УДК 513.43

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ СФЕРЫ

В. В. Мельников

Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики, 456770 Снежинск
E-mail: melnikw@snz.ru

Представлено решение задачи нестационарного теплообмена в трехслойной полой сфере в центрально-симметричной постановке с различными зависящими от времени граничными условиями на внутренней и внешней поверхностях. В каждом слое сферы происходит тепловыделение известной интенсивности, зависящее от радиальной координаты и времени. Решение получено с помощью конечного интегрального преобразования по радиальной координате. Представлено численное решение для одного из вариантов граничных условий.

Ключевые слова: нестационарный теплообмен, трехслойная сфера, интегральное преобразование, граничные условия.

Процессы теплообмена в трехслойной и многослойной пластинах, а также в двухслойных цилиндре и сфере с не зависящими от времени граничными условиями и постоянной начальной температурой рассматривались в работах [1, 2]. Для решения этих задач использовалось интегральное преобразование Лапласа. Получение решения задач теплообмена в цилиндре и сфере с количеством слоев более двух этим методом затруднительно. В работе [3] представлено решение задачи теплопроводности для бесконечной пластины с линейным начальным условием.

В настоящей работе представлено решение задачи теплообмена в трехслойной полой сфере с граничными условиями, зависящими от произвольной функции времени, и начальным условием, содержащим произвольную функцию радиуса. В каждом слое сферы происходит тепловыделение, зависящее от времени и радиальной координаты. Решение задачи получено с помощью использованного в [4, 5] метода конечного интегрального преобразования, который позволяет легко перейти к решению задачи с иными граничными условиями при минимальном изменении исходного алгоритма.

Ниже в качестве примера представлено решение задачи теплообмена в трехслойной сфере (рис. 1) со следующими граничными условиями: на внутренней поверхности первого слоя ставится граничное условие второго рода, на внешней поверхности третьего слоя — условие третьего рода; предполагается, что на границах между слоями имеет место полный тепловой контакт (граничное условие четвертого рода).

Поставленная задача сводится к решению уравнений

$$\begin{gathered}\frac{1}{\chi_i}\,\frac{\partial T_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial T_i}{\partial r} + \frac{w_i(\tau, r)}{\lambda_i}, \quad \tau > 0, \qquad T_i = T_i(\tau, r), \quad i = 1, 2, 3, \\ a \leqslant r \leqslant b \text{ при } i = 1, \qquad b \leqslant r \leqslant c \text{ при } i = 2, \qquad c \leqslant r \leqslant d \text{ при } i = 3\end{gathered} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\lambda_1\,\frac{\partial T_1}{\partial r}\Big|_{r=a} + q(\tau) = 0, \quad T_1\big|_{r=b} = T_2\big|_{r=b}, \quad \lambda_1\,\frac{\partial T_1}{\partial r}\Big|_{r=b} = \lambda_2\,\frac{\partial T_2}{\partial r}\Big|_{r=b},$$

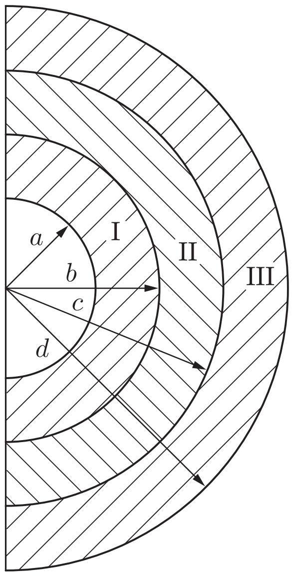

Рис. 1. Геометрия трехслойной сферы: слой I — $a \leqslant r \leqslant b$; слой II — $b \leqslant r \leqslant c$; слой III — $c \leqslant r \leqslant d$

$$T_2\big|_{r=c} = T_3\big|_{r=c}, \qquad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}\Big|_{r=c} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r}\Big|_{r=c}, \tag{2}$$
$$\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r}\Big|_{r=d} + \alpha\big[T_3\big|_{r=d} - T_s(\tau)\big] = 0$$

и начальными условиями

$$T_i\big|_{\tau=0} = T_{i0}(r), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Здесь T_i — температура в i-м слое сферы; λ_i, χ_i — тепло- и температуропроводность; w_i — мощность тепловыделения в объеме слоя; q — тепловой поток на внутренней поверхности сферы; α — коэффициент теплоотдачи на внешней поверхности сферы; T_s — температура среды; a, b, c, d — радиусы трехслойной сферы.

Заменой переменных

$$r = \sqrt{\chi_1}\, x \text{ при } a \leqslant r \leqslant b, \quad r = \sqrt{\chi_2}\, x \text{ при } b \leqslant r \leqslant c, \quad r = \sqrt{\chi_3}\, x \text{ при } c \leqslant r \leqslant d \tag{4}$$

соотношения (1)–(3) преобразуются к виду

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{\chi_i}{\lambda_i} w_{ii}, \quad V_i(\tau, x) = T_i(\tau, r), \quad x_{2i-1} \leqslant x \leqslant x_{2i}, \quad i = 1, 2, 3; \tag{5}$$

$$b_1 \frac{\partial V_1}{\partial x}\Big|_{x=x_1} + q(\tau) = 0, \qquad V_1\big|_{x=x_2} = V_2\big|_{x=x_3}, \qquad b_1 \frac{\partial V_1}{\partial x}\Big|_{x=x_2} = b_2 \frac{\partial V_2}{\partial x}\Big|_{x=x_3},$$
$$V_2\big|_{x=x_4} = V_3\big|_{x=x_5}, \qquad b_2 \frac{\partial V_2}{\partial x}\Big|_{x=x_4} = b_3 \frac{\partial V_3}{\partial x}|_{x=x_5}, \tag{6}$$
$$b_3 \frac{\partial V_3}{\partial r}\Big|_{x=x_6} + \alpha\big[V_3\big|_{x=x_6} - T_s(\tau)\big] = 0;$$
$$V_i\big|_{\tau=0} = V_{0i}(x), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{7}$$

где

$$w_{ii}(\tau, x) = w_i(\tau, r) \quad (i = 1, 2, 3), \quad x_1 = \frac{a}{\sqrt{\chi_1}}, \quad x_2 = \frac{b}{\sqrt{\chi_1}}, \quad x_3 = \frac{b}{\sqrt{\chi_2}}, \quad x_4 = \frac{c}{\sqrt{\chi_2}},$$
$$x_5 = \frac{c}{\sqrt{\chi_3}}, \quad x_6 = \frac{d}{\sqrt{\chi_3}}, \quad b_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\chi_1}}, \quad b_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\chi_2}}, \quad b_3 = \frac{\lambda_3}{\sqrt{\chi_3}}.$$

Для решения системы (5)–(7) построим конечное интегральное преобразование.

Пусть s и $U_i(sx)$ — собственные значения и собственные функции однородной задачи, соответствующей исходной задаче (5), (6):

$$\frac{d^2U_i}{dx^2} + \frac{2}{x}\,\frac{dU_i}{dx} + s^2U_i = 0, \qquad U_i = U_i(sx), \qquad x_{2i-1} \leqslant x \leqslant x_{2i}, \qquad i = 1, 2, 3; \tag{8}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}\Big|_{x=x_1} = 0, \qquad U_1\big|_{x=x_2} = U_2\big|_{x=x_3}, \qquad b_1\,\frac{dU_1}{dx}\Big|_{x=x_2} = b_2\,\frac{dU_2}{dx}\Big|_{x=x_3},$$
$$U_2\big|_{x=x_4} = U_3\big|_{x=x_5}, \qquad b_2\,\frac{dU_2}{dx}\Big|_{x=x_4} = b_3\,\frac{dU_3}{dx}\Big|_{x=x_5}, \tag{9}$$
$$b_3\,\frac{dU_3}{dx}\Big|_{x=x_6} + \alpha U_3\big|_{x=x_6} = 0.$$

В качестве ядра интегрального преобразования функции $V_i(\tau, x)$ примем функции $U_i(sx)$:

$$\bar V(\tau, s) = A_1 \int\limits_{x_1}^{x_2} x^2 V_1(\tau, x)\, U_1(sx)\, dx + A_2 \int\limits_{x_3}^{x_4} x^2 V_2(\tau, x)\, U_2(sx)\, dx + {}$$
$$+ A_3 \int\limits_{x_5}^{x_6} x^2 V_3(\tau, x)\, U_3(sx)\, dx \tag{10}$$

(x^2 — весовой множитель сферической системы координат).

Определим собственные функции $U_i(sx)$ и собственные значения s из уравнений (8), (9).

Решения уравнений (8) имеют вид

$$U_i(sx) = \frac{1}{x}\,(C_{2i-1}\sin sx + C_{2i}\cos sx), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{11}$$

где C_i — неопределенные константы. Из условий (9) следует система уравнений

$$C_1a_{11} + C_2a_{12} = 0, \qquad C_1a_{21} + C_2a_{22} + C_3a_{23} + C_4a_{24} = 0,$$
$$C_1a_{31} + C_2a_{32} + C_3a_{33} + C_4a_{34} = 0, \qquad C_3a_{43} + C_4a_{44} + C_5a_{45} + C_6a_{46} = 0,$$
$$C_3a_{43} + C_4a_{44} + C_5a_{45} + C_6a_{46} = 0, \qquad C_3a_{53} + C_4a_{54} + C_5a_{55} + C_6a_{56} = 0, \tag{12}$$
$$C_5a_{65} + C_6a_{66} = 0,$$

где

$$a_{11} = -\frac{\sin sx_1}{x_1^2} + s\,\frac{\cos sx_1}{x_1}, \quad a_{12} = -\frac{\cos sx_1}{x_1^2} - s\,\frac{\sin sx_1}{x_1}, \quad a_{21} = \frac{\sin sx_2}{x_2}, \quad a_{22} = \frac{\cos sx_2}{x_2},$$
$$a_{23} = -\frac{\sin sx_3}{x_3}, \quad a_{24} = -\frac{\cos sx_3}{x_3}, \quad a_{31} = b_1\Big(-\frac{\sin sx_2}{x_2^2} + s\,\frac{\cos sx_2}{x_2}\Big),$$
$$a_{32} = b_1\Big(-\frac{\cos sx_2}{x_2^2} - s\,\frac{\sin sx_2}{x_2}\Big), \quad a_{33} = b_2\Big(\frac{\sin sx_3}{x_3^2} - s\,\frac{\cos sx_3}{x_3}\Big),$$
$$a_{34} = b_2\Big(\frac{\cos sx_3}{x_3^2} + s\,\frac{\sin sx_3}{x_3}\Big), \quad a_{43} = \frac{\sin sx_4}{x_4}, \quad a_{44} = \frac{\cos sx_4}{x_4}, \quad a_{45} = -\frac{\sin sx_5}{x_5},$$

$$a_{46} = -\frac{\cos sx_5}{x_5}, \quad a_{53} = b_2\Big(-\frac{\sin sx_4}{x_4^2} + s\,\frac{\cos sx_4}{x_4}\Big), \quad a_{54} = b_2\Big(-\frac{\cos sx_4}{x_4^2} - s\,\frac{\sin sx_4}{x_4}\Big),$$

$$a_{55} = b_3\Big(\frac{\sin sx_5}{x_5^2} - s\,\frac{\cos sx_5}{x_5}\Big), \quad a_{56} = b_3\Big(\frac{\cos sx_5}{x_5^2} + s\,\frac{\sin sx_5}{x_5}\Big),$$

$$a_{65} = b_3\Big(-\frac{\sin sx_6}{x_6^2} + s\,\frac{\cos sx_6}{x_6}\Big) + \alpha\,\frac{\sin sx_6}{x_6}, \quad a_{66} = b_3\Big(-\frac{\cos sx_6}{x_6^2} - s\,\frac{\sin sx_6}{x_6}\Big) + \alpha\,\frac{\cos sx_6}{x_6}.$$

Решение системы (12) нетривиально только в том случае, если ее определитель обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Из уравнения (13) определяются собственные числа s.

Из системы (12) выразим константы C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 через C_1. Тогда выражения (11) принимают вид

$$U_1(sx) = \frac{C_1}{x}\,(\sin sx + f_1\cos sx), \qquad U_2(sx) = \frac{C_1}{x}\,(f_2\sin sx + f_3\cos sx),$$
$$U_3(sx) = \frac{C_1}{x}\,(f_4\sin sx + f_5\cos sx). \tag{14}$$

В коэффициенты f_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ входят величины a_{11}, a_{12}, a_{21}, ….

В интегральном преобразовании (10) и функциях (14) остаются неопределенными константы A_1, A_2, A_3, C_1. Значения A_1, A_2, A_3 определяются из условия ортогональности функций $U_i(sx)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} x^2 U_1(px)\,U_1(sx)\,dx = 0, \qquad \int_{x_3}^{x_4} x^2 U_2(px)\,U_2(sx)\,dx = 0, \qquad \int_{x_5}^{x_6} x^2 U_3(px)\,U_3(sx)\,dx = 0$$

при $p \neq s$ и из граничных условий (9). В результате получаем

$$A_1 = \frac{x_3^2 b_1}{x_2^2 b_2}, \qquad A_2 = 1, \qquad A_3 = \frac{x_4^2 b_3}{x_5^2 b_2}.$$

Величина C_1 определяется из условия ортонормированности функций $U_i(sx)$ $(i = 1, 2, 3)$

$$\sum_{i=1}^{3} A_i \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} x^2 [U_i(sx)]^2\,dx = 1.$$

Отсюда следует

$$C_1 = (J_1 + J_2 + J_3)^{-1/2},$$

где

$$J_1 = A_1\Big(\frac{(1 + f_1)(x_2 - x_1)}{2} + \frac{f_1^2 - 1}{4s}\,S_1 - \frac{f_1}{2s}\,P_1\Big),$$

$$J_2 = A_2\Big(\frac{(f_2^2+f_3^2)(x_4-x_3)}{2} + \frac{f_3^2-f_2^2}{4s}\,S_2 - \frac{f_2f_3}{2s}\,P_2\Big),$$
$$J_3 = A_3\Big(\frac{(f_4^2+f_5^2)(x_6-x_5)}{2} + \frac{f_5^2-f_4^2}{4s}\,S_3 - \frac{f_4f_5}{2s}\,P_3\Big),$$
$$S_1 = \sin 2sx_2 - \sin 2sx_1, \qquad P_1 = \cos 2sx_2 - \cos 2sx_1,$$
$$S_2 = \sin 2sx_4 - \sin 2sx_3, \qquad P_2 = \cos 2sx_4 - \cos 2sx_3,$$
$$S_3 = \sin 2sx_6 - \sin 2sx_5, \qquad P_3 = \cos 2sx_6 - \cos 2sx_5.$$

Итак, интегральное преобразование (10) определено.

Применяя интегральное преобразование к уравнению (5), получим

$$\frac{d\bar V}{d\tau} + s^2\bar V = FP_1(\tau,s) + FP_2(\tau,s), \tag{15}$$

где

$$FP_1(\tau,s) = \frac{A_1x_1^2}{b_1}\,U_1(sx_1)q(\tau) + \frac{A_3x_6^2}{b_3}\,U_3(sx_6)T_s(\tau)\alpha,$$
$$FP_2(\tau,s) = \sum_{i=1}^{3} A_i\,\frac{\chi_i}{\lambda_i}\int\limits_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} x^2 w_{ii}U_i\,dx. \tag{16}$$

Начальное условие для уравнения (15) получим из (7), применив интегральное преобразование (10):

$$\bar V_0 = \sum_{i=1}^{3} A_i \int\limits_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} x^2 U_i(sx)\,V_{0i}(x)\,dx. \tag{17}$$

Решение уравнения (15) с начальным условием (17) имеет вид

$$\bar V(\tau,s) = \exp(-s^2\tau)\Big(\int\limits_0^{\tau}(FP_1(\tau,s)+FP_2(\tau,s))\exp(s^2\tau)\,d\tau + \bar V_0(s)\Big).$$

В силу ортонормированности функций $U_i(sx)$ решение задачи имеет вид

$$V_i(\tau,x) = \sum_{s_j}\bar V(\tau,s_j)\,U_i(s_jx), \qquad i=1,2,3$$

(суммирование проводится по собственным значениям s). Переход от координат x к координатам r выполняется с помощью соотношений (4).

Покажем, какие изменения следует внести в полученное решение при переходе к иным граничным условиям на внутренней и внешней поверхностях трехслойной сферы. Предположим, что на внутренней поверхности первого слоя задано условие первого рода, на внешней поверхности третьего слоя — условие второго рода. Тогда в условиях (2) первое и последнее граничные условия следует заменить на следующие:

$$T_1\Big|_{r=a} = T_a(\tau), \qquad \lambda_3\,\frac{\partial T_3}{\partial r}\Big|_{r=d} - q(\tau) = 0.$$

При этом в условиях (9) первое и последнее граничные условия изменятся соответственно:

$$U_1\Big|_{x=x_1} = 0, \qquad \frac{\partial U_3}{\partial x}\Big|_{x=x_6} = 0.$$

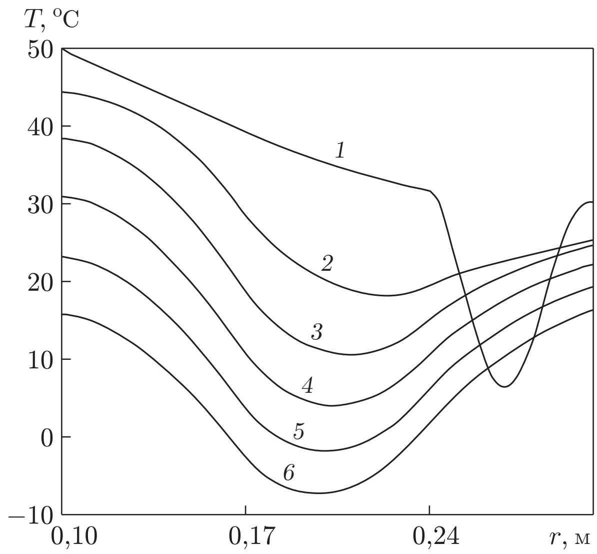

Рис. 2. Распределение температуры по толщине трехслойной сферы:
1 — $\tau = 0$; *2* — $\tau = 0{,}25$ ч; *3* — $\tau = 0{,}50$ ч; *4* — $\tau = 0{,}75$ ч; *5* — $\tau = 1{,}0$ ч; *6* — $\tau = 1{,}25$ ч

В результате в уравнениях (12) выражения для a_{11}, a_{12}, a_{65}, a_{66} принимают вид

$$a_{11} = \sin sx_1, \quad a_{12} = \cos sx_1, \quad a_{65} = -\frac{\sin sx_6}{x_6^2} + s\,\frac{\cos sx_6}{x_6}, \quad a_{66} = -\frac{\cos sx_6}{x_6^2} - s\,\frac{\sin sx_6}{x_6}.$$

Выражение (16) для $FP_1(\tau, s)$ записывается в виде

$$FP_1(\tau, s) = A_1 x_1^2 \left.\frac{dU_1}{dx}\right|_{x=x_1} T_a(\tau) + \frac{A_3 x_6^2}{b_3}\, U_3(sx_6) q(\tau).$$

Остальные выражения остаются без изменения.

Численный пример. Ниже приведено решение исходной задачи при следующих значениях параметров: $a = 0{,}1$ м; $b = 0{,}17$ м; $c = 0{,}24$ м; $d = 0{,}3$ м; $q = 2{,}1 \cdot 10^2$ Вт/м^2; $w_1 = w_3 = 0$; $w_2 = -2{,}94$ Вт/м^3; $\lambda_1 = 0{,}95$ Вт/(м·K); $\lambda_2 = 1{,}24$ Вт/(м·K); $\lambda_3 = 1{,}55$ Вт/(м·K); $a_1 = 0{,}58 \cdot 10^{-5}$ м^2/с; $a_2 = 0{,}75 \cdot 10^{-5}$ м^2/с; $a_3 = 1{,}35 \cdot 10^{-5}$ м^2/с; $T_s = 293$ K; $T_{01}(r) = 1{,}538\,33r + 338{,}3833$ [K]; $T_{02}(r) = 444/r + 286{,}0801$ [K]; $T_{03}(r) = -334{,}33 \sin r/r + 291{,}9891$ [K]; $\alpha = 0{,}33 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м$^2\cdot$ K).

На рис. 2 показаны распределения температуры по толщине трехслойной сферы в различные моменты времени. Видно, что начальное распределение температуры, включающее линейный, гиперболический и синусоидально-гиперболический участки, в течение 0,25 ч существенно изменяется вследствие преобладающего влияния поглощения w_2 тепла в среднем слое $b \leqslant r \leqslant c$, а также воздействия температуры среды T_s на внешней поверхности третьего слоя. На внутренней границе $r = a$, несмотря на то что на ней происходит поверхностное тепловыделение q, температура также понижается, но с большей скоростью, что также является следствием поглощения тепла в среднем слое. К моменту времени $\tau = 1{,}25$ ч температуры на внутренней поверхности первого слоя и на внешней поверхности третьего слоя принимают приблизительно одинаковые значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лыков А. В.** Теория тепло- и массопереноса. М.: Госэнергоиздат, 1963.
2. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967.

3. **Кудинов В. А., Аверин Б. В., Стефанюк Е. В.** Аналитические решения задач теплопроводности с переменным начальным условием на основе определения фронта температурного возмущения // Инж.-физ. журн. 2007. Т. 80, № 1. С. 27–35.
4. **Мельников В. В.** Нестационарный теплообмен в полом составном цилиндре // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 2. С. 130–140.
5. **Мельников В. В.** Нестационарный теплообмен в системе трех коаксиальных цилиндров // Инж.-физ. журн. 2007. Т. 80, № 1. С. 140–148.

Поступила в редакцию 7/XI 2007 г.,
в окончательном варианте — 17/XII 2007 г.