

УДК 532.591+532.517
DOI: 10.15372/PMTF202315412

РАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ СЛОЯ СМЕШЕНИЯ В СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В. Ю. Ляпидевский, А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mails: liapid@hydro.nsc.ru, chesnokov@hydro.nsc.ru

Предложена математическая модель, описывающая формирование внутренних гидравлических прыжков и перемешивание сонаправленных потоков идеальной стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска. Модель основана на трехслойном представлении течения с учетом вовлечения жидкости из внешних слоев в промежуточную вихревую прослойку и представляется в виде системы неоднородных законов сохранения. Скорость вовлечения задается условием равновесия в рамках более общей модели эволюции слоя смешения. Определены скорости распространения возмущений и сформулированы понятия докритического и сверхкритического течений. Показано, что модель применима для описания особенностей перемешивания и расщепления потока в глубоководных течениях. Построены решения, соответствующие обтеканию препятствия с образованием внутреннего гидравлического прыжка и области интенсивного перемешивания. Проведено сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными. Показано, что они хорошо согласуются.

Ключевые слова: слой смешения, внутренние гидравлические прыжки, приближение Буссинеска

Введение. Генерация внутренних волн, гидравлических прыжков и боров, а также формирование областей интенсивного перемешивания вследствие развития сдвиговой неустойчивости характерны для слоистых стратифицированных течений над неровным дном [1]. В природных условиях колебания температуры и солености приводят к расслоению толщи воды, при этом создаются условия для распространения внутренних волн, понижающих или повышающих уровень пикноклина. Особый интерес представляет исследование внутренних волн конечной амплитуды, способных перемещаться на значительные расстояния без существенного изменения формы. Такие волны регулярно регистрируются в прибрежных водах [2, 3] и в открытом море [4, 5]. Натурные наблюдения придонных гравитационных потоков в каналах Атлантического океана показывают, что в глубоководных течениях над уступами и препятствиями также распространены процессы перемешивания и генерации волн [6, 7]. Формирование внутренних гидравлических прыжков и боров является одним из механизмов перемешивания слоистой жидкости в сдвиговом течении. Несмотря на то что внутренние боры в настоящее время наблюдаются часто и в различных акваториях [8, 9], процесс их генерации в естественных условиях требует дальнейшего изучения.

В природных потоках сдвиг скорости определяется перепадом плотности жидкости по глубине и рельефом обтекаемой поверхности. Основные особенности таких течений вос-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-41-00090).

© Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А., 2024

производятся в лабораторных условиях [10, 11], что позволяет экспериментально исследовать развитие сдвиговой неустойчивости в нисходящих потоках на подветренной поверхности препятствия. Результаты экспериментов [11] по формированию гидравлического прыжка и слоя смешения в двухслойном одностороннем течении в канале прямоугольного сечения с локальным препятствием показывают возможность управления положением скачка с использованием условий вниз по потоку. Математические модели гидравлических прыжков в двухслойных сдвиговых течениях предложены и исследованы в работах [12, 13]. Установлено, что увеличение сдвига скорости в спутном потоке приводит к тому, что физически непротиворечивые решения в рамках двухслойного представления течения не существуют. Модификация двухслойной теории с учетом вовлечения жидкости [14] позволяет увеличить область применения модели и согласовать полученные результаты с результатами прямого численного моделирования [15]. Экспериментальное исследование и прямое численное моделирование турбулентного перемешивания и вовлечения окружающей жидкости в гравитационный поток проводились в работах [16, 17].

Методы математического моделирования сдвиговых стратифицированных течений с учетом турбулентного перемешивания, основанные на трехслойном представлении течения, предложены в [18]. В работах [19, 20] эти подходы были развиты и применены при построении моделей, описывающих эволюцию слоя смешения, внутренние волны и гидравлические скачки в слоистых стратифицированных течениях в приближении Буссинеска. В этих моделях скорость вовлечения жидкости из внешних слоев в промежуточный слой пропорциональна скорости “больших вихрей”, генерируемых сдвигом скорости в слоях. Предложенные модели были верифицированы путем сравнения с известными экспериментальными данными и результатами прямого численного моделирования. Аналогичные трехслойные модели применялись для описания перемешивания и вовлечения окружающей жидкости в гравитационное течение над склоном [21]. При этом использовалось дополнительное условие равновесия, позволяющее описывать процессы вовлечения с помощью более простых уравнений движения.

В данной работе предложена модель эволюции слоя смешения в сдвиговом стратифицированном течении над неровным дном, являющаяся равновесной для более общих уравнений [20]. Модель представляется в виде системы четырех неоднородных законов сохранения. Проведенные расчеты показывают, что предлагаемая модель применима для описания характерных режимов течения слоистой жидкости. Получены решения, описывающие расщепление гравитационного потока над склоном с образованием промежуточной застойной области [22, 23], а также формирование гидравлического скачка на подветренной поверхности препятствия [11].

1. Уравнения движения. Рассматривается плоскопараллельное движение устойчиво стратифицированной трехслойной жидкости, ограниченной непроницаемыми поверхностями $z = Z(x)$ и $z = H_0 = \text{const}$. Предполагается, что во внешних однородных слоях с плотностями ρ_1 и ρ_2 течение потенциальное, в промежуточном слое со средней плотностью $\bar{\rho} = (\rho_1 + \rho_2)/2$ движение жидкости вихревое. Такая структура потока обычно используется при моделировании слоя смешения, формирующегося вследствие развития неустойчивости границы раздела двух однородных слоев, движущихся с различными скоростями. Осредненные по глубине уравнения трехслойного течения с учетом турбулентного перемешивания в приближении Буссинеска имеют вид [20]

$$\begin{aligned} h_t + (uh)_x &= -\sigma q, & \eta_t + (v\eta)_x &= 2\sigma q, & \zeta_t + (w\zeta)_x &= -\sigma q, \\ u_t + \left(\frac{u^2}{2} + bh + \frac{b\eta}{2} + p^* \right)_x &= -bZ_x - \frac{c_1 u |u|}{h}, & w_t + \left(\frac{w^2}{2} + p^* \right)_x &= -\frac{c_2 w |w|}{\zeta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_t + \left(u^2 h + v^2 \eta + w^2 \zeta + \frac{bh^2}{2} + \frac{bh\eta}{2} + \frac{b\eta^2}{4} + Hp^* \right)_x &= \\
&= - \left(bh + \frac{b\eta}{2} + p^* \right) Z_x - c_1 u |u| - c_2 w |w|, \quad (1) \\
\left(\frac{u^2 h}{2} + \frac{(v^2 + q^2)\eta}{2} + \frac{w^2 \zeta}{2} + \frac{bh^2}{2} + \frac{bh\eta}{2} + \frac{b\eta^2}{4} \right)_t &+ \\
+ \left(\frac{u^3 h}{2} + (v^2 + q^2) \frac{v\eta}{2} + \frac{w^3 \zeta}{2} + \left(h + \frac{\eta}{2} \right) ubh + (h + \eta) \frac{vb\eta}{2} + p^* Q \right)_x &= \\
&= - \left(uh + \frac{v\eta}{2} \right) bZ_x - \frac{\sigma \kappa}{2} |q|^3 - c_1 |u|^3 - c_2 |w|^3.
\end{aligned}$$

Здесь x, t — пространственная координата и время; h, ζ, η — толщины нижнего, верхнего и промежуточного слоев; u, w, v — средние скорости жидкости в слоях; q — средняя скорость “больших вихрей” в промежуточном слое; $H = h + \eta + \zeta$ и $Q = uh + v\eta + w\zeta$ — полная толщина слоя и расход жидкости; $\rho_2 p^*$ — давление на верхней крышке канала; $b = g(\rho_1 - \rho_2)/\rho_2 > 0$ — постоянная плавучесть; g — ускорение свободного падения; c_1, c_2 — коэффициенты трения. Постоянные σ и κ определяют скорость вовлечения жидкости из внешних слоев в прослойку и диссипацию энергии. Взаимодействие потоков на внутренних границах течения представляет собой процесс вовлечения жидкости в прослойку и учтено в рассматриваемой модели.

В работах [20, 24] показано, что в зависимости от способа осреднения при моделировании “больших вихрей” процессы, происходящие в прослойке, описываются двумя близкими по структуре моделями. Параметры потока (границы раздела, скорость слоев), определенные по этим моделям, различаются незначительно. Поэтому ограничимся рассмотрением одной модели (модели I в [20, 24]). Кроме того, будем полагать, что слой смешения не достигает нижней или верхней границы области течения. Это предположение позволяет считать жидкость в слое смешения однородной с плавучестью $\bar{b} = b/2$ в силу симметрии вовлечения жидкости в прослойку из верхнего и нижнего однородных слоев [18].

Из равенства $H = H_0 - Z(x)$ и первых трех уравнений (1) следует, что $Q_x = 0$. С учетом этого уравнения и граничных условий во входном сечении канала полный расход $Q(t)$ можно считать известным. Дифференциальными следствиями системы (1) являются уравнения [20]

$$\begin{aligned}
v_t + vv_x + \frac{b}{2} h_x + \frac{b}{2} \eta_x + p_x^* &= -\frac{b}{2} Z_x + \frac{\sigma q}{\eta} (u + w - 2v), \\
q_t + vq_x &= \frac{\sigma}{2\eta} ((u - v)^2 + (w - v)^2 - (2 + \kappa \operatorname{sign}(q))q^2 - b\eta).
\end{aligned} \quad (2)$$

Поэтому в классе гладких решений громоздкие уравнения полного импульса и энергии трехслойного течения (последние два соотношения в (1)) можно заменить уравнениями (2). Более того, в [19, 20] показано, что замена закона сохранения энергии его дифференциальным следствием не приводит к качественным различиям получаемых разрывных решений.

Рассмотрим упрощенный вариант модели (1) для течений, в которых переменная q не меняет знак. Следуя [18, 21], полагаем, что неотрицательная скорость “больших вихрей” определяется из условия равновесия, при котором правая часть второго уравнения (2) тождественно обращается в нуль. Из этого условия можно выразить переменную q :

$$q^2 = \max \left\{ 0, \frac{(u - v)^2 + (w - v)^2 - b\eta}{2 + \kappa} \right\}, \quad q = \sqrt{q^2}. \quad (3)$$

Таким образом, в равновесной модели трехслойного течения при наличии перемешивания последнее уравнение системы (1) заменяется соотношением (3).

Использование переменных $r = u - w$ и $R = Q - wH$ позволяет исключить давление p^* в уравнениях баланса импульса и представить равновесную модель в виде системы эволюционных уравнений. Для определения вектора искомых функций $\mathbf{U} = (h, \eta, r, R)^\top$ получаем замкнутую систему четырех неоднородных законов сохранения

$$\begin{aligned} h_t + (uh)_x &= -\sigma q, & \eta_t + (v\eta)_x &= 2\sigma q, \\ r_t + \left(\frac{u^2 - w^2}{2} + bh + \frac{b\eta}{2} \right)_x &= -bZ_x - \frac{c_1 u |u|}{h} + \frac{c_2 w |w|}{\zeta}, \\ R_t + \left(u^2 h + v^2 \eta + w^2 \left(\zeta - \frac{H}{2} \right) + \frac{b}{2} \left(h^2 + h\eta + \frac{\eta^2}{2} \right) \right)_x &= \\ &= \left(\frac{w^2}{2} - bh - \frac{b\eta}{2} \right) Z_x - c_1 u |u| + c_2 w |w| \frac{h + \eta}{\zeta}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $H = H_0 - Z$; $\zeta = H - h - \eta$; скорости жидкости в слоях определяются из формул

$$w = \frac{Q - R}{H}, \quad u = r + w, \quad v = \frac{R - rh}{\eta} + w,$$

скорость “больших вихрей” q вычисляется из соотношения (3).

Для нахождения скоростей характеристик запишем систему (4) в векторной форме $\mathbf{U}_t + A\mathbf{U}_x = \mathbf{F}$. Матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} u & 0 & h & -h/H \\ w - u & w & h & 1 - \eta/H \\ b & b/2 & u & (w - u)/H \\ a_1 & a_2 & 2(u - v)h & w + 2(v - Q/H) \end{pmatrix},$$

где $a_1 = (u - v)^2 - (w - v)^2 + bh + b\eta/2$; $a_2 = (h + \eta)b/2 - (w - v)^2$. Собственные значения λ матрицы A находятся из полиномиального уравнения четвертого порядка

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) = H \det(A - \lambda I) &= \left((u - \lambda)^2 - \frac{bh}{2} \right) \left((w - \lambda)^2 - \frac{b\zeta}{2} \right) \eta + \\ &+ (v - \lambda)^2 \left(\left((u - \lambda)^2 - \frac{bh}{2} \right) \zeta + \left((w - \lambda)^2 - \frac{b\zeta}{2} \right) h \right) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Нетрудно показать, что в случае малого сдвига скорости в слоях $u \approx v \approx w$ все корни характеристического уравнения (5) являются вещественными. Течение будем называть сверхкритическим, если все вещественные скорости характеристик положительны. В случае если имеется хотя бы одна отрицательная скорость характеристики, течение является докритическим.

2. Стационарные решения. Система обыкновенных дифференциальных уравнений определяет класс стационарных решений равновесной модели (4)

$$\begin{aligned} (uh)' &= -\sigma q, & (v\eta)' &= 2\sigma q, & \left(\frac{u^2 - w^2}{2} + bh + \frac{b\eta}{2} \right)' &= -bZ' - \frac{c_1 u |u|}{h} + \frac{c_2 w |w|}{\zeta}, \\ \left(\frac{v^2 - w^2}{2} + \frac{bh}{2} + \frac{b\eta}{2} \right)' &= \frac{\sigma q}{\eta} (u + w - 2v) - \frac{b}{2} Z' + \frac{c_2 w |w|}{\zeta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по x ; переменная q определяется уравнением (3). В силу условия $H = H_0 - Z$ и постоянства полного расхода Q имеем

$$\zeta = H_0 - Z - h - \eta, \quad w = (Q - uh - v\eta)/\zeta. \quad (7)$$

При получении системы (6) использовано уравнение баланса импульса в промежуточном слое (первое соотношение (2)). Заметим, что для течений над ровным дном $Z = 0$ при постоянстве расхода $Q = \text{const}$ уравнения (4) инвариантны относительно преобразования Галилея. В этом случае решения в классе бегущих волн (искомые функции зависят от переменной $\xi = x - Dt$, $D = \text{const}$) эквивалентны стационарным решениям.

Систему (6) приведем к разрешенному относительно производных виду. В результате простых, но громоздких вычислений получаем

$$h' = \frac{B_2 C_1 - A_2 C_2}{A_1 B_2 - A_2^2}, \quad \eta' = \frac{C_1 - A_1 h'}{A_2}, \quad u' = -\frac{uh' + \sigma q}{h}, \quad v' = \frac{2\sigma q - v\eta'}{\eta}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{u^2}{h} + \frac{w^2}{\zeta} - b, & A_2 &= \frac{w^2}{\zeta} - \frac{b}{2}, & B_2 &= \frac{v^2}{\eta} + A_2, \\ C_1 &= -\sigma q \left(\frac{u}{h} - \frac{w}{\zeta} \right) - \left(\frac{w^2}{\zeta} - b \right) Z' - \frac{c_1 u |u|}{h} + \frac{c_2 w |w|}{\zeta}, \\ C_2 &= \sigma q \left(\frac{w}{\zeta} - \frac{u + w - 4v}{\eta} \right) - A_2 Z' + \frac{c_2 w |w|}{\zeta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что $\chi(0) = (A_1 B_2 - A_2^2)h\eta\zeta$, поэтому из обращения в нуль знаменателя правой части первого уравнения (8) следует, что $\lambda = 0$ является корнем характеристического полинома (5).

Из уравнений (6) и (3) следует, что в точке начала формирования слоя смешения (при $\eta \rightarrow 0$) значения переменных v и q выражаются через скорости внешних слоев следующим образом:

$$v_0 = \frac{u_0 + w_0}{2}, \quad q_0 = \frac{|u_0 - w_0|}{\sqrt{2(2 + \kappa)}}. \quad (10)$$

Здесь индекс “0” соответствует значениям функций в сечении $x = x_0$ при $\eta = 0$. Значения производных искомых функций в этой точке полагаются конечными. Формулы (10) позволяют поставить задачу Коши для уравнений (8) и описать начальный участок слоя смешения.

Равновесная модель (4) сформулирована в виде неоднородных законов сохранения, допускающих решения с сильным разрывом. Следующие из уравнений (4) условия Гюгонио для стационарного гидравлического скачка имеют вид

$$[Q_1] = 0, \quad [Q_m] = 0, \quad [J] = 0, \quad [W] = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= uh, & Q_m &= v\eta, & J &= \frac{u^2 - w^2}{2} + bh + \frac{b\eta}{2}, \\ W &= u^2 h + v^2 \eta + \left(\zeta - \frac{H}{2} \right) w^2 + \frac{b}{2} \left(h^2 + h\eta + \frac{\eta^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Квадратные скобки означают разность предельных значений функции f на разрыве $x = x_s$: $[f] = f^+ - f^-$ (f^\pm — предельные значения f при $x \rightarrow x_s \pm 0$). Переменные ζ и w определяются формулами (7).

Пусть параметры потока \mathbf{U}^- перед разрывом известны. Тогда можно вычислить Q_1 , Q_m , J , W , а также $Q_2 = w\zeta$. Скорости жидкости в слоях за разрывом выражаются через значения толщин слоев:

$$u^+ = \frac{Q_1}{h^+}, \quad v^+ = \frac{Q_m}{\eta^+}, \quad w^+ = \frac{Q_2}{\zeta^+} \quad (\zeta^+ = H - h^+ - \eta^+). \quad (12)$$

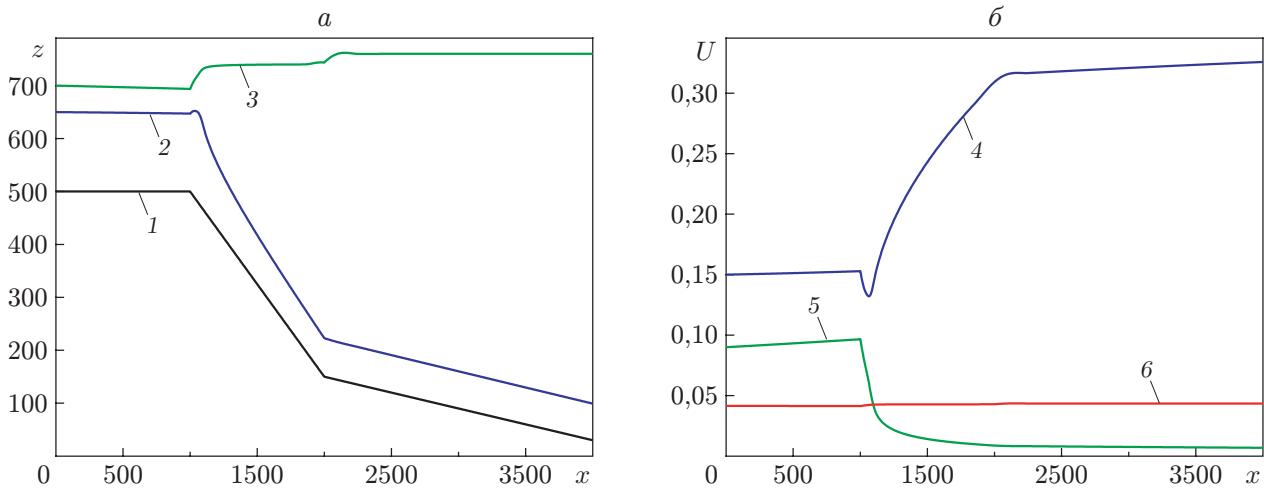


Рис. 1. Результаты расчета докритического течения над склоном:

a — рельеф дна (1) и границы раздела слоев (2, 3); *б* — распределение скорости жидкости в нижнем (4), промежуточном (5) и верхнем (6) слоях

Подставляя эти выражения в соотношения $[J] = 0$, $[W] = 0$, получаем систему двух алгебраических уравнений для определения h^+ и η^+ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1^2}{(h^+)^2} - \frac{Q_2^2}{(\zeta^+)^2} \right) + bh^+ + \frac{b\eta^+}{2} &= J, \\ \frac{Q_1^2}{h^+} + \frac{Q_m^2}{\eta^+} + \left(1 - \frac{H}{2\zeta^+} \right) \frac{Q_2^2}{\zeta^+} + \frac{b}{2} \left((h^+)^2 + h^+ \eta^+ + \frac{(\eta^+)^2}{2} \right) &= W. \end{aligned} \quad (13)$$

После нахождения толщин слоев за скачком h^+ и η^+ восстанавливаются скорости жидкости в слоях u^+ , v^+ , w^+ . Условия Гюгонио (11), сводящиеся к алгебраическим уравнениям (13), используются ниже при построении стационарных решений с сильным разрывом.

Выбор законов сохранения влияет на определяемые параметры течения за фронтом разрыва. Однако проведенные в [19, 20] расчеты показывают, что для моделей трехслойного течения при наличии перемешивания выбор законов сохранения оказывает влияние лишь в узкой области за скачком.

2.1. *Транскритическое течение над склоном.* Условием существования транскритического течения является одновременное обращение в нуль числителя и знаменателя правой части первого уравнения (8) в некоторой точке $x = x_*$, т. е.

$$B_2 C_1 - A_2 C_2 = 0, \quad A_1 B_2 - A_2^2 = (h\eta\zeta)^{-1} \chi(0) = 0. \quad (14)$$

Если перед сечением $x = x_*$ течение докритическое ($\chi(0) < 0$), то за ним оно может перейти в сверхкритический режим ($\chi(0) > 0$) либо остаться докритическим.

Приведем примеры построения стационарных решений уравнений трехслойного течения над неровным дном. Здесь и далее полагаем $\sigma = 0,15$, $\varkappa = 6$. Пусть при $x = 0$ заданы толщины слоев $h_0 = 150$, $\eta_0 = 50$ и скорости $u_0 = 0,15$, $v_0 = 0,09$, $w_0 = 0,03$. Координата верхней границы равна $z = H_0 = 2000$, плавучесть $b = 2 \cdot 10^{-4}$, коэффициент трения $c_1 = 0,003$. Толщина верхнего слоя выбрана достаточно большой, поэтому полагаем, что коэффициент трения $c_2 = 0$. Рельеф дна $z = Z(x)$ показан на рис. 1,*a*, 2,*a* (кривые 1). Нетрудно показать, что при заданных условиях в сечении $x = 0$ течение является докритическим (уравнение (5) имеет три положительных корня и один отрицательный). При этом переменная q , определяемая формулой (3) и характеризующая процесс

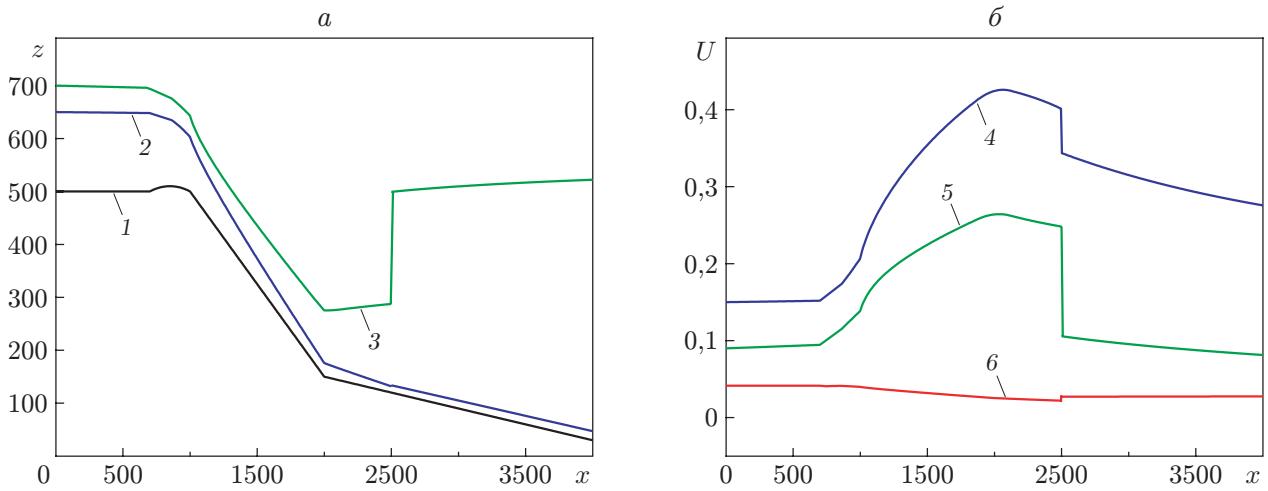


Рис. 2. Результаты расчета транскритического течения с сильным разрывом:

a — рельеф дна (1) и границы раздела слоев (2, 3); *б* — распределение скорости жидкости в нижнем (4), промежуточном (5) и верхнем (6) слоях

перемешивания, равна нулю ($q_0 = 0$). Значения приведенных размерных величин указаны в системе СИ. Указанные перепады глубин, скорости и малая плавучесть характерны для глубоководных течений, регистрируемых в разломах Романш и Чейн [6, 7].

Решение уравнений (8) с приведенными выше условиями во входном сечении $x = 0$ показаны на рис. 1, 2. Определяющая рельеф дна функция $z = Z(x)$ (кривая 1 на рис. 1) состоит из горизонтального участка $Z = Z_0 = 500$, $x \in (0, x_1)$ и двух прямолинейных участков с угловыми коэффициентами $k = -0,35; -0,06$ на интервалах $x \in (x_1, x_2)$ и $x \in (x_2, x_3)$, где $x_1 = 1000$; $x_2 = 2x_1$; $x_3 = 4x_1$. В этом случае решение остается докритическим всюду в рассматриваемой области течения. Заметим, что в окрестности сечения $x = x_1$ левые части обоих соотношений (14) близки к нулю, поэтому малое возмущение потока может привести к возникновению транскритического течения. Слева от сечения $x = x_1$, в котором начинается резкое изменение рельефа дна, решение практически сохраняет заданные при $x = 0$ значения, так как на этом участке вовлечение жидкости отсутствует. В области $x > x_1$ наблюдается существенное увеличение толщины промежуточного слоя (см. рис. 1, *a*), что не связано с процессом вовлечения жидкости из внешних слоев, поскольку переменная $q = 0$. Резкое увеличение толщины прослойки объясняется практически полной остановкой течения в промежуточном слое на данном участке ($v \approx 0$), как показано на рис. 1, *б*, на котором приведено распределение скоростей жидкости в слоях. Такой режим течения, регистрируемый в натурных наблюдениях и реализуемый в экспериментах, соответствует расщеплению потока [7, 22]. При этом между придонной струей и медленным течением в верхнем слое формируется застойная область.

При выбранных параметрах потока незначительное изменение рельефа дна на горизонтальном участке приводит к смене режима течения. Отличие от расчета в случае докритического режима течения состоит в том, что на интервале $x \in (\bar{x}, x_1)$, $\bar{x} = 700$ функция $z = Z(x)$ имеет вид параболы, максимум которой $z_m = Z_0 + d$, $d = 10$ достигается в средней точке интервала $x = (\bar{x} + x_1)/2$ (кривая 1 на рис. 2, *a*). В окрестности вершины параболы течение становится сверхкритическим (все корни характеристического уравнения (5) положительны). В области сверхкритического течения происходит генерация “больших вихрей” ($q > 0$), что приводит к вовлечению жидкости из внешних слоев в промежуточный слой смешения, уменьшению толщины нижнего слоя и увеличению тол-

щины прослойки (см. рис. 2, *a*). При этом скорость жидкости в нижнем слое и вихревой прослойке возрастает в случае течения над крутым склоном; скорость течения в верхнем слое большой толщины незначительно уменьшается. На более пологом участке дна происходит замедление течения, особенно существенное в придонном слое (см. рис. 2, *b*), что объясняется наличием силы трения, влияние которой становится значительным при сравнительно малой толщине нижнего слоя.

Вычисление корней уравнения (5) для рассматриваемого решения в области над крутым склоном ($x \in (x_1, x_2)$) показывает, что на интервале $x \in (1245, 1920)$ два из четырех характеристических корней имеют ненулевую мнимую часть. При этом $\chi(0) > 0$, что определяет сверхкритический режим течения. Выход из области гипербolicности представляется естественным, поскольку модель описывает нелинейную стадию развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. При этом разрушения течения не происходит, так как рост возмущений в промежуточном слое компенсируется увеличением толщины прослойки в результате вовлечения в нее окружающей жидкости.

Как отмечалось выше, уравнения (4) допускают решения с сильным разрывом. Положение скачка в нестационарных расчетах определяется условиями вниз по потоку, например, наличием локального препятствия. В стационарном решении положение разрыва $x = x_s$ в сверхкритическом при $x < x_s$ течении можно выбрать произвольно. Пусть скачок расположен в сечении $x_s = 2500$ (слева от этой точки все скорости характеристик вещественные и положительные). В результате решения системы двух алгебраических уравнений (13) по известным значениям функций при $x = x_s - 0$ определим толщины слоев за скачком. Затем по формулам (12) найдем скорости жидкости в слоях при $x = x_s + 0$. Численный анализ системы (13) показывает, что в данном случае имеется одно физически непротиворечивое решение, описывающее течение, переходящее в докритический режим за скачком (одна отрицательная характеристика, остальные положительные). Непрерывное течение в области $x > x_s$ определяется решением уравнений (8) с известными данными Коши при $x = x_s + 0$. На рис. 2 видно, что в области за скачком толщина промежуточного слоя возрастает вследствие замедления течения в нем.

2.2. Сравнение результатов расчетов с данными натурных наблюдений. Предложенная модель (4) позволяет описать особенности и некоторые количественные характеристики глубоководных течений. Построим решение стационарных уравнений (8) на интервале $x \in (0, 3850)$ над рельефом дна, соответствующим меридиональному сечению в разломе Романш (см. рис. 5.33 в [6] и рис. 11 в [23]). Полагаем $h_0 = 350$, $\eta_0 = 100$, $u_0 = 0,2$, $v_0 = 0,1$, $w_0 = 0$. Все размерные величины указаны в системе СИ. Рельеф дна аппроксимирован функцией $Z = 4600 - 0,0012x^{1,5}$.

Результаты расчета положения границ раздела слоев по уравнениям (8) показаны на рис. 3 толстыми пунктирными линиями. Этот режим течения аналогичен рассмотренному выше режиму течения с расщеплением потока на придонную струю и застойный промежуточный слой (см. рис. 1). Течение является докритическим ($\chi(0) < 0$), но в окрестности входного сечения оно близко к транскритическому (см. (14)). Перемешивание слоев отсутствует ($q = 0$). При $x > 1600$ уравнения движения для рассматриваемого решения не являются гиперболическими (два из четырех корней полинома (5) имеют ненулевую мнимую часть). Форма верхней границы раздела соответствует форме изотерм для $T > 1,2$ °C, а форма нижней границы — форме изотерм для $T < 0,7$ °C. Распределения скоростей в нижнем и промежуточном слоях аналогичны представленному на рис. 1, *b* в области над наклонным дном и соответствуют результатам натурных измерений меридиональной компоненты скорости [6, 23].

3. Формирование стационарных структур. В работе [11] представлены результаты лабораторного исследования стационарных внутренних гидравлических скачков. Экс-

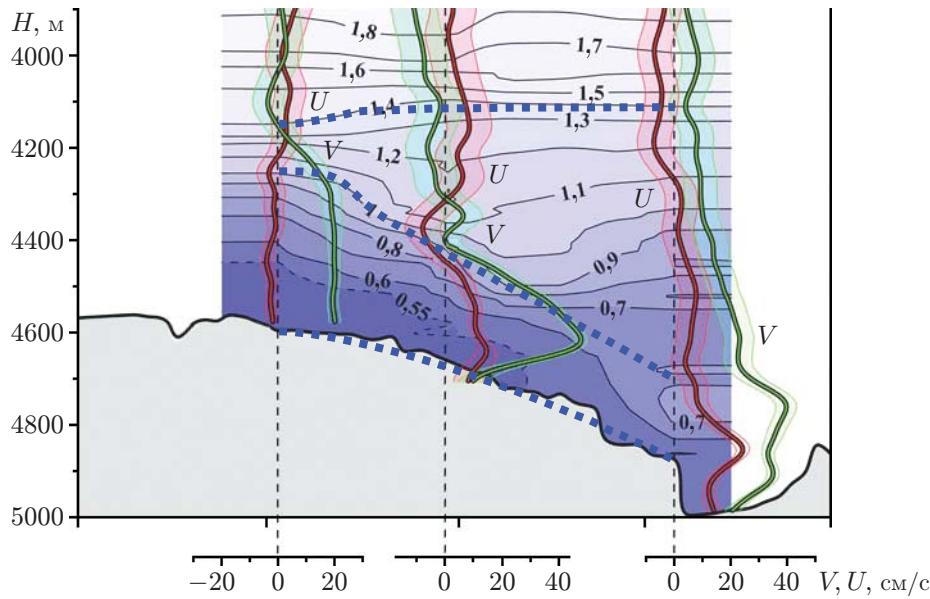


Рис. 3. Изотермы ($^{\circ}\text{C}$), профили зональной U и меридиональной V скоростей с учетом погрешности в придонном слое в меридиональном сечении вдоль южного входа разлома Романш (см. рис. 11 в [23]):

толстые пунктирные линии — аппроксимация рельефа дна и границы раздела слоев, полученные по уравнениям (8)

perimentы проводились в проточном прямоугольном канале с локальным препятствием и поперечным сужением в окрестности выходного сечения. На входе в канал подавался двухслойный докритический поток, над препятствием формировался гидравлический скачок, переводящий течение в сверхкритический режим. При этом в области за скачком наблюдалось интенсивное перемешивание. Было показано, что положение гидравлического скачка определяется шириной канала в окрестности выходного сечения.

Выполним расчеты по предложенной модели (4) при условиях, соответствующих экспериментам 6–9 в работе [11]. Форма препятствия с вершиной в точке $x = x_c$ задана уравнением

$$Z(x) = z_m \cos^2 \left(\frac{\pi(x - x_c)}{2L_s} \right), \quad |x - x_c| \leq L_s = 16\pi. \quad (15)$$

Максимальная высота препятствия $z_m = 8$. Здесь и далее все размерные величины приведены в системе СГС. Поскольку уравнения (4) описывают плоские течения в приближении Буссинеска, течение вверх по потоку в рамках рассматриваемой модели управляется локальным препятствием на выходе из канала, в отличие от управления течением путем сужения поперечного сечения канала (см. [11]). Пусть в канале имеется еще одно препятствие с центром в сечении $x = x_c + L$ и высотой $z_m = \bar{z}_m$, форма которого задается уравнением (15). Далее полагаем $x_c = 100$, $L = 400$. Расчеты проводились в области $x \in (0, 600)$ на равномерной сетке с числом узлов $N = 1200$ с использованием модифицированной схемы Годунова.

Для моделирования течений в условиях экспериментов 6–9 (см. табл. 1 в [11]) задаем значения плавучести $b = 20,0; 19,7; 19,5; 19,9$ и верхнего уровня жидкости $H_0 = 58,0; 48,8; 44,4; 39,0$. Высота второго препятствия для этих примеров $\bar{z}_m = 6,5; 4,5; 2,7; 0$ соответственно. Во всех экспериментах расходы жидкости в нижнем и верхнем слоях во входном сечении равны 145 и 217. Модель (4) описывает трехслойные течения, поэтому в расчетах

при $x = 0$ задаем расходы в слоях $Q_1 = 143$, $Q_2 = 215$ и $Q_m = 4$, что обеспечивает полный расход $Q = 362$, как и в экспериментах [11]. Влиянием трения пренебрегаем: $c_1 = c_2 = 0$. Постоянные σ и κ , характеризующие интенсивность перемешивания и диссиацию энергии, полагаем равными 0,15 и 6,00.

В качестве начальных данных выберем решение стационарных уравнений (8) в отсутствие массообмена между слоями ($q \equiv 0$), удовлетворяющее условию критичности потока (соотношениям (14)) в сечении $x = x_c$ над вершиной препятствия. Входящие в (14) функции A_i , B_2 и C_i ($i = 1, 2$) определены формулами (9). Толщину прослойки η_c задаем произвольно, так чтобы выполнялись условия $\eta_c \ll h_c$, $\eta_c \ll \zeta_c$ (нижний индекс соответствует значениям функций при $x = x_c$). В случае $q \equiv 0$ расходы в слоях сохраняются. Это позволяет выразить скорости через толщины слоев по формулам

$$u = Q_1/h, \quad v = Q_m/\eta, \quad w = Q_2/\zeta \quad (\zeta = H_0 - Z - h - \eta). \quad (16)$$

Тогда при заданном η_c второе уравнение (14) определяет толщину нижнего слоя h_c в критическом сечении. Заметим, что первое уравнение (14) при $x = x_c$ выполнено, так как $Z'(x_c) = 0$, $q = 0$ и трение не учитывается. Ниже приводятся результаты расчетов при $\eta_c = 0,38$. Толщины слоев h и η в областях $x < x_c - \varepsilon$ и $x > x_c + \varepsilon$ находим из решения задачи Коши

$$h' = \frac{B_2 C_1 - A_2 C_2}{A_1 B_2 - A_2^2}, \quad \eta' = \frac{C_1 - A_1 h'}{A_2}, \quad h|_{x=x_c \pm \varepsilon} = h_c, \quad \eta|_{x=x_c \pm \varepsilon} = \eta_c.$$

Здесь A_1 , A_2 , B_2 определены в (9) с учетом (16); $C_1 = -(A_2 - b/2)Z'$; $C_2 = -A_2 Z'$; $\varepsilon > 0$ — малый параметр, например шаг интегрирования по переменной x . По известным функциям h и η из соотношений (16) вычисляем скорости в слоях и толщину верхнего слоя. Далее с использованием этих начальных данных при $t = 0$ проводим расчеты по нестационарным уравнениям (4). В качестве граничных условий на входе в канал используются значения функций при $t = 0$ во входном сечении $x = 0$. На правой границе расчетной области задаем условия Неймана, что оправданно, поскольку течение в окрестности выходного сечения является сверхкритическим. В рассматриваемых примерах при $t > 300$ решение выходит на стационарный режим.

На рис. 4 показаны рельеф дна $z = Z(x)$ (кривая 1) и границы раздела слоев $z = Z + h$ и $z = Z + z + \eta$ (кривые 2, 3) в начальный момент времени $t = 0$ и при $t = 350$. Знак функции $\chi(0)$ определяет режим течения: при $\chi(0) < 0$ докритический, при $\chi(0) > 0$ сверхкритический (кривая 4). На рис. 4,в показаны скорости в нижнем, промежуточном и верхнем слоях (кривые 5–7), а также характеризующая процесс перемешивания скорость “больших вихрей” q (кривая 8) при $t = 350$. Заметим, что решение выходит на стационарный режим при $t \approx 300$. Расчет проведен для потока с параметрами $H_0 = 44,4$, $b = 19,5$ (эксперимент 8 в работе [11]). Из рис. 4 следует, что в окрестности входного сечения канала и над передней частью препятствия ($x < 100$) решение незначительно отличается от начальных данных. В процессе эволюции решения над подветренным склоном препятствия формируются область сверхкритического течения и гидравлический скачок, переводящий поток в докритический режим. При этом резко возрастает толщина прослойки, в которой происходит интенсивное перемешивание жидкости, вовлекаемой из внешних слоев. Скорость в промежуточном слое за скачком становится меньше скорости течения во внешних слоях. В окрестности выходной части канала расположено второе препятствие высотой $\bar{z}_m = 2,7$, над которым течение переходит в сверхкритический режим. Варьируя высоту этого препятствия \bar{z}_m , можно управлять положением гидравлического скачка на подветренной поверхности первого препятствия. Увеличение \bar{z}_m приводит к сдвигу гидравлического скачка к вершине (сечению $x = x_c$), при уменьшении высоты \bar{z}_m скачок смещается к подножию препятствия (сечению $x = x_c + L_s$).

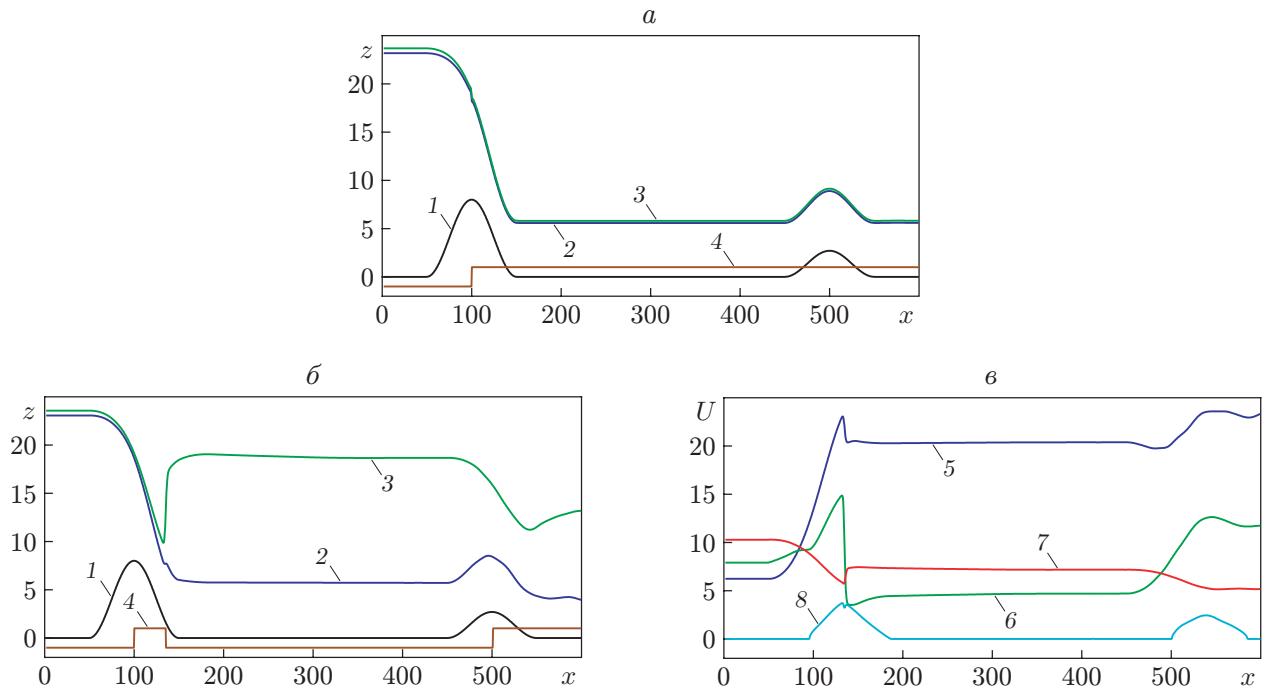


Рис. 4. Результаты расчета обтекания комбинированного препятствия:

а — начальные данные, *б, в* — решение уравнений (4) при $t = 350$ (стационарный режим); 1 — рельеф дна, 2, 3 — границы раздела слоев, 4 — функция $\text{sign } \chi(0)$, 5–7 — скорости нижнего, промежуточного и верхнего слоев соответственно, 8 — распределение переменной q

Фотографии течения, в котором формируются гидравлический скачок и слой смешения на подветренной поверхности препятствия, представлены на рис. 6,*a–d* в [11]. Показано, что в зависимости от параметров потока и сужения в выходной части канала положение гидравлического скачка смешается вниз вдоль склона препятствия. Эти экспериментальные данные сопоставлены с результатами расчета по модели (4) при указанных выше параметрах (пунктирные линии на рис. 5). Границы раздела слоев на промежутке $x \in (45, 245)$ показаны в момент времени $t = 350$, когда решение вышло на стационарный режим. Сравнение результатов расчета и экспериментальных данных (см. рис. 5,*a–в*) показывает, что предложенная модель достаточно точно описывает границы слоя смешения и положение внутреннего гидравлического скачка при соответствующем выборе высоты второго препятствия \bar{z}_m . Существенные отличия наблюдаются лишь в случае, когда препятствие в окрестности выходного сечения канала отсутствует и обтекание первого препятствия происходит без явно выраженного гидравлического скачка и формирования слоя смешения (см. рис. 5,*г*).

Заключение. В работе предложена и исследована математическая модель, описывающая нелинейную стадию сдвиговой неустойчивости в двухслойном течении стратифицированной жидкости над неровным дном. В рамках трехслойного представления течения модель описывает эволюцию слоя смешения и формирование внутренних гидравлических скачков, интенсифицирующих процессы перемешивания. Уравнения движения (4) получены с использованием предложенной в [20] модели (1) и дополнительного условия равновесия (3), определяющего скорость вовлечения жидкости из внешних слоев в турбулентную прослойку. Найдены скорости распространения возмущений и сформулированы понятия докритического и сверхкритического течений.

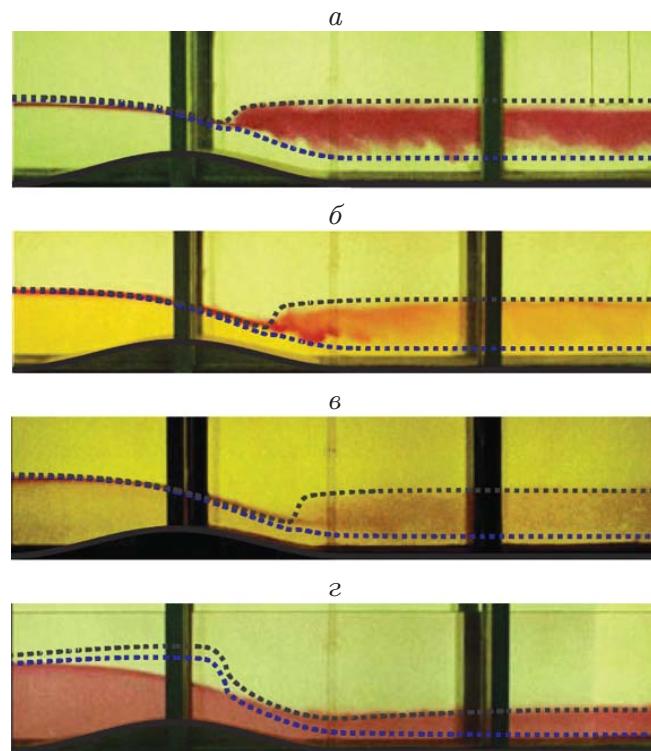


Рис. 5. Результаты визуализации экспериментов по формированию слоя смешения в двухслойном сдвиговом течении при обтекании препятствия (см. рис. 6 в [11]):
 $a — H_0 = 58, b = 20, \bar{z}_m = 6,5$, $b — H_0 = 48,8, b = 19,7, \bar{z}_m = 4,5$, $c — H_0 = 44,4, b = 19,5, \bar{z}_m = 2,7$, $d — H_0 = 39, b = 19,9, \bar{z}_m = 0$; пунктирные кривые — расчет по уравнениям (4)

Построены стационарные решения, описывающие транскритическое течение с расщеплением потока в глубоководном течении над склоном с образованием застойной области. Такие решения соответствуют процессам перемешивания, наблюдаемым в глубоководных течениях над склоном. Показано, что незначительное изменение параметров потока может привести к изменению режима течения, в котором формируется придонная струя, отделенная от верхнего слоя большой толщины тонкой прослойкой. В таком потоке возможно возникновение гидравлического скачка, замедляющего движение придонных слоев и переводящего течение в докритический режим. Проведенные расчеты эволюции стратифицированного течения над комбинированным препятствием показывают возможность управления положением гидравлического скачка с использованием условий вниз по потоку. Результаты расчетов по предложенной модели хорошо согласуются с экспериментальными данными о формировании внутренних гидравлических скачков на подветренной поверхности препятствия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baines P. G. Topographic effects in stratified flows. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
2. Scotti A., Pineda J. Observation of very large and steep internal waves of elevation near the Massachusetts coast // Geophys. Res. Lett. 2004. V. 31. L22307.
3. Ляпидевский В. Ю., Храпченков Ф. Ф., Чесноков А. А., Ярошук И. О. Моделирование нестационарных гидрофизических процессов на шельфе Японского моря // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 1. С. 57–68.

4. Helfrich K. R., Melville W. K. Long nonlinear internal waves // Annual Rev. Fluid Mech. 2006. V. 38. P. 395–425.
5. Lien R., Henyey F., Ma B., Yang Y. J. Large-amplitude internal solitary waves observed in the northern South China sea: properties and energetics // J. Phys. Oceanography. 2014. V. 44. P. 1095–1115.
6. Morozov E. G. Bottom gravity currents and overflows in deep channels of the Atlantic ocean: Observations, analysis and modeling / E. G. Morozov, R. Y. Tarakanov, D. I. Frey. Berlin: Springer, 2021.
7. Morozov E. G., Frey D. I., Zuev O. A., et al. Antarctic bottom water in the Vema fracture zone // J. Geophys. Res. Oceans. 2023. V. 128. e2023JC019967.
8. Farmer D., Armi L. Stratified flow over topography: The role of smallscale entrainment and mixing in flow establishment // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1999. V. 455. P. 3221–3258.
9. Cummins P. F., Armi L., Vagle S. Upstream internal hydraulic jumps // J. Phys. Oceanography. 2006. V. 36. P. 753–769.
10. Pawlak G., Armi L. Mixing and entrainment in developing stratified currents // J. Fluid Mech. 2000. V. 424. P. 45–73.
11. Lawrence G. A., Armi L. Stationary internal hydraulic jumps // J. Fluid Mech. 2022. V. 936. A25.
12. Baines P. G. Internal hydraulic jumps in two-layer systems // J. Fluid Mech. 2016. V. 787. P. 1–15.
13. Thorpe S. A., Li Lin. Turbulent hydraulic jumps in a stratified shear flow. Pt 2 // J. Fluid Mech. 2014. V. 758. P. 94–120.
14. Ogden K. A., Helfrich K. R. Internal hydraulic jumps in two-layer flows with increasing upstream shear // Phys. Rev. Fluids. 2020. V. 5. 074803.
15. Ogden K. A., Helfrich K. R. Internal hydraulic jumps in two-layer flows with upstream shear // J. Fluid Mech. 2016. V. 789. P. 64–92.
16. Sher D., Woods A. W. Mixing in continuous gravity currents // J. Fluid Mech. 2017. V. 818. R4.
17. Zhu R., He Z., Meiburg E. Mixing, entrainment and energetics of gravity currents released from two-layer stratified locks // J. Fluid Mech. 2023. V. 960. A1.
18. Ляпидевский В. Ю. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
19. Chesnokov A. A., Gavrilyuk S. L., Liapidevskii V. Yu. Mixing and nonlinear internal waves in a shallow flow of a three-layer stratified fluid // Phys. Fluids. 2022. V. 34. 075104.
20. Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А. Слой смешения в двухслойных спутных течениях стратифицированной жидкости // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 6. С. 122–134.
21. Ляпидевский В. Ю. Равновесная модель плотностного течения // Тр. МИАН. 2023. Т. 322. С. 167–179.
22. Морозов Е. Г., Тараканов Р. Ю., Ляпидевский В. Ю., Макаренко Н. И. Глубоко-водные водопады в разломах Романш и Чейн // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 5. С. 575–579.
23. Tarakanov R. Y., Morozov E. G., van Haren H., et al. Structure of the deep spillway in the western part of the Romanche fracture zone // J. Geophys. Res. Oceans. 2018. V. 123. P. 8508–8531.
24. Chesnokov A. A., Liapidevskii V. Yu. Mixing layer and turbulent jet flow in a Hele-Shaw cell // Intern. J. Nonlinear Mech. 2020. V. 125. 103534.