировании пластических (сыпучих) материалов различаются случаи неполной и полной пластичности [5]. В случае полной пластичности поперечные деформации имеют ту же природу, что и продольные. В случае неполной пластичности по направлению действия упругой связи и ортогональным направлениям можно выделить активную и пассивную составляющие и связывать соответствующие напряжения только с активными деформациями. Деформирование в плоскости, ортогональной упругому направлению, будет аналогично плоскому пластическому деформированию.

4. Анализ эффекта поперечных деформаций приводит к следующим выводам:

1) для материалов, механизм деформирования которых связан с изменением расстояний между близкими материальными точками (т. е. с растяжением — сжатием волокон) продольные (активные) и поперечные (пассивные) деформации имеют различное происхождение. Внутренние усилия в таких материалах возникают вследствие появления градиентов активных, а не полных смещений, уравнения деформирования этих материалов необходимо записывать в форме, аналогичной (1.7);

2) для материалов, механизм деформирования которых связан со сдвигами, продольные и поперечные деформации имеют одинаковое происхождение. Процесс деформирования таких материалов необходимо выражать в терминах полных деформаций. Тензор деформаций (точнее его девиатор) необходимо интерпретировать как инвариантную характеристику сдвигов на различных площадках;

3) возможны случаи, когда в различных направлениях механизм деформирования материала различен. В соответствии с этим поперечная деформация будет складываться из частей, имеющих различное происхождение;



Фиг. 4

4) если процесс деформирования тела выражается через некоторую функцию (функционал) тензоров напряжений и деформаций, то эта функция (функционал) имеет физический смысл только для некоторых (определяющих) площадок и направлений в них. Связь напряжений и деформаций на остальных площадках самостоятельного физического смысла не имеет, напряжения и деформации на них служат для инвариантного описания процессов, происходящих на определяющих площадках. Уравнения деформирования необходимо записывать в форме, аналогичной (1.3).

Использование тензоров напряжений и деформаций позволяет в инвариантной форме описать процессы, происходящие только на определяющих площадках. Процессы, происходящие на остальных площадках, при таком описании остаются скрытыми. (Последнее не относится к самим компонентам тензора напряжений). Справедливость вывода 4) для упругих тел показана в п. 1, для пластических тел вывод 4) следует из примера.

Рассмотрим плоское деформирование пластического материала при пропорциональном нагружении (фиг. 4). Пусть τ, γ — наибольшие касательное напряжение и сдвиг. Тогда уменьшение модуля $\mu = \partial\tau / \partial\gamma$ означает ослабление материала по площадке наибольшего сдвига. На площадке $\varphi \neq 0$ касательное напряжение и сдвиг равны $\tau \cos 2\varphi$ и $\gamma \cos 2\varphi$. Предположим теперь, что тензоры напряжений и деформаций описывают процессы, происходящие на всех площадках. Следовательно, ослабление площадки φ характеризуется модулем сдвига

$$\mu_\varphi = \partial(\varepsilon \cos 2\varphi) / \partial(\gamma \cos 2\varphi) = \mu \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует, что материал остается изотропным. Эксперименты [6] показывают обратное. Следовательно, предположение неверно и вывод 4) справедлив и для пластических материалов. Отметим, что проблема произвольного нагружения сплошных сред сводится к адекватному описанию процессов, происходящих на всех площадках, т. е. к определению знаменателя в (4.1). С помощью одного тензора деформаций это сделать невозможно. В случае линейно-упругого тела для решения этой задачи оказалось достаточно тензора активных деформаций. В более общих случаях вопрос остается открытым.

Поступила 11 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. М., «Высшая школа», 1971.
2. *Тимошенко С. П.* История науки о сопротивлении материалов. М., Гостехиздат, 1957.
3. *Кузьменко В. А.* Новые схемы деформирования твердых тел. Киев, «Наукова думка», 1973.
4. *Хирт Дж., Лоте И.* Теория дислокаций. М., Атомиздат, 1972.
5. *Христианович С. А., Шемякин Е. И.* К теории идеальной пластичности. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.
6. *Жуков А. М., Работнов Ю. Н.* Исследование пластических деформаций стали при сложном нагружении. Инж. сб., 1954, т. 18.