

УДК 624.121

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ВЫРАБОТКИ,  
ПРОЙДЕННОЙ В ГЛУБОКОЗАЛЕГАЮЩЕМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ПЛАСТЕ**

**Р. Л. Салганик<sup>1</sup>, А. А. Мищенко<sup>2</sup>, А. А. Федотов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,  
E-mail: r-salganik@yandex.ru, a\_misch@mail.ru,  
просп. Вернадского, 101, 119526, г. Москва, Россия*  
<sup>2</sup>*АНО "НТО "ИТИН", E-mail: true-ten@yandex.ru,  
Дмитровский проезд, 10, 127422, г. Москва, Россия*

При помощи подхода, использующего метод сращиваемых асимптотических разложений с удержанием лишь главного члена асимптотики, в условиях плоской деформации проведено моделирование напряженного состояния массива горных пород с горизонтальной дневной поверхностью, который содержит горизонтальный пласт с протяженной щелевидной очистной выработкой. Предполагается упругость, однородность, изотропность массива и упругое, а затем упругопластическое деформирование пласта. В случае упругопластического деформирования пласта длина призабойной зоны пластического деформирования считается намного больше мощности пласта и намного меньше длины выработки.

*Пласт, выработка, модель Баренблатта – Христиановича, модель трещины Прандтля*

---

Задача об упругом деформировании однородного и изотропного породного массива с горизонтальной дневной поверхностью и жесткопластическим пластом постоянной мощности рассмотрена в работе [1]. При этом протяженности пласта и забоя предполагались бесконечными, а выработка щелевидной формы моделировалась математическим разрезом, противоположные берега которого, отождествляемые с кровлей и почвой выработки, представлялись смыкающимися в некоторой точке позади забоя. Точка их смыкания находилась в ходе решения задачи из условия, что смыкание кровли и почвы выработки происходит плавно. В [1] принималось, что: 1) прилегающий к забою участок пласта деформируется идеально-пластически так, что его напряженное состояние соответствует возникающему в сдавливаемом между абсолютно жесткими плитами бесконечном идеально-пластическом слое, поперечное сечение которого, соответствующее забою, в среднем свободно от напряжений; 2) в остальной своей части пласт абсолютно жесткий. Длина призабойной пластической зоны пласта предполагалась намного меньшей длины выработки, т. е. расстояния между забоем и точкой смыкания ее кровли и почвы. Эта длина определялась в [1] исходя из следующего интегрального критерия: (а) возникающее вследствие создания выработки дополнительное поперечное напряжение в пласте, найденное в предположении об абсолютной жесткости пласта на всем его протяжении и возрастающее до

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00855).

бесконечности по мере приближения вдоль пласта перед забоем к последнему, должно быть заменено на некотором призабойном участке пласта напряжением, которое соответствует идеально-пластическому деформированию пласта; (б) сечение пласта, где проходит граница между его пластической и абсолютно жесткой частями, определяется из условия, что вертикальная нагрузка на пласт в области его пластического деформирования статически эквивалентна той, которая действовала бы на пласт в этой области, если бы он был всюду абсолютно жестким. Прикладное значение модели Баренблатта – Христиановича рассмотрено в [2], где эта модель называется моделью Христиановича.

Далее, следуя в основном [3], рассматривается модель поведения выработки в массиве горных пород, частично аналогичная модели Баренблатта – Христиановича, но в предположениях, что: 1) пласт всюду деформируется упруго и он намного податливее массива; 2) пласт деформируется пластически в призабойной зоне и упруго вне ее. С учетом предполагаемой относительной тонкости пласта его упругость рассматривается аналогично теории изгиба балки (или пластины) на упругом основании.

В первом случае устанавливаются ограничения, налагаемые на значения параметров задачи, при которых реализуется этот случай. Отметим, что в работе [4] предложен полуэмпирический способ учета упругого деформирования пласта в подобном случае. Во втором случае решается задача об упругопластическом деформировании пласта в предположении о существовании достаточно протяженной призабойной пластической зоны в пласте.

#### ЗАДАЧА I. СЛУЧАЙ ПЛАСТА, ДЕФОРМИРУЮЩЕГОСЯ УПРУГО

Используем систему декартовых координат с началом в точке смыкания кровли и почвы выработки (рис. 1). Смыкание кровли и почвы выработки предполагается происходящим плавно так, что ось  $y$  является их общей касательной, а в точке  $y_0$  находится забой. Предположим, что  $y_0 \gg 2h$ , т. е. выработка имеет вид весьма узкой щели ( $2h$  — мощность пласта).

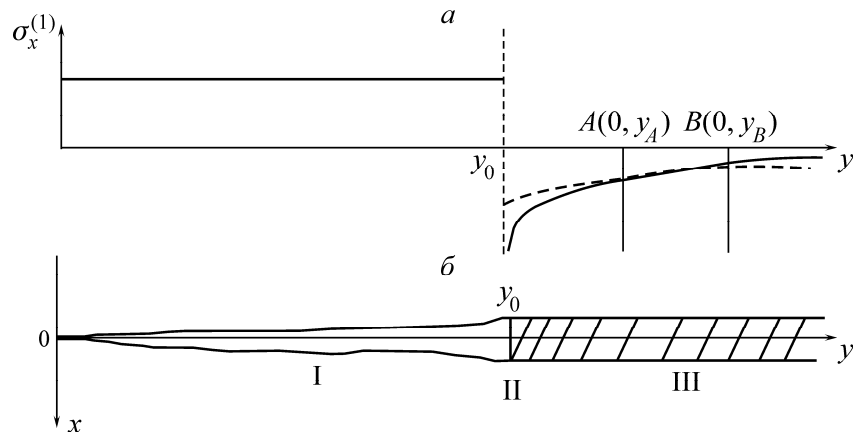


Рис. 1.  $a$  — распределение возмущений напряжений  $\sigma_x^{(1)}$  в массиве с пластом, содержащим длинную выработку в случаях, когда пласт предполагается упругим (штриховая линия) и абсолютно жестким (сплошная линия); слева — распределение по кровле и почве выработки дополнительных напряжений  $\gamma H$ ;  $b$  — схема задачи о пласте с выработкой в массиве: I — выработка, II — забой, III — пласт

Пусть пласт значительно податливее содержащего его массива, горизонтален и залегает под дневной поверхностью на глубине  $H$ , достаточно большой для того, чтобы по сравнению с ней допустимо было пренебречь не только мощностью пласта, но и длиной находящейся

в нем выработки. Тогда можно считать содержащий выработку пласт залегающим в бесконечном упругом массиве (однородном и изотропном), нагруженном на бесконечном удалении от пласта нормальным постоянным сжимающим напряжением (взятым с обратным знаком горному давлению), которое действовало бы на глубине залегания рассматриваемого пласта с выработкой в отсутствии последнего, т. е. напряжением, равным  $-\gamma H$ , где  $\gamma$  — средний удельный вес пород массива. Кроме того, этот массив предполагается находящимся под действием горизонтальных сжимающих напряжений, влиянием которых на возмущение напряженного состояния, вызываемое выработкой, можно пренебречь вследствие относительной тонкости последней.

Принимается, что реализуется состояние плоской деформации, в котором вызванное проведением выработки возмущение исходного упругого поля можно считать зависящим лишь от координат  $x$  и  $y$ .

Решение задачи для полных напряжений можно представить как сумму решения для напряжений  $\sigma_x^{(0)}$ ,  $\sigma_y^{(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)}$  аналогичной задачи для такого же массива при отсутствии в нем пласта с выработкой (базовая задача) и решения для исчезающих на бесконечности возмущений напряжений или дополнительных напряжений  $\sigma_x^{(1)}$ ,  $\sigma_y^{(2)}$ ,  $\tau_{xy}^{(1)}$  задачи для массива, содержащего пласт с выработкой. При этом принимается следующее: (а) крепь в выработке отсутствует, поэтому к кровле и почве (подошве) выработки (между забоем и точкой их смыкания) приложены дополнительные растягивающие массив напряжения  $\gamma H$ ; (б) смещения кровли и почвы пласта вследствие деформирования достаточно малы по сравнению с его мощностью. Это позволяет решать задачу методом последовательных приближений. В нулевом приближении пласт предположим абсолютно жестким и воспользуемся решением этой задачи, найденным в [1]. Эффект упругого деформирования пласта учтем только в первом приближении.

Решение базовой задачи для основного напряжения имеет вид

$$\sigma_x^{(0)} = -\gamma(x + H). \quad (1)$$

На рис. 1 показано соответствующее решению этой задачи распределение по пласту поперечного дополнительного напряжения в случаях, когда пласт предполагается абсолютно жестким и упругим. Там же отмечены точка  $A$  с координатами  $(0, y_A)$  и точка  $B$  с координатами  $(0, y_B)$  такие, что при  $y < y_B$  распределение поперечного дополнительного напряжения может быть представлено как пропорциональное  $y^{-1/2}$  (абсолютно жесткий пласт) и в некотором интервале при  $y > y_A$  — как пропорциональное  $y^{-1/2}$  (упругий пласт). Приближенное решение задачи I, полученное методом сращиваемых асимптотических разложений с удержанием лишь главных членов этих разложений аналогично тому, как это было сделано для трещины в работах [5, 6], существует только при условии, что  $y_B$  значительно превышает  $y_A$ .

Пренебрежем сначала деформируемостью пласта, считая его абсолютно жестким, и воспользуемся соответствующим результатом решения задачи, полученным в [1]. Вызванное проведением выработки дополнительное напряжение  $\sigma_x^{(1)}$  можно считать одинаковым для кровли и почвы:

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{-y_0 \gamma H}{\sqrt{y - y_0} (\sqrt{y} + \sqrt{y - y_0})}. \quad (2)$$

Видно, что напряжение  $\sigma_x^{(1)}$  меняется при удалении от забоя на расстояния, намного меньшие длины выработки  $y_0$ , обратно пропорционально квадратному корню из расстояния от рассматриваемого сечения пласта до забоя и при  $y \rightarrow y_0$  имеет вид

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{N_0}{\sqrt{y - y_0}}, \quad (3)$$

где

$$N_0 = -\gamma H \sqrt{y_0}. \quad (4)$$

Величина  $y_0$  определяется из [1]:

$$y_0 = \frac{Eh}{\pi\gamma H(1 - \nu^2)}.$$

Отметим далее, что  $N_0 = K_I (2\pi)^{-1/2}$ , где  $K_I$  — коэффициент интенсивности напряжений, (в дальнейшем — КИН), аналогичный используемому в теории трещин нормального отрыва, или нормального раскрытия [8] (но отличающийся тем, что в рассматриваемом случае он отрицателен, поскольку приложенные нагрузки теперь стремятся закрыть трещину, точнее, трещиновидную щель).

Как известно, по закону, аналогичному (3), изменяется поперечное напряжение на продолжении прямолинейной трещины нормального отрыва на расстояниях от ее конца, достаточно малых по сравнению с длиной этой трещины и достаточно больших по сравнению с длиной ее концевой области, в которой действуют силы сопротивления росту трещины. Эти силы можно учесть, введя в рассмотрение достаточно тонкий по сравнению с ее длиной упругий слой постоянной толщины (основание Винклера). Такая модель трещины, сформулированная первоначально для случая трещины, находящейся между двумя тонкими работающими на изгиб балками или пластинами [9], обобщена на случай, когда трещина находится между двумя одинаковыми по их деформационным свойствам однородными и изотропными упругими телами, представляющими собой полупространства. Для такой обобщенной модели трещины Прандтля в работе [10] получено точное решение (для условий плоской деформации) в предположении, что трещина полубесконечна и раскрывается двумя приложенными к ее противоположным берегам нормальными к ней равными по величине и противоположными по знаку сосредоточенными силами.

При этом, как в случае задачи о пласте с достаточно протяженной выработкой в породном массиве, так и в случае задачи о достаточно длинной трещине, область существенного влияния упругости пласта на распределение дополнительного поперечного напряжения и область существенного влияния упругости продолжающего трещину слоя (слоя Прандтля) на распределение поперечных растягивающих напряжений имеют протяженности, достаточно малые по сравнению с длиной выработки и длиной трещины соответственно. Последнее требуется для того, чтобы распределение дополнительного поперечного напряжения в призабойной области пласта (граница этой области — точка  $A$ , см. рис. 1) и распределение нормального растягивающего напряжения на продолжении трещины можно было считать полностью определяемыми коэффициентами интенсивности напряжений для пласта и трещины соответственно. В обоих случаях предполагается, что удерживаются лишь главные члены соответствующих асимптотик. С такой точностью пласт за пределами его призабойной области, где существенно его упругое

деформирование, и продолжающий трещину слой (слой Прандтля) за пределами относительно малой концевой области трещины, где существенно упругое деформирование этого слоя, можно рассматривать как абсолютно жесткие. Поэтому решение задачи I можно получить из соответствующего решения задачи о трещине, рассматриваемой в рамках обобщенной модели Прандтля, отождествив пласт с тонким упругим слоем перед трещиной Прандтля, а выработку (в достаточной близости от забоя) — с самой трещиной Прандтля, для чего необходимо умножить на  $-1$  все смещения и напряжения, фигурирующие в решении для трещины Прандтля. Тогда КИН для пласта станет отрицательным, а противоположные берега трещины, которые теперь будут моделировать кровлю и почву выработки, будут сближаться по мере удаления от забоя. Однако, поскольку речь идет лишь о малой призабойной области, где упругое поле можно считать практически полностью определяемым КИН, их сближение в ее пределах будет небольшим по сравнению с мощностью пласта.

С учетом указанного отождествления имеем для пласта [10]:

$$\sigma_x^{(1)} = N_0 \sqrt{\pi/h_p}, \quad y \ll h_p, \quad (5)$$

$$\sigma_x^{(1)} = N_0 / \sqrt{y}, \quad h_p \ll y \ll y_B, \quad (6)$$

где  $h_p = hE/(8(1-\nu^2)E_p)$ ,  $E_p$  — модуль Юнга пласта.

Подчеркнем, что асимптотики (3), (5) и (6), определяемые КИН как для задачи об обобщенной модели трещины Прандтля, так и для задачи о выработке в пласте, — промежуточные в том смысле, что они справедливы на расстояниях, намного больших размера концевой области трещины или призабойной зоны пласта и намного меньших длины трещины или длины выработки. Получаемое с помощью этих асимптотик решение задачи I представляет собой главный член асимптотики решения данной задачи в целом, находимый методом сращиваемых асимптотических разложений. Полученное в [1] решение задачи для случая, когда пласт предполагается абсолютно жестким на всем его протяжении, представляет собой главный член внешней асимптотики, или *внешнее решение*, при нахождении которого все длины, соизмеримые с мощностью пласта, предполагаются пренебрежимо малыми по сравнению с длиной выработки. В этой асимптотике полностью определен КИН, выражаемый только через внешние параметры, т. е. внешний КИН (см. (4)). Это решение, не содержащее параметров, связанных с мощностью пласта, справедливо лишь на достаточно большом удалении от забоя, т. е. при  $y > y_B$ .

Полученное (см. (5), (6)) на основе результатов [10] решение задачи для случая, когда пласт предполагается упругим на всем его протяжении, представляет собой главный член внутренней асимптотики, или *внутреннее решение*, при нахождении которого учитываются все длины, соизмеримые с мощностью пласта, а длина выработки предполагается бесконечно большой. В этой асимптотике КИН, т. е. внутренний КИН, остается неопределенным, но в ней полностью учтены эффекты, связанные с внутренними параметрами и зависящие от мощности пласта. Внутренняя асимптотика справедлива для  $y < y_A$  при условии обеспечения ее достаточной близости к внешней асимптотике. Такую близость можно обеспечить, только приравняв оставшийся до сих пор неопределенным внутренний КИН внешнему КИН. Тем самым будет установлена связь между внешними и внутренними параметрами рассматриваемой задачи и полностью найден главный член асимптотики ее полного решения. Именно для его нахождения и потребовалось выполнение условия, обеспечивающего существование достаточно протяженного интервала  $(y_A, y_B)$ .

Проанализируем полученное решение. Отметим, что непосредственно у забоя дополнительное напряжение в пласте конечно:

$$\sigma_x^{(1)}\Big|_{y=y_0} = N_0 \left\{ \frac{8\pi E_p(1-\nu^2)}{hE} \right\}^{1/2} = -\{8\gamma HE_p\}^{1/2}. \quad (7)$$

Предположение об упругости пласта всюду за забоем справедливо лишь при условии

$$|\sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(1)}\Big|_{y=y_0} < |\sigma_{yield}|, \quad (8)$$

где  $\sigma_{yield}$  — предел текучести при сжатии, а  $\sigma_x^{(0)}$  определено соотношением (1).

Основываясь на [10] и переходя от слоя Прандтля к пласту, можно с достаточной точностью считать, что на некотором удалении по пласту от забоя дополнительное напряжение в пласте выражается главным членом асимптотики (6), определяемым только КИН. Так считать допустимо лишь до такого удаления  $\Delta y$  по пласту от забоя, при котором дополнительное напряжение в пласте, полученное в предположении об абсолютной жесткости последнего и определяемое выражением (2), еще будет достаточно близко к главному члену асимптотики этого выражения, найденному при приближении рассматриваемого сечения пласта к забюю и полностью определяемому соответствующим КИН.

При этом расстояние  $\Delta y$  определяется  $y_A$  как  $y_A = y_0 + \Delta y$  и вычисляется по формуле [10]:

$$\Delta y = 10 \left\{ \frac{hE}{8E_p(1-\nu^2)} \right\}^{1/2} = \frac{5hE}{4E_p(1-\nu^2)}. \quad (9)$$

Таким образом, рассмотренный подход к построению приближенного решения задачи I, основанный на использовании только главного члена соответствующей асимптотики, полностью определяемого КИН, применим лишь при таких сочетаниях параметров данной задачи, которые (сочетания) обеспечивают достаточное превышение  $y_B$  над  $y_A$ . При этом важно подчеркнуть, что поскольку речь здесь идет о геомеханике с относительно невысокими точностями определения значений параметров, достаточно выполнения условий применимости указанного подхода для проведения расчетов, близкого к оценочному.

Выражение (7) позволяет найти максимальное (по модулю) значение дополнительного напряжения в обрабатываемом пласте и, следовательно, полное напряжение. Выполнение условия об упругом деформировании пласта на всем его протяжении обеспечивается рассмотрением лишь таких сочетаний значений параметров данной задачи, при которых полное напряжение по модулю не превышает предела текучести. Таким образом, задав значения всех параметров пласта, вмещающего его массива и исходного напряженного состояния, можно найти пробное решение задачи. Далее по этому пробному решению находится полное поперечное напряжение в пласте  $\sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(1)}\Big|_{y=y_0}$  в проходящем через забой сечении и расстоянии  $\Delta y$  от забоя до нормального сечения пласта, где с достаточной точностью можно считать применимым главный член асимптотики (3) вблизи забоя, полученный в предположении об абсолютной жесткости пласта. После этого проверяется неравенство (8), а  $\Delta y$  сравнивается с тем расстоянием  $\Delta y_1$  от забоя, до которого можно считать пренебрежимо малым отличие главного члена асимптотики (3) от точного решения задачи (2), полученного в [1] в предположении об абсолютной жесткости пласта на всем его протяжении. Указанное пробное решение принимается в качестве действительного, если неравенство (8) выполнено, т. е.  $\Delta y < \Delta y_1$ , и отбрасывается как недействительное в противном случае.

## ЗАДАЧА II. СЛУЧАЙ ПЛАСТА, ДЕФОРМИРУЮЩЕГОСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИ

Пусть неравенство (8) не выполняется, причем взятое по модулю полное напряжение на забое намного больше предела текучести. Тогда можно ожидать, что образуется пластическая зона, длина которой будет достаточно большой по сравнению с мощностью пласта (эта длина, как и в [1], предполагается пренебрежимо малой по сравнению с длиной выработки и существенно превосходящей мощность пласта). Предполагается также, что материал в этой зоне ведет себя идеально-пластически, согласно решению задачи Прандтля для бесконечного слоя, сжимаемого между абсолютно жесткими плитами. Поперечное напряжение в пластической зоне описывается следующей формулой:

$$\sigma_x^{plastic} = \gamma H - \frac{k\pi}{2} - \frac{k(y-y_0)}{h}, \quad (10)$$

где  $k$  — постоянная пластичности, равная  $\sigma_{yield} / 2$ .

Для решения задачи II применим такой же прием, как для решения задачи I, т. е. воспользуемся решением задачи для обобщенной модели трещины Прандтля из [10]. Рассмотрим, как последняя задача решается в случае, когда сразу за концом трещины слой Прандтля деформируется неупруго в интервале, длина которого намного больше толщины слоя, а далее деформируется упруго. Выберем начало координат  $x = 0$  в точке, где поперечное напряжение в слое достигает предела упругости. Таким образом, во всех формулах работы [10], относящихся к задаче о слое Прандтля, напряжения, создаваемые в слое Прандтля, деформированном за предел упругости, должны быть включены в число внешних нагрузок, приложенных к противоположным берегам продолжающего реальную трещину разреза.

В таких условиях выработку вместе с призабойным участком пластического деформирования пласта можно рассматривать как единый математический разрез, конец которого находится в конце пластической зоны, т. е. в начале области упругого деформирования пласта. На части этого разреза, занятой выработкой, к его противоположным берегам следует приложить дополнительные напряжения, равные  $\gamma H$ , а на оставшейся части — такие же напряжения за вычетом напряжений, порожденных сопротивлением сжатию пласта в зоне его пластического деформирования, а именно напряжения  $\sigma_x^{plastic}$ .

Для определения границы пластической зоны и длины пластической зоны учтем, что КИН рассматриваемой задачи в силу ее линейности можно представить как сумму КИН двух задач: исходной задачи, для которой КИН задается выражением (4), и задачи о полубесконечной трещине, у которой противоположные берега между забоем и ее концом нагружены напряжениями (10). Отметим, что первое слагаемое в (10) можно не учитывать, поскольку его вклад в КИН пренебрежимо мал вследствие предполагаемой пренебрежимо малости длины пластической зоны по сравнению с длиной выработки. Тогда искомым КИН в упругой зоне пласта вблизи границы пластической зоны будет выражаться постоянным отрицательным КИН, определяемым соотношением (4), и переменным положительным КИН, определяемым соотношением (10) распределенными нагрузками, приложенными к противоположным берегам полубесконечной трещины без учета в этих нагрузках первого слагаемого. В итоге, при перемещении границы пластической зоны от забоя, суммарный КИН в конце пластической зоны с внешней ее стороны будет уменьшаться, пока не снизится до величины, равной по модулю той, которая соответствует достижению полным упругим напряжением на границе пластической зоны предела текучести материала пласта. Этим условием и определяется координата конца пластической зоны.

Для решения задачи о полубесконечной моделируемой разрезом трещине, нагруженной приложенными к ее противоположным берегам противонаправленными нормальными распределенными нагрузками, выражаемыми напряжениями (10), перейдем от распределенных нагрузок, приложенных к берегам разреза, к большому числу сосредоточенных элементарных сил. Для этого участок от конца трещины до конца пластической зоны разобьем на достаточно короткие участки длиной  $\Delta y_i$  и вычислим элементарную силу, действующую на каждый такой участок, по формуле  $P_i = \sigma_x^{plastic} \Delta y_i$ . В результате получим систему нормальных к линии трещины элементарных сил, направленных в сторону от разреза на каждом его берегу. Известно [10], что КИН для моделируемой разрезом трещины, раскрываемой двумя одинаковыми по величине противонаправленными нормальными к линии трещины силами  $P$ , приложенными на расстоянии  $y$  от ее конца, определяется выражением

$$N_0 = \frac{P}{\pi\sqrt{y}}.$$

Вследствие линейности задачи КИН, создаваемый всеми элементарными силами, находится как сумма КИН, соответствующих каждой из элементарных сил, на участке от координаты забоя  $y_0$  до неизвестной пока координаты  $y^*$  конца пластической зоны. Переходя к пределу при стремлении к нулю длин элементарных участков, приходим к следующей формуле, определяющей КИН, создаваемый рассматриваемыми распределенными нагрузками:

$$N_0^{plastic} = \int_{y_0}^{y^*} \frac{\sigma_x^{plastic} dy}{\pi\sqrt{y}} = \frac{2[-k\pi/2 + ky_0/h](\sqrt{y^*} - \sqrt{y_0})}{\pi} - \frac{2k(\sqrt{(y^*)^3} - \sqrt{(y_0)^3})}{3\pi h}.$$

Для определения длины пластической зоны  $y^* - y_0$  воспользуемся результатами работы [10], где учтем, что КИН определяется суммой отрицательного КИН для задачи I и положительного КИН для задачи о полубесконечной трещине с нагруженными распределенными нагрузками берегами. Тогда с учетом соотношений (1), (6) и (10) получим следующее уравнение для определения  $y^*$ :

$$\frac{N_0 + N_0^{plastic}}{\sqrt{y^*}} = \sigma_{yield} + \gamma H. \quad (11)$$

#### ОЦЕНКИ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Исследуем влияние параметров задачи на возможность применимости рассматриваемого асимптотического решения.

Оценим значения параметров, определяющих правомерность асимптотики (6). Как уже отмечалось,  $\Delta y \ll y_0$ , тогда

$$\gamma H \ll 0.8E_p. \quad (12)$$

Рассмотрим положение точки  $B$ , исходя из условия, что в этой точке достигнуто расхождение в 10% между (6) и (3), т. е.

$$\frac{N_0 / \sqrt{y_B}}{\gamma H y_0 / (\sqrt{y_B} - y_0)(\sqrt{y_B} - y_0 + \sqrt{y_B})} = 1.1.$$

Введем безразмерную переменную  $c = y_B / y_0$ , тогда получим

$$\frac{\sqrt{c-1}(\sqrt{c-1} + \sqrt{c})}{\sqrt{c}} = 1.1.$$



Численное решение этого уравнения дает корень  $c = 1.489$ , т. е.  $y_B = 1.489y_0$ . Отсюда следует, что для  $y > 1.5y_0$  можно использовать решение (2), т. е. именно на этом расстоянии кончается область срачивания асимптотик.

Оценим значения параметров модели, позволяющих реализовать упругое состояние пласта. Рассмотрим ситуацию предельного равновесия пласта, когда напряжение в пласте в окрестности забоя точно равно пределу текучести. Тогда с учетом (8)

$$E_p = \frac{(|\sigma_{yield}| - \gamma H)^2}{8\gamma H}.$$

Перейдем к безразмерным величинам  $E^* = E_p / |\sigma_{yield}|$ ,  $P^* = \gamma H / |\sigma_{yield}|$  и найдем

$$E^* = \frac{(1 - P^*)^2}{8P^*}.$$

Легко убедиться, что для получения превышения упругого модуля над пределом текучести ( $E^* > 1$ ) необходимо потребовать  $P^* < 0.1$ . Так, для  $E^* = 2$  имеем  $P^* = 0.055$ .

Полученный результат показывает, что реализация упругого состояния пласта возможна при выбранных значениях параметров лишь при относительно небольшом значении горного давления, т. е. для выработок неглубокого залегания. Необходимо также учесть, что для применимости результатов проведенного рассмотрения требуется, чтобы длина выработки была намного меньше глубины залегания пласта, и такое требование может оказаться невыполнимым. Поэтому справедливость основных положений модели Баренблатта – Христиановича можно ожидать лишь для пластов достаточно глубокого залегания. Реализацию условий упругого деформирования пласта при умеренных глубинах можно ожидать для пластов достаточно крепких пород, таких как руды, крепкие угли, а также пласты, содержащие углеводороды.

Введем безразмерные величины:  $y^{**} = y^* / h$ ,  $y_0^* = y_0 / h$ . Тогда выражение (11) перепишется в виде

$$-P^* \sqrt{y_0^* / 2} + (-1/2 + y_0^* / \pi)(\sqrt{y^{**}} - \sqrt{y_0^*}) - \frac{(y^{**})^{3/2} - (y_0^*)^{3/2}}{3\pi} = (1 + P^*)\sqrt{y_0^*}. \quad (13)$$

Уравнение (13) позволяет проанализировать влияние размера выработки на размер пластической зоны. Пусть  $P^* = 2$ . Тогда для  $y^* = 10$  получим  $y^{**} = 25$ , для  $y^* = 100$  —  $y^{**} = 142$ . Таким образом, чем больше длина выработки, тем больше длина пластической зоны.

## ВЫВОДЫ

Обобщена и усовершенствована классическая модель Баренблатта – Христиановича, описывающая геомеханическое состояние однородного и изотропного массива горных пород, содержащего обрабатываемый очистной выработкой пласт. Рассмотрены новые задачи, когда пласт (а) на всем протяжении деформируется упруго, (б) в призабойной части деформируется идеально-пластически, а за границей этой части пласт деформируется упруго. Сформулирован локальный критерий перехода пласта из упругого состояния в пластическое и определена длина пластической зоны в пласте.

Полученные результаты являются асимптотически точными для широкого круга условий, когда достаточно ограничиться удержанием лишь главного члена соответствующей асимптотики.

Упомянутый критерий перехода пласта из упругого состояния в пластическое сформулирован исходя из условия достижения предела текучести полным напряжением, равным сумме напряжений в невозмущенной выработкой массиве на глубине ее нахождения и дополнительного напряжения, вызванного выработкой, с той стороны концевой сечения пластической зоны, где она граничит с зоной упругости (локальный критерий). Вместе с тем в модели Баренблатта–Христиановича длина пластической зоны определяется при помощи интегрального критерия. Что касается кривой распределения напряжений в упругопластическом пласте и равного им с обратным знаком опорного давления на пласт, то, согласно рассмотренной здесь модели, вид этой кривой практически такой же, как и в модели Баренблатта–Христиановича. Отличие состоит лишь в разнице длины пластической зоны и тем самым в величине максимума опорного давления на пласт, а также в расстоянии от забоя до места расположения этого максимума, что существенно для приложений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И., Христианович С. А. Об обрушении кровли при горных выработках // Изв. АН СССР, ОТН. — 1955. — № 11.
2. Шемякин Е. И. Механика горного массива // ГИАБ. — 2006. — № 3.
3. Салганик Р. Л., Мищенко А. А., Федотов А. А. Плоская деформация упругого породного массива с пластом, содержащим очистную выработку и сначала деформирующимся упруго, затем — упруго-пластически // Препр. ИПМех РАН. — 2013. — № 1063.
4. Либерман Ю. М. К вопросу об опорном давлении впереди очистного забоя // Физико-механические свойства, давление и разрушение горных пород. Вып. 1. — М.: Изд-во АН СССР, 1962.
5. Салганик Р. Л. Временные эффекты при хрупком разрушении // Проблемы прочности. — 1971. — № 25.
6. Салганик Р. Л., Мищенко А. А., Федотов А. А. Модель трещины Прандтля и ее применение для решения задачи механики контактного взаимодействия // К 75-летию со дня рождения профессора Владимира Марковича Ентова. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012.
7. Саврук М. П. Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие. Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. — Киев: Наук. думка, 1988.
8. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.
9. Prandtl L. Ein Gedankenmodell für den Zerreivorgang spröder Körper, ZAMM, 1933, No. 13 (пер. на англ. языке: Prandtl L. A thought model for the fracture of brittle solids, Int. J. Fract, 2011, Vol. 171).
10. Ентов В. М., Салганик Р. Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // МТТ. — 1968. — № 6.

*Поступила в редакцию 6/XI 2014*