7. **Онуфриев А. Т., Христианович С. А.** Об особенностях турбулентного движения в вихревом кольце.— ДАН СССР, 1977, т. 229, № 1.
8. **Владимиров В. А., Луговцов Б. А., Тарасов В. Ф.** Подавление турбулентности в ядрах концентрированных вихрей.— ПМТФ, 1980, № 5.
9. **Паттерман С.** Гидродинамика сверхтекучей жидкости. М.: Мир, 1978.

УДК 533.6.011

О САМОВОЗБУЖДАЮЩЕЙСЯ ОКРУЖНОЙ НЕРАВНОМЕРНОСТИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ОКОЛО КРУГОВОЙ РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ

Е. С. Беляновский, В. Б. Курзин

(*Москва, Новосибирск*)

При течении жидкости через решетки турбомашин в ряде случаев имеет место явление самовозбуждения окружной неравномерности поля скоростей, вращающейся в сторону вращения решетки. К числу таких явлений относится вращающийся срыв, который возникает на определенных режимах в осевых турбомашинах. В радиальных решетках центробежных вентиляторов вращение поля скоростей замечено и описано еще Н. Е. Жуковским [1]. Недавно подобное явление обнаружено и при исследовании течения жидкости через круговую решетку [2]. Окружную неравномерность поля скоростей авторы этой работы моделируют смещением вихреисточника из центра решетки. Однако механизм движения вихреисточника ими не рассмотрен.

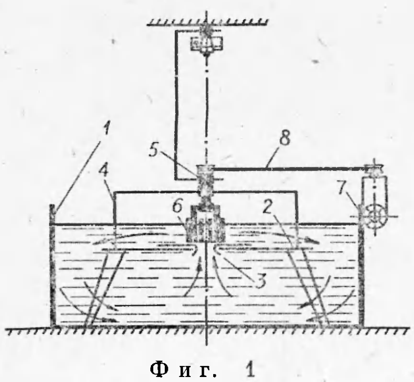
В данной работе указанная модель течения жидкости через плоскую круговую решетку замкнута с помощью уравнения движения вихреисточника в поле скоростей, возмущенном профилями решетки. При этом вопрос о самовозбуждении окружной неравномерности сведен к задаче об устойчивости движения вихреисточника.

1. Эксперимент. Эксперимент проводился на гидролотке, представляющем собой открытый бак диаметром 2 м и высотой 0,8 м (фиг. 1). В баке *1* установлен диск *2*, имеющий в центре отверстие, в которое вставлен диффузор *3*. На диске *2* установлена штанга *4*, на которой смонтирован вал *5*, вращающий решетку *6*. Вращение вала осуществляется электродвигателем *7* через ременную передачу *8*.

Визуализация характера течения осуществлялась посредством внесения в поток конфетти. На фиг. 2 приведены снимки, которые сделаны фотоаппаратом в неподвижном его положении (фиг. 2, *а*) и при синхронном с решеткой вращении (фиг. 2, *б*). На фотографиях хорошо видна окружная неравномерность поля скоростей, которая выражается, например, в различных углах натекания потока на профили. Отмечено, что эта неравномерность вращается с угловой скоростью, примерно в 50 раз меньшей скорости вращения решетки.

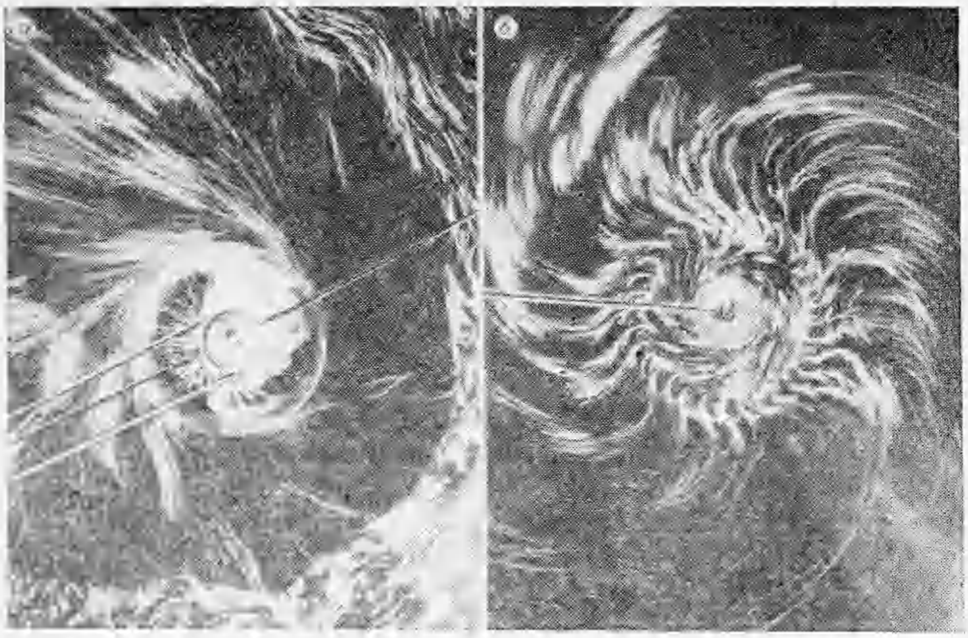
2. Постановка задачи. Рассмотрим плоское течение идеальной несжимаемой жидкости через круговую решетку, равномерно вращающуюся с угловой скоростью ω (фиг. 3). Как известно, набегающий на круговую решетку поток жидкости обычно моделируется вихреисточником, расположенным в центре решетки. Предположим, что случайное возмущение смещает его из центра в некоторое положение ε_0. Тогда вихреисточник начнет перемещаться со скоростью жидкости в той точке $\varepsilon(t)$, с которой в данный момент совпадает его положение, т. е.

$$d\varepsilon/dt = v(\varepsilon). \tag{2.1}$$



Фиг. 1

Возникает вопрос, существует ли устойчивый предельный цикл движения вихреисточника, удовлетворяющего уравнению (2.1). Эту задачу будем решать в предположении, что абсолютное движение жидкости вне вихре-



Фиг. 2

источника, вне профилей и вне вихревых следов, сбегающих с профилей, является потенциальным. Тогда комплексную скорость течения жидкости можно определить из выражения

$$\bar{v}(z) = \frac{q - i\Gamma_0}{2\pi(z - \varepsilon)} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

где q, Γ_0 — параметры, определяющие интенсивность вихреисточника; φ — гармоническая функция, удовлетворяющая следующим граничным условиям:

условиям непротекания жидкости через профили

$$(2.2)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = v_\nu^{(n)} - \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left[\frac{(q - i\Gamma_0)\,\nu_0^{(n)}}{z - \varepsilon}\right], \quad (x, y) \in L_n \quad (n = 1, 2, \ldots, N),$$

где $\nu_0^{(n)}$ — орт внешней нормали к контуру n-го профиля L_n; $v_\nu^{(n)}$ — нормальная составляющая скорости движения точек контура n-го профиля; N — число профилей в решетке; динамическим и кинематическим условиям на вихревых следах

$$[p] = 0, \ [\partial\varphi/\partial\nu_1] = 0, \ (x, y) \in \mathscr{L}_n \ (n = 1, 2, \ldots, N),$$

где p — давление жидкости; ν_1 — направление нормали к линиям контактного разрыва $\mathscr{L}_n$, моделирующим вихревые следы; условию на бесконечности

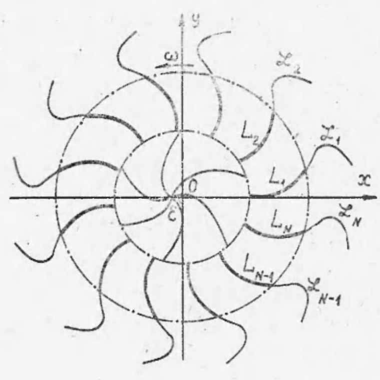
$$\lim_{|z|\to\infty} \nabla\varphi = 0;$$

условиям Кутта — Жуковского

$$\Delta\varphi < \infty, \ (x, y) \in c_n \ (n = 1, 2, \ldots, N),$$

где c_n — координата задней кромки n-го профиля.

3. Квазистационарное приближение для простейшей модели решетки. Для определения поля скоростей течения жидкости в первом приближении профили решетки будем моделировать точечными



Фиг. 3

вихрями, расположенными на одной четверти хорды, а условия непротекания через профили будем выполнять в точках профилей на расстоянии 3/4 хорд от их носика.

В квазистационарном приближении комплексная скорость течения жидкости для этой модели имеет выражение

$$\bar{v}(z)=\frac{q-i\Gamma_0}{2\pi}\frac{1}{z-\varepsilon}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{N}\frac{\Gamma_n}{z-z_n}, \tag{3.1}$$

где $z_n = r\exp[i(\theta_n+\omega t)]$ — координаты точек расположения вихрей на профиле; θ_n — их угловые координаты, при $t=0$ $\theta_n=\theta_1+(2\pi/N)(n-1)$. Интенсивности вихрей Γ_n определяются из условия (2.2):

$$\operatorname{Re}[\bar{v}(z_m)\nu_0(z_m)]=\omega R\sin\alpha_1\quad(m=1,2,\ldots,N), \tag{3.2}$$

где $z_m = R\exp[i(\varphi_m+\omega t)]$ — координаты контрольных точек профилей; $\nu_0(z_m)=\exp[i(\alpha_m+\omega t)]$ — орты нормалей к профилям в этих точках; $\varphi_m=(2\pi/N)(m-1)$; $\alpha_m=\alpha_1+\varphi_m$. Координату положения вихреисточника ε представим в виде

$$\varepsilon=\bar{r}\varepsilon e^{i\sigma},\quad\sigma=\omega t-\sigma_1(t). \tag{3.3}$$

Тогда условие (3.2) с учетом (3.1) преобразуется следующим образом:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{(q-i\Gamma_0)e^{i\alpha_1}}{1-\bar{\varepsilon}\bar{r}e^{-i(\varphi_m+\sigma_1)}}-ie^{i\alpha_1}\sum_{n=1}^{N}\frac{\Gamma_n}{1-\bar{r}e^{i(\theta_n-\varphi_m)}}\right\}=2\pi\omega R^2\sin\alpha_1 \tag{3.4}$$

$$(m=1,2,\ldots,N;\quad\bar{r}=r/R).$$

Решение системы (3.4) может быть найдено в явном виде, если искомые значения интенсивности циркуляций Γ_n представить в виде тригонометрических полиномов:

$$\Gamma_n=\gamma_0+\sum_{k=1}^{N-1}(a_k\cos k\theta_n+b_k\sin k\theta_n), \tag{3.5}$$

где γ_0 — стационарная циркуляция, одинаковая для всех профилей; $a_k(t)$, $b_k(t)$ — функции времени, определяющие нестационарную составляющую циркуляций, возникающих вокруг профилей вследствие смещения вихреисточника.

В самом деле, разлагая дроби, входящие в выражение (3.4), в сходящиеся ряды и суммируя эти ряды, из (3.4) с учетом (3.5) получим

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\Bigg\{&\frac{(q-i\Gamma_0)e^{i\alpha_1}}{1-\left(\bar{\varepsilon}\bar{r}e^{-i\sigma_1}\right)^N}\left[1+\sum_{k=1}^{N-1}(\bar{\varepsilon}\bar{r})^k e^{-ik(\sigma_1+\varphi_m)}\right]-\\&-\frac{iNe^{i\alpha_1}}{2\left(1-\bar{r}^Ne^{i\theta_1N}\right)}\left[2\gamma_0+\sum_{k=1}^{N-1}\bar{r}^{N-k}e^{i(k\varphi_m+N\theta_1)}(a_k-ib_k)+\right.\\&\left.+\sum_{k=1}^{N-1}\bar{r}^ke^{-ik\varphi_m}(a_k+ib_k)\right]\Bigg\}=2\pi\omega R^2\sin\alpha_1\quad(m=1,2,\ldots,N).\end{aligned} \tag{3.6}$$

После соответствующих преобразований из (3.6) имеем систему уравнений

$$\sum_{k=0}^{N-1}(B_k\cos k\varphi_m+C_k\sin k\varphi_m)=2\pi\omega R^2\sin\alpha_1\quad(m=1,2,\ldots,N), \tag{3.7}$$

из которых следует

$$B_0=2\pi\omega R^2\sin\alpha_1,\quad B_k=C_k=0\ (k\neq0). \tag{3.8}$$

Из соотношений (3.8) в явном виде определяются значения γ_0 и функции $a_k(t)$, $b_k(t)$.

Для простоты вычислений рассмотрим предельный случай $N \to \infty$. Тогда из (3.8) получим

(3.9) $\gamma_0 = (1/N)(2\pi\omega R^2 - \Gamma_0 - q \operatorname{ctg} \alpha_1)$, $a_k = -(2\bar{\varepsilon}^k/N)(q \sin k\sigma_1 + \Gamma_0 \cos k\sigma_1)$, $b_k = -(2\bar{\varepsilon}^k/N)(q \cos k\sigma_1 - \Gamma_0 \sin k\sigma_1)$.

Подставляя выражения (3.9) в формулу (3.5), найдем

$$\Gamma_n = \gamma_0 - \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \bar{\varepsilon}^k [q \sin k(\sigma_1 + \theta_n) + \Gamma_0 \cos k(\sigma_1 + \theta_n)]. \tag{3.10}$$

Таким образом, комплексная скорость течения жидкости может быть определена по формуле (3.1) с учетом (3.10) как функция положения вихреисточника. В частности, в самой этой точке она будет равна

$$\bar{v}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{N} \frac{\Gamma_n}{\varepsilon - z_n} = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi i r} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\bar{\varepsilon} e^{-i\sigma_1} - e^{i\theta_n}} \times \left\{\gamma_0 - \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \bar{\varepsilon}^k [q \sin k(\sigma_1 + \theta_n) + \Gamma_0 \cos k(\sigma_1 + \theta_n)]\right\}. \tag{3.11}$$

Разлагая дробь, входящую в выражение (3.11), в сходящийся ряд и суммируя его, найдем

$$\bar{v}(\varepsilon) = -\frac{\exp[-i(\omega t - \sigma_1)]}{\pi r}(q + i\Gamma_0)\frac{\bar{\varepsilon}}{1 - \bar{\varepsilon}^2}.$$

Подставляя значение скорости, комплексно-сопряженной к $\bar{v}(\varepsilon)$, в уравнение движения вихреисточника (2.1) и разделяя его действительную и мнимую части, с учетом (3.3) получим

$$d\bar{\varepsilon}/dt = -q\bar{\varepsilon}/(\pi r^2(1 - \bar{\varepsilon}^2)); \tag{3.12}$$

$$\omega_0 = d\sigma/dt = \Gamma_0/(\pi r^2(1 - \bar{\varepsilon}^2)), \tag{3.13}$$

где ω_0 — скорость изменения угловой координаты вихреисточника. Из формулы (3.12) следует, что решение поставленной задачи в квазистационарном приближении для $\bar{\varepsilon} < 1$ предельного цикла не имеет.

4. Учет влияния вихревых следов. Как будет видно из дальнейшего, подобно системе (3.12), (3.13) в рассматриваемом предельном случае $N \to \infty$ соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений автономна и с учетом влияния вихревых следов. Отсюда следует, что предельный цикл, если он существует, будет представлять собой окружность с центром в начале координат ($\bar{\varepsilon} = \mathrm{const}$). При этом вихреисточник будет перемещаться вдоль траектории с постоянной угловой скоростью ω_0, т. е. в выражении (3.3) величина $\sigma = \omega_0 t$. Из (3.3) также следует

$$\sigma_1(t) = \omega_1 t, \text{ где } \omega_1 = \omega - \omega_0 = \mathrm{const}. \tag{4.1}$$

В соответствии с выражением (3.6) и с учетом (4.1) нестационарная составляющая комплексной скорости течения жидкости, индуцируемой вихреисточником в контрольных точках профилей, может быть представлена в виде суммы гармоник

$$\bar{v}(z_m) = \frac{q - i\Gamma_0}{2\pi r} \sum_{k=1}^{N-1} (\bar{\varepsilon} e^{-i\varphi_m})^k \exp(-ik\omega_1 t) \quad (m = 1, 2, \ldots, N). \tag{4.2}$$

В силу линейности задачи нестационарные составляющие циркуляций на профилях решетки представим в виде суммы тех же гармоник аналогично (3.10):

(4.3)

$$\Gamma_n = -\frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \delta_k \bar{\varepsilon}^k \{q \sin[k(\omega_1 t + \theta_n) + \beta_k] + \Gamma_0 \cos[k(\omega_1 t + \theta_n) + \beta_k]\},$$

где δ_k, β_k — амплитудный коэффициент и сдвиг фазы k-й гармоники, возникающие вследствие влияния вихревых следов.

Для определения значений δ_k и β_k необходимо найти положение линий контактного разрыва $\mathcal{S}_n$, моделирующих вихревые следы, и интенсивность вихрей в этих следах в любой момент времени. С этой целью зададим положение некоторого свободного элементарного вихря, сбегающего с n-го профиля, в виде

$$\zeta_n(\tau) = \rho(\tau)\, e^{i\psi_n(\tau)},$$

где τ — параметр, определяющий промежуток времени, прошедший с момента отделения этого вихря от профиля. Предполагая, что присоединённые вихри n-го профиля сосредоточены в точке $z_n = r \exp[i(\theta_n + \omega t)]$, угловую координату свободного вихря можно определить по формуле

$$\psi_n(\tau) = \theta_n + \omega t - \omega\tau + \tilde{\psi}, \tag{4.4}$$

где $\tilde{\psi}$ — угол отклонения вихря за счет абсолютного движения его в окружном направлении.

Воспользовавшись выражениями для проекций абсолютной скорости движения вихря на радиальное и окружное направления

$$v_\rho = d\rho/d\tau = q/(2\pi\rho),\quad v_\psi = \rho\partial\tilde{\psi}/\partial\tau = (\Gamma_0 + N\gamma_0)/(2\pi\rho),$$

с учетом начальных условий $\rho = r$, $\tilde{\psi} = 0$ при $\tau = 0$ найдем

$$q\tau/\pi = r^2(\bar{\rho}^2 - 1),\quad \tilde{\psi} = \bar{\Gamma}_0 \ln\bar{\rho}, \tag{4.5}$$

где

$$\bar{\rho} = \rho/r;\quad \bar{\Gamma}_0 = (\Gamma_0 + N\gamma_0)/q.$$

С помощью (4.5) выражение (4.4) преобразуется к виду

$$\psi_n = \theta_n + \omega t - \bar{\psi}(\bar{\rho}), \tag{4.6}$$

где $\bar{\psi} = (c/2)(\bar{\rho}^2 - 1) - \bar{\Gamma}_0 \ln\bar{\rho}$; $c = (2\pi r^2\omega)/q$.

Зависимость (4.6) и представляет собой уравнение линии вихревого следа $\mathcal{S}_n$, сбегающего с n-го профиля, для данного момента времени t.

Погонная интенсивность вихрей в следе, обусловленная изменением циркуляции вокруг n-го профиля по k-й гармонике, может быть определена по формуле [3]

$$\gamma_n^{(k)}(s, t) = -\frac{1}{v(s)}\frac{\partial\Gamma_n^{(k)}}{\partial t}\bigg|_{t=t_1}\quad (t_1 = t - \tau), \tag{4.7}$$

где $v(s)$ — относительная скорость вихрей в системе координат, жестко связанной с решеткой; s — дуговая координата вихревой линии.

Рассмотрим теперь выражение для интенсивности элементарного свободного вихря, имеющего дуговую координату s:

$$d\bar{\Gamma}_n^{(k)}(s) = \gamma_n^{(k)}(s)\, ds.$$

Так как $ds = v(s)d\tau$, то, учитывая, что s и τ являются функциями параметра ρ, с помощью (4.5), (4.7) получим

$$d\bar{\Gamma}_n^{(k)}(\rho) = -\frac{2\pi\rho}{q}\frac{\partial\Gamma_n^{(k)}}{\partial t}\bigg|_{t=t_1} d\rho = \tilde{\gamma}_n^{(k)}(\rho)\, d\rho.$$

Выражение для $\tilde{\gamma}_n^{(k)}$ найдем с помощью (4.3):

$$\tilde{\gamma}_n^{(k)} = \frac{4\pi k\omega_1\bar{\varepsilon}^k\delta_b}{qN}\rho\{q\cos[k(\omega_1 t + \theta_n) + \beta_k] - \Gamma_0\sin[k(\omega_1 t + \theta_n) + \beta_k]\}.$$

Таким образом, в результате проведенных преобразований положение вихревых следов и их погонная интенсивность определены как функции параметров ρ и t. Это позволяет достаточно просто определить нестационарную составляющую комплексной скорости течения жидкости с учетом вихревых следов. Для k-й гармоники присоединенных и свободных вихрей всех профилей решетки она будет равна

$$\bar{v}^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{\Gamma_n^{(k)}}{z - z_n} + \int_r^\infty \frac{\tilde{\gamma}_n^{(k)} d\rho}{z - \zeta(\rho)}\right].$$

Можно показать, что при $N \to \infty$ комплексная скорость $\bar{v}^{(k)}(z)$ будет стремиться к предельному ее значению, которое равно скорости, индуцируемой присоединенными и свободными вихрями, непрерывно распределенными по окружности, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \bar{v}^{(k)}(z) = \tilde{v}^{(k)}(z) = \frac{N}{(2\pi)^2 i}\oint\left[\frac{\bar{\gamma}^{(k)}(\theta)}{z - re^{i(\theta+\omega t)}} + \int_r^\infty \frac{\tilde{\gamma}(\theta, \rho)\, d\rho}{z - \rho e^{i(\theta+\omega t - \psi)}}\right] d\theta. \tag{4.8}$$

Здесь $\bar{\gamma}^{(k)}(\theta)$ и $\tilde{\gamma}^{(k)}(\rho, \theta)$ — непрерывные функции, совпадающие при $\theta = \theta_n$ со значениями $\frac{N}{2\pi r}\Gamma_n^{(k)}(\theta_n)$ и $\frac{N}{2\pi r}\tilde{\gamma}^{(k)}(\theta_n)$.

Вычисляя контурные интегралы в выражении (4.8) с помощью теории вычетов, найдем значения $\tilde{v}^{(k)}$ в контрольных точках профилей:

$$\tilde{v}^{(k)}(z_m) = -\frac{\bar{\varepsilon}^k \delta_k \exp[-i(\omega t + \varphi_m)]}{2\pi i r} \times \tag{4.9}$$

$$\times\left\{\frac{q - i\Gamma_0}{\bar{R}^{k+1}}\exp[-ik(\omega_1 t + \varphi_m) - i\beta_k]\left(i - kc\bar{\omega}_1 A_1^{(k)}\right) + \right.$$

$$\left. + kc\bar{\omega}_1(q + i\Gamma_0)\bar{R}^{k-1}\exp[ik(\omega_1 t + \varphi_m) + i\beta_k]A_2^{(k)}\right\},$$

где

$$A_1^{(k)} = \int_1^{\bar{R}} \bar{\rho}^{k+1}\exp\left\{-ik\left[\frac{c}{2}\bar{\omega}_0(\bar{\rho}^2 - 1) - \bar{\Gamma}_0 \ln\bar{\rho}\right]\right\}d\bar{\rho}, \tag{4.10}$$

$$A_2^{(k)} = \int_{\bar{R}}^\infty \frac{1}{\bar{\rho}^{k+1}}\exp\left\{ik\left[\frac{c}{2}\bar{\omega}_0(\bar{\rho}^2 - 1) - \bar{\Gamma}_0\ln\bar{\rho}\right]\right\}d\bar{\rho}$$

$$\left(\bar{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{\omega},\quad \bar{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{\omega},\quad \bar{R} = \frac{R}{r}\right).$$

Введем обозначения

$$q - i\Gamma_0 = \bar{q}e^{-i\xi},\quad A_1^{(k)} = g_1^{(k)}e^{i\eta_1^{(k)}},\quad A_2^{(k)} = g_2^{(k)}e^{i\eta_2^{(k)}}. \tag{4.11}$$

Из условия непротекания (3.2) с учетом (4.2), (4.9) получим

$$\operatorname{tg}\beta_k = c\bar{\omega}_1\left\{\frac{g_1\cos\eta_1 + g_2\bar{R}^{2k}\cos(2\alpha_1 + \eta_2)}{1 - c\bar{\omega}_1 g_1\sin\eta_1 + c\bar{\omega}_1 g_2\bar{R}^{2k}\sin(2\alpha_1 + \eta_2)}\right\}^{(k)}, \tag{4.12}$$

$$\delta_k = \left\{\frac{2}{\cos\beta_k + c\bar{\omega}_1\left[g_1\sin(\beta_k + \eta_1) + g_2\bar{R}^{2k}\sin(2\alpha_1 + \eta_2 + \beta_k)\right]}\right\}^{(k)}.$$

Аналогично (4.9) найдем значения $\tilde{v}^{(k)}$ в точке ε:

$$\tilde{v}^{(k)}(\varepsilon) = -\frac{r}{2}c\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\xi}\,\delta_k b_k \bar{\varepsilon}^{2k-1}\exp[i(\beta_k + \gamma_k + \xi - \omega_0 t)], \tag{4.13}$$

где $b_k e^{i\gamma_k} = 1 - ic\bar{\omega}_1 A_3^{(k)}$; $A_3^{(k)} = \int_1^\infty \frac{1}{\bar{\rho}^{k-1}}\exp\left\{ik\left[\frac{c}{2}(\bar{\rho}^2 - 1) - \bar{\Gamma}_0\ln\bar{\rho}\right]\right\}d\bar{\rho}$.

Выражение (4.13) в совокупности с (4.10)—(4.12) определяет комплексную скорость, индуцируемую присоединенными и свободными вихрями, в точке расположения вихреисточника как функцию координат этого положения и времени.

Суммируя все гармоники этой скорости и удовлетворяя уравнению (2.1), с учетом (3.3), (4.1) найдем соотношения, которым должны удовлетворять параметры предельного цикла $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\omega}_0$ с учетом влияния вихревых следов:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \delta_k b_k \bar{\varepsilon}^{2(k-1)} \cos(\beta_k + \gamma_k + \xi) = 0,$$

$$\bar{\omega}_0 = \frac{c}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \xi} \sum_{k=1}^{N-1} \delta_k b_k \bar{\varepsilon}^{2(k-1)} \sin(\beta_k + \gamma_k + \xi).$$

5. Предельный цикл. Покажем, что в рамках модели, рассмотренной в п. 4, предельный цикл движения вихреисточника существует, по крайней мере, при малых значениях его параметров

(5.1) $$\bar{\omega}_0 \ll 1, \ \bar{\varepsilon} \ll 1.$$

Предполагая, что $\delta_k \sim 1$ и $b_k \sim 1$ для $k > 1$, в первом уравнении можно ограничиться двумя членами суммы, а во втором — тремя. Тогда будем иметь

(5.2) $$\bar{\varepsilon}^2 \approx -\frac{\delta_1 b_1 \cos\chi_1}{\delta_2 b_2 \cos\chi_2} \quad (\chi_k = \beta_k + \gamma_k + \xi);$$

(5.3) $$\bar{\omega}_0 \approx \frac{c}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\xi} \left[\delta_1 b_1 \frac{\sin(\chi_1 - \chi_2)}{\cos\chi_2} + \bar{\varepsilon}^4 \delta_3 b_3 \sin\chi_3 \right].$$

Здесь δ_k, β_k, b_k и γ_k — функции искомой величины $\bar{\omega}_0$ и исходных параметров c, $\bar{\Gamma}_0$, α_1 и ξ, $\bar{R}$. Они определяются с помощью интегралов $A_j^{(k)}$ (4.10), (4.13). Рассмотрим эти интегралы.

Пусть $\bar{R} - 1 \ll 1$. Тогда для $A_1^{(k)}$ имеет место оценка

(5.4) $$A_1^{(k)} \ll 1 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Несобственные интегралы $A_j^{(k)}$ ($j = 2, 3$) вычисляются с помощью таблиц [4] и имеют вид

(5.5)

$$A_j^{(k)} = \frac{1}{2} \exp\left[i \left(\frac{\pi}{2} \nu_k - \lambda_j^{(k)} \right) - \nu_k \ln(\lambda_j^{(k)}) \right] \Gamma(\nu_k, -i\bar{\rho}_j \lambda_j^{(k)}) \quad (k = 1, 2, 3),$$

где $\Gamma(\nu, \lambda)$ — гамма-функция;

$$\nu_k = 1 - k(1 + i\bar{\Gamma}_0)/2; \ \bar{\rho}_2 = \bar{R}^2; \ \bar{\rho}_3 = 1;$$
$$\lambda_2^{(k)} = kc\bar{\omega}_0/2; \quad \lambda_3^{(k)} = kc/2.$$

При этом выражения для $A_2^{(k)}$ могут быть представлены приближенно как функции параметра $\bar{\omega}_0$:

(5.6) $$A_2^{(1)} \approx \frac{1}{\sqrt{\bar{\omega}_0}} f_1 \exp\left(i \frac{\bar{\Gamma}_0}{2} \ln \bar{\omega}_0 \right), \ A_2^{(2)} \approx f_2 \exp(i\bar{\Gamma}_0 \ln \bar{\omega}_0), \ A_2^{(3)} \approx f_3,$$

где f_k — комплексные функции параметров c и $\bar{\Gamma}_0$. Значения же $A_3^{(k)}$, как и f_k, не зависят от параметра $\bar{\omega}_0$.

Учитывая (5.4), из (4.12) получим

(5.7) $$\beta_k = \frac{\pi}{2} - 2\alpha_1 - \eta_2^{(k)} - \varkappa_k, \quad \delta_k = \frac{2}{\cos\beta_k + ca_2^{(k)} \cos\varkappa_k},$$

где $\varkappa_{(k)} = \arcsin\left(\frac{\sin\beta_k}{ca_2^{(k)}} \right)$.

В случае $c \sim 1$ из (5.5)—(5.7) следует, что

(5.8) $$\varkappa_1 \ll 1, \quad \delta_1 = 2\sqrt{\bar{\omega}_0}/c\,|f_1|.$$

Если теперь (5.8) подставить в (5.2), (5.3), то получим

$$\bar{\varepsilon}^2 = -h_1\sqrt{\bar{\omega}_0}\,\frac{\cos\chi_1}{\cos\chi_2}; \tag{5.9}$$

$$\sqrt{\bar{\omega}_0}\left[1 - h_2\left(\frac{\cos\chi_1}{\cos\chi_2}\right)^2\right] = h_3\,\frac{\sin(\chi_1-\chi_2)}{\cos\chi_2}, \tag{5.10}$$

где h_n — некоторые функции параметров c, $\bar{\Gamma}_0$. Далее, принимая во внимание, что γ_k не зависит от $\bar{\omega}_0$, с помощью (5.2) и (5.6)—(5.8) найдем

$$\chi_1 - \chi_2 = \chi_0 + \varkappa_2 - (\bar{\Gamma}_0/2)\ln\bar{\omega}_0, \tag{5.11}$$

где χ_0 — некоторая ограниченная функция параметров c, $\bar{\Gamma}_0$.

Из (5.11) следует, что решение системы (5.9), (5.10) существует в широком диапазоне значений исходных параметров c, $\bar{\Gamma}_0$, α_1 и ξ, за исключением, быть может, некоторого дискретного их множества. Однако диапазон значений этих параметров ограничивается условием устойчивости предельного цикла, которое следует из (4.13) с учетом (5.1) и имеет вид $\cos\chi_1 < 0$.

Поступила 15 I 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жуковский Н. Е.** Вихревая теория гребного винта. Полн. собр. соч. Т. 6. М.— Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937.
2. **Пухлий В. А., Беляновский Е. С., Хвощевский И. Я.** О математической модели обтекания решетки профилей центробежного вентилятора нестационарным дозвуковым потоком идеальной несжимаемой жидкости. Деп. ВНИИС. Библиогр. указ. депон. рукоп., № 3, 1981. № регистр. 2346.
3. **Горелов Д. Н., Курзин В. Б., Сарен В. Э.** Аэродинамика решеток в нестационарном потоке. Новосибирск: Наука, 1971.
4. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

УДК 532.529.5

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ КВАЗИОДНОМЕРНОЕ НЕРАВНОВЕСНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛАХ

А. В. Федоров, В. М. Фомин, Е. П. Чиркашенко

(*Новосибирск*)

Качественное исследование системы дифференциальных уравнений квазиодномерного неравновесного течения газов в каналах при установившемся режиме позволяет описать возможные типы движения, имеющие место при различном задании образующей канала и кинетического уравнения, описывающего релаксационный процесс. Полезность такого рассмотрения заключается в возможности применения результатов этого анализа при численном решении задач о течении неравновесного газа. Исследование осложняется тем обстоятельством, что физическая модель описывается неавтономной системой уравнений. В [1, 2] приводится метод анализа фазового портрета такого рода систем. Ниже воспользуемся данным способом для решения задачи о течении смеси газа и жидких частиц с учетом неравновесной кристаллизации в каналах переменной площади сечения.

1. Физическая постановка задачи. Сведение к системе, записанной в нормальной форме. Получение характеристического уравнения. Уравнения квазиодномерного течения с учетом одного неравновесного процесса в канале переменной площади сечения имеют вид

$$uy = C_1 v,\ C_1 = u_0 y_0/v_0,\ udu + vdp = 0,\ TdS = -e_\xi d\xi,\quad d\xi = (\varkappa/u)dx. \tag{1.1}$$