ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ ВОДОЙ

М. В. Филинов

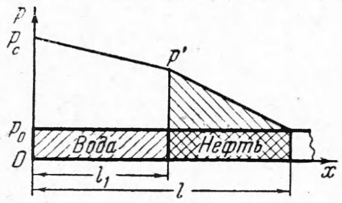
(*Москва*)

Способ последовательной смены стационарных состояний часто дает хорошие результаты для задач в случае неустановившейся фильтрации однородной жидкости [1].

В случае же вытеснения нефти водой задача усложняется тем, что, кроме неизвестной длины зоны воронки депрессии l, в уравнение входит еще неизвестное расстояние до перемещающейся границы раздела нефть-вода — l_1. Результаты, полученные в работе [2], позволяют численным способом рассчитать величины l и l_1 при применении указанного метода к вопросам вытеснения нефти за счет упругости воды.

Рассмотрим распространение зоны депрессии и границы раздела нефть-вода при одномерной фильтрации в случае постоянной заданной депрессии для прямолинейного и радиального продвижения водонефтяного контакта.

1. **Прямолинейное вытеснение нефти водой.** В полубесконечный пласт, первоначально заполненный нефтью с постоянным давлением p_0, начинают закачивать воду с постоянным давлением p_c на линии нагнетания (фиг. 1). Образуются две зоны: зона, занятая водой, и зона, занятая нефтью с перемещающейся границей раздела между ними. Считая, что в зоне возмущения, определяемой длиной воронки депрессии, распределение давления стационарно, найдем l и l_1. Будем следовать методике, изложенной в работах [2,3].



Фиг. 1

Распределение давления в водяной и нефтяной зонах будет

$$p_1 = p' + (p_c - p_0)\frac{l_1 - x}{l_1} \qquad (0 < x < l_1) \qquad (1.1)$$

$$p_2 = p_0 + (p' - p_0)\frac{l - x}{l - l_1} \qquad (l_1 < x < l) \qquad (1.2)$$

Здесь p' — давление на границе раздела нефть-вода; μ_1 и μ_2 — соответственно коэффициенты вязкости в зоне воды и нефти.

Из условия равенства скоростей фильтрации нефти и воды на границе раздела получим

$$p' = \frac{\mu_2 (l - l_1) p_c + \mu_1 l_1 p_0}{\mu_2 (l - l_1) + \mu_1 l_1} \qquad (1.3)$$

Равенства (1.1) и (1.2) с учетом (1.3) преобразуется к виду

$$p_1 = p_c - \frac{\mu_1 (p_c - p_0)}{\mu_2 (l - l_1) + \mu_1 l_1} x, \qquad p_2 = p_0 + \frac{\mu_2 (p_c - p_0)}{\mu_2 (l - l_1) + \mu_1 l_1}(l - x) \qquad (1.4)$$

Учитывая (1.4), для скоростей фильтрации получим выражения

$$V_1 = -\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{k (p_c - p_0)}{\mu_2 (l - l_1) + \mu_1 l_1}, \qquad V_2 = -\frac{k}{\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{k (p_c - p_0)}{\mu_2 (l - l_1) + \mu_1 l_1} \qquad (1.5)$$

Так как на перемещающейся границе раздела

$$V_1 = V_2 = V, \qquad V = m\frac{dl_1}{dt} \qquad \left(m\frac{dl_1}{dt} = \frac{k (p_c - p_0)}{\mu_2 (l - l_1) + \mu_1 l_1}\right) \qquad (1.6)$$

В этих формулах k — коэффициент проницаемости, а l и l_1 рассматриваются как некоторые функции времени t. Для определения l и l_1, кроме уравнения (1.6), необходимо еще одно уравнение, которое может быть получено из соображений материального баланса и выражает постоянство массы сжимающейся нефти

$$(m\gamma)_0\, l = \frac{(m\gamma)' + (m\gamma)_0}{2}(l - l_1) \qquad (1.7)$$

При этом предполагается, что произведение $m\gamma$ линейно зависит от давления p и меняется по закону

$$m\gamma = (m\gamma)_0\left(1 + \frac{p - p_0}{K}\right) \qquad (1.8)$$

Здесь m — пористость, γ — удельный вес, K — приведенный модуль упругости, учитывающий упругость жидкости и упругость порового пространства.

Преобразуя выражение (1.7) с учетом (1.3) и (1.8), получим

$$\frac{2l_1}{l-l_1}=\frac{\mu_2(l-l_1)(p_c-p_0)}{K[\mu_2(l-l_1)+\mu_1 l_1]} \tag{1.9}$$

Исключая l из выражений (1.6) и (1.9), для l_1 получим уравнение

$$\left(l_1\frac{dl_1}{dt}\right)^2-2l_1\frac{dl_1}{dt}\left(\frac{1+\varkappa_2 a\mu_0}{\varkappa_2\mu_0^2}\right)+\frac{a^2}{\mu_0^2}=0 \tag{1.10}$$

Здесь

$$\varkappa_2=\frac{m\mu_2}{kK},\quad a=\frac{k\Delta p}{m\mu_2},\quad \mu_0=\frac{\mu_1}{\mu_2},\quad \Delta p=p_c-p_0$$

Решая уравнение (1.10) относительно l_1dl_1/dt и интегрируя его в пределах от 0 до l и от 0 до t, получим

$$l_1^2=2\left(b-\sqrt{b^2-\frac{a^2}{\mu_0^2}}\right)t \qquad \left(b=\frac{1+a\varkappa_2\mu_0}{\mu_0^2\varkappa}\right) \tag{1.11}$$

Из сравнения с точным решением, которое будет проведено ниже, следует, что перед корнем в выражении (1.11) следует брать знак минус. Таким образом, расстояние до перемещающегося водонефтяного контакта в любой момент времени можно рассчитать по формуле (1.11).

Находя из выражения (1.6) значение l и подставляя в него значение l_1 и dl_1/dt из (1.11), получим равенство для определения длины воронки депрессии

$$l=\sqrt{2\left(b-\sqrt{b^2-\frac{a^2}{\mu_0^2}}\right)t}\left[\frac{a}{b-\sqrt{b^2-a^2/\mu_0^2}}+(1-\mu_0)\right] \tag{1.12}$$

Зная l и l_1, можно по (1.4) построить распределение давления в водяной и нефтяной зонах.

2. Радиальное вытеснение нефти водой. Рассмотрим нагнетание воды через круговую галерею в пласт, первоначально заполненный нефтью (фиг. 2). В этом случае уравнения для дебита жидкости в зонах воды и нефти будут

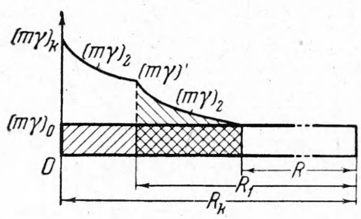
$$Q_1=\frac{2\pi kh}{\mu_1}\frac{p_k-p'}{\ln(R_k/R_1)},\qquad Q_2=\frac{2\pi kh}{\mu_2}\frac{p'-p_0}{\ln(R_1/R)} \tag{2.1}$$

Учитывая, что $Q_1=Q_2=Q$, получим

$$Q=\frac{2\pi kh(p_k-p_0)}{\mu_1\ln R_k/R_1+\mu_2\ln R_1/R} \tag{2.2}$$

Постоянство массы сжимающейся нефти выражается равенством

$$2\pi h(m\gamma)_0(R_k^2-R^2)=\int\limits_R^{R_1}2\pi h(m\gamma)_2\,r\,dr \tag{2.3}$$



Фиг. 2

Полагая, что распределение давления соответствует стационарному режиму, т. е. изменяется по логарифмическому закону, получим

$$(m\gamma)_2=(m\gamma)_0+\frac{(m\gamma)'-(m\gamma)_0}{\ln(R_1/R)}\ln\frac{r}{R} \tag{2.4}$$

Здесь R — радиус воронки депрессии, R_1 — радиус перемещающегося водонефтяного контакта, R_k — радиус галереи, h — мощность пласта. Остальные обозначения те же, что и прежде.

Подставляя значение $(m\gamma)$ из (2.4) в (2.3) и учитывая (2.1), получим

$$\left(\frac{R_k}{R_1}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_1}\right)^2+\frac{Q\mu_2}{4\pi khK}\ln\frac{R_1}{R}-\frac{Q\mu_2}{8\pi kKh}\left[1-\left(\frac{R}{R_1}\right)^2\right] \tag{2.5}$$

Выражая из равенства (2.2) значение R_1/R и подставляя его в (2.5), получим

$$\left(\frac{R_k}{R_1}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2A}+\frac{Q\mu_2}{4\pi kKh}\left(\frac{2\pi kh\Delta p}{Q\mu_2}-\mu_0\ln\frac{R_k}{R_1}\right)-\frac{Q\mu_2}{8\pi kKh}(1-e^{2A}) \tag{2.6}$$

где

$$A=\mu_0\ln\frac{R_k}{R_1}-\frac{2\pi kh\Delta p}{Q\mu_2}$$

Разлагая e^{2A} в ряд и удерживая в разложении только линейную часть, получим после упрощений

$$R_1 \frac{dR_1}{dt} \left(\frac{R_k}{R_1}\right)^2 = R_1 \frac{dR_1}{dt} + \mu_0 \ln \frac{R_k}{R_1} R_1 \frac{dR_1}{dt} - \frac{k\Delta p}{m\mu_2} \tag{2.7}$$

Разделяя переменные в (2.7) и интегрируя полученное выражение в пределах от R_k до R_1 и от 0 до t; получим

$$\ln \frac{R_k}{R_1} \left(R_k{}^2 + \mu_0 \frac{R_1{}^2}{2}\right) - \frac{R_k{}^2 - R_1{}^2}{2} \left(1 + \frac{\mu_0}{2}\right) at \qquad \left(a = \frac{k\Delta p}{m\mu_2}\right) \tag{2.8}$$

Таким образом, получили трансцендентное уравнение для определения R_1 — положения границы раздела нефть-вода. Выражая из (2.2) значение R и подставляя в него значение R_1 и dR_1/dt из (2.8), получим равенство для определения радиуса воронки депрессии.

Решенная выше задача может быть сформулирована и для случая нагнетания или отбора жидкости при постоянном дебите (как при прямолинейном, так и при радиальном притоке). При этом получается система трех алгебраических нелинейных уравнений, которые возможно решить лишь численным путем.

3. Сравнение полученных результатов с точным решением. В работе [4] получено точное решение указанной задачи для случая прямолинейного вытеснения, что позволяет оценить точность полученного решения.

Для перемещающейся границы раздела в точном решении имеется выражение

$$l^2 = \gamma t \tag{3.1}$$

Здесь γ — постоянный параметр, который определяется из трансцендентного уравнения

$$\frac{2k\,(p_c - p_0)}{m\sqrt{\pi a^2 \mu_1 \mu_2}} = \beta_2(\gamma)\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{\gamma}{4\varkappa}}\right)\right] + \beta_1(\gamma)\,\Phi\left(\sqrt{\frac{\gamma}{4\varkappa}}\right) \tag{3.2}$$

где

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{\gamma}{4\varkappa}}\right) \text{ — интеграла вероятности}$$

$$\beta_1(\gamma) = \sqrt{\frac{\mu_1\gamma}{\mu_2\varkappa}} \exp\frac{\gamma}{4\varkappa}, \quad \beta_2(\gamma) = \sqrt{\frac{\mu_2\gamma}{\mu_1\varkappa}} \exp\frac{\gamma}{4\varkappa} \quad \left(\varkappa = \frac{1}{\varkappa_2}\right) \tag{3.3}$$

В рассматриваемом случае величиной, аналогичной γ, будет выражение

$$\gamma^* = 2\left(b - \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{\mu_0{}^2}}\right) \tag{3.4}$$

Сравнительные расчеты проводились для значений

$$\mu_1 = 1 \textit{ спз}, \quad \mu_2 = 2 \textit{ спз}, \quad m = 0.2, \quad k = 1 \textit{ дарси}.$$

1) $K = 15\,000$ *ат*, $p_c - p_0 = 50$ *ат*, 2) $K = 10\,000$ *ат*, $p_c - p_0 = 20$ *ат*

Для этих случаев γ^* — равняется 0.1 и 0.4, а γ соответственно 0.1227 и 0.533.

В случае радиального притока точное решение задачи о вытеснении нефти водой (при заданной депрессии) отсутствует, поэтому дать точную оценку получающейся погрешности при применении метода последовательной смены стационарных состояний не представляется возможным. Однако ошибка здесь будет вероятно меньше, чем в случае прямолинейного вытеснения, вследствие того, что при радиальном движении кривая распределения давления аппроксимируется логарифмической кривой, что дает меньшую ошибку, чем аппроксимация кривой распределения давления прямой линией при прямолинейном вытеснении [2].

Поступила 13 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. Гостоптехиздат, 1948.
2. Чарный И. А. Влияние сжимаемости краевой воды на режим эксплуатации нефтяных месторождений. Изв. АН СССР, ОТН, 1944, № 7, 8.
3. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1949.
4. Веригин Н. Н. Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., 1952, № 5.