УДК 539.3: 517.958

ЧИСТО ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: abd@hydro.nsc.ru

Получены формулы разложений тензоров третьего и четвертого рангов, симметричных соответственно по двум и трем последним индексам, на неприводимые части, инвариантные относительно ортогональной группы преобразований системы координат. Соответствующие части разложений ортогональны между собой. С использованием этих разложений дан общий вид векторов смещений плоских поперечных волн в упругих изотропных и анизотропных средах. Векторы смещения поперечных волн при этом являются однородными многочленами второй, третьей и четвертой степени относительно волновой нормали. Найдены специальные ортотропные материалы, проводящие чисто поперечные волны при любом направлении волновой нормали. Для этих материалов определены собственные модули и состояния, а также технические постоянные: объемный модуль, модули Юнга, коэффициенты Пуассона, модули сдвига и константы Ламе ближайших изотропных материалов.

Ключевые слова: неприводимые инвариантные разложения, продольные и поперечные волны, анизотропия, модули упругости, собственные модули и состояния.

Данная работа развивает подходы, предложенные в [1, 2]. Важное значение в кристаллофизике и геофизике [3, 4] имеет нахождение чисто поперечных волн и анизотропных материалов, проводящих такие волны.

Уравнения теории упругости при произвольной анизотропии без учета объемных сил в декартовых прямоугольных координатах x_1, x_2, x_3 имеют вид

$$L_{ij}u_j = 0, \qquad L_{ij} = L_{ji} = A_{i(kl)j}\,\partial_{kl} - \rho\delta_{ij}\,\partial_{44}, \tag{1}$$

где u_j — вектор смещения; $A_{i(kl)j} = (A_{iklj} + A_{ilkj})/2$, $A_{iklj} = A_{kilj} = A_{ljik}$ — тензор модулей упругости; ρ — постоянная плотность материала; ∂_k — производная по координате x_k; ∂_4 — производная по времени $x_4 = t$; δ_{ij} — символ Кронекера. По повторяющимся буквенным индексам проводится суммирование, индексы в круглых скобках означают симметрирование по этим индексам.

Для изотропного материала оператор (1) следующий:

$$L_{ij} = (\lambda + \mu)\partial_{ij} + \delta_{ij}\,(\mu\,\partial_{kk} - \rho\,\partial_{44}), \tag{2}$$

где λ, μ — постоянные Ламе. Если для операторов (1), (2) находятся с постоянными коэффициентами дифференциальные операторы $T = [t_{jp}]$, $D = \operatorname{diag}(D_1, D_2, D_3)$, $D_i = a^{(i)}_{kl}\,\partial_{kl} - \rho\,\partial_{44}$ такие, что

$$LT = TD, \qquad |T| \neq 0, \tag{3}$$

то общее решение уравнений (1) имеет вид [5, 6]

$$u = T\varphi, \qquad D\varphi = f, \qquad Tf = 0. \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00649) и интеграционного проекта № 129 СО РАН.

Формулы $u = T\varphi$, $\varphi = T'\tilde{u}$, $L\tilde{u} = 0$ переводят решения уравнений $Lu = 0$, $D\varphi = 0$ друг в друга. Штрих означает транспонирование матрицы. Выражение $u = TT'\tilde{u}$ есть формула производства новых решений, т. е. $Q = TT'$ — оператор симметрии [6, 7].

Соотношение (3) означает, что t_{jp} $(p = 1, 2, 3)$ — собственные векторы, а D_i — собственные значения (операторы) для L. При замене ∂_k на n_k (вектор волновой нормали) и ∂_{44} на $v^2 = v_i v_i$ $(v_i = vn_i)$ и при $D_i = 0$ равенство (3) становится уравнением Кристоффеля, из которого определяются векторы смещений t_{jp} и v^2 — квадраты фазовых скоростей плоских волн [3].

Запишем (3) в виде

$$(L_{ij} - \delta_{ij}D_1)T_{j1} = 0, \qquad (L_{ij} - \delta_{ij}D_2)T_{j2} = 0, \qquad (L_{ij} - \delta_{ij}D_3)T_{j3} = 0. \tag{5}$$

Пусть $D_1 = a_{kl}\,\partial_{kl} - \rho\,\partial_{44}$, $a_{kl} = a_{(kl)}$ и

$$T_{j1} = \gamma_j + \gamma_{js}\,\partial_s + \gamma_{j(pq)}\,\partial_{pq} + \gamma_{j(pqr)}\,\partial_{pqr} + \ldots, \tag{6}$$

аналогичные выражения имеют место для D_2, D_3, T_{j2}, T_{j3}. Теперь из (5), (6) находим

$$\begin{aligned}(L_{ij} - \delta_{ij}D_1)T_{j1} &= (A_{i(kl)j} - \delta_{ij}a_{kl})\partial_{kl}T_{j1} = \\ &= (A_{i(kl)j} - \delta_{ij}a_{kl})\gamma_j\,\partial_{kl} + (A_{i(kl)j} - \delta_{ij}a_{kl})\gamma_{js}\,\partial_{kls} + \\ &\quad + (A_{i(kl)j} - \delta_{ij}a_{kl})\gamma_{j(pq)}\,\partial_{klpq} + (A_{i(kl)j} - \delta_{ij}a_{kl})\gamma_{j(pqr)}\,\partial_{klpqr} + \ldots. \end{aligned}\tag{7}$$

Для того чтобы выполнялись соотношения (5), в (7) должны равняться нулю симметрированные коэффициенты при $\partial_{kl}, \partial_{kls}, \partial_{klpq}, \partial_{klpqr}, \ldots$:

$$(A_{i(kl)j} - \delta_{ij}a_{kl})\gamma_j = 0;$$

$$(1/3)[(A_{i(kl)j} - \delta_{ij}a_{kl})\gamma_{js} + (A_{i(ks)j} - \delta_{ij}a_{ks})\gamma_{jl} + (A_{i(ls)j} - \delta_{ij}a_{ls})\gamma_{jk}] = 0; \tag{8}$$

$$\begin{aligned}(1/6)[&(A_{i(kl)j} - \delta_{ij}a_{kl})\gamma_{j(pq)} + (A_{i(kp)j} - \delta_{ij}a_{kp})\gamma_{j(lq)} + (A_{i(kq)j} - \delta_{ij}a_{kq})\gamma_{j(lp)} + \\ &+ (A_{i(lp)j} - \delta_{ij}a_{lp})\gamma_{j(kq)} + (A_{i(lq)j} - \delta_{ij}a_{lq})\gamma_{j(kp)} + (A_{i(pq)j} - \delta_{ij}a_{pq})\gamma_{j(kl)}] = 0;\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}(1/10)[&(A_{i(kl)j} - \delta_{ij}a_{kl})\gamma_{j(pqr)} + (A_{i(kp)j} - \delta_{ij}a_{kp})\gamma_{j(lqr)} + (A_{i(kq)j} - \delta_{ij}a_{kq})\gamma_{j(lpr)} + \\ &+ (A_{i(kr)j} - \delta_{ij}a_{kr})\gamma_{j(lpq)} + (A_{i(lp)j} - \delta_{ij}a_{lp})\gamma_{j(kqr)} + (A_{i(lq)j} - \delta_{ij}a_{lq})\gamma_{j(kpr)} + \\ &+ (A_{i(lr)j} - \delta_{ij}a_{lr})\gamma_{j(kpq)} + (A_{i(pq)j} - \delta_{ij}a_{pq})\gamma_{j(klr)} + (A_{i(pr)j} - \delta_{ij}a_{pr})\gamma_{j(klq)} + \\ &+ (A_{i(qr)j} - \delta_{ij}a_{qr})\gamma_{j(klp)}] = 0, \ \ldots.\end{aligned} \tag{10}$$

Придавая в (8)–(10) свободным индексам значения 1, 2, 3, получим соответствующие системы уравнений для неизвестных $A_{i(kl)j} - \delta_{ij}a_{kl}, \gamma_{js}, \gamma_{j(pq)}, \gamma_{j(pqr)}, \ldots$. Системы вида (8), (9) рассматривались в [6, 8].

Для оператора (2) вектор $t_{j1} = \partial_j$, очевидно, собственный и определяет чисто продольную волну [3] при любом направлении волновой нормали. В [4–6, 9] установлены анизотропные материалы, проводящие чисто продольные волны при любом направлении волновой нормали. Знание направлений распространения поперечных волн позволяет полностью решить уравнение Кристоффеля [3]. В [5, 6, 9] приведены чисто поперечные волны

$$t_{j2} = \varepsilon_{jms}c_m\,\partial_s, \qquad t_{j3} = c_j\,\partial_{kk} - c_m\,\partial_{mj}, \tag{11}$$

где ε_{jms} — антисимметричный тензор Леви-Чивиты; c_j — ненулевой вектор. Для t_{j2} в (11) коэффициенты $\gamma_{js} = \varepsilon_{jms}c_m$, и уравнениям (8) удовлетворяет тензор модулей упругости A_{iklj} трансверсально-изотропного материала с осью вращения c_j. Если $c_j = (0, 0, 1)$, то $t_{j2} = (-\partial_2, \partial_1, 0)$ — чисто поперечная волна, которую при любом направлении волновой нормали n_k (∂_k) проводит трансверсально-изотропный материал [8] с осью вращения x_3, при этом фазовая скорость $\rho v^2 = (A_{11} - A_{21})(n_1^2 + n_2^2)/2 + A_{44} n_3^2/2$. Здесь A_{ij} — матрица модулей упругости, соответствующая тензору A_{ijkl}. Очевидно, что чисто поперечные волны (11) являются собственными векторами и для оператора (2) в случае изотропного материала [8].

Найдем все поперечные волны вида $t_{i2} = a_{ijk}\,\partial_{jk} = a_{i(jk)}\,\partial_{jk}$ или $t_{i2} = a_{ijkl}\,\partial_{jkl} = a_{i(jkl)}\,\partial_{jkl}$, где $a_{ijk} = a_{i(jk)}$, $a_{ijkl} = a_{i(jkl)}$ — симметричные по двум и трем последним индексам тензоры. Эти векторы ортогональны к $t_{i1} = \partial_i$, т. е. должны выполняться равенства $t_{i1}t_{i2} = a_{ijk}\,\partial_{ijk} = a_{(ijk)}\,\partial_{ijk} = 0$, $t_{i1}t_{i2} = a_{ijkl}\,\partial_{ijkl} = a_{(ijkl)}\,\partial_{ijkl} = 0$, откуда следует, что $a_{(ijk)} = 0$, $a_{(ijkl)} = 0$.

Аналогично тому, как это сделано в [10], тензоры a_{ijk}, a_{ijkl} можно разложить на инвариантные части, соответствующие неприводимым линейным представлениям ортогональной группы преобразований системы координат:

$$\begin{gathered} a_{ijk} = a_{i(jk)} = c^{(1)}_{ijk} + c^{(2)}_{ijk} + (\varepsilon_{ijl} H_{lk} + \varepsilon_{ikl} H_{lj})/2 + S_{ijk}, \\ c^{(1)}_{ijk} = a_1 g_i \delta_{jk} + a_2 (g_j \delta_{ki} + g_k \delta_{ji})/2, \qquad c^{(2)}_{ijk} = b_1 h_i \delta_{jk} + b_2 (h_j \delta_{ki} + h_k \delta_{ji})/2; \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} a_{ijkl} = a_{i(jkl)} = a\delta_{i(j}\delta_{kl)} + D_{ijkl} + N_{ijkl} + g_m \varepsilon_{mi(j}\delta_{kl)} + d_{ijkl} + \varepsilon_{mi(j} S_{kl)m} = \\ = a(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk})/3 + D_{ijkl} + N_{ijkl} + g_m(\varepsilon_{mij}\delta_{kl} + \varepsilon_{mik}\delta_{lj} + \varepsilon_{mil}\delta_{jk})/3 + d_{ijkl} + \\ + (\varepsilon_{mij} S_{klm} + \varepsilon_{mik} S_{ljm} + \varepsilon_{mil} S_{jkm})/3, \\ D_{ijkl} = \alpha_1 (H_{ij}\delta_{kl} + H_{ik}\delta_{lj} + H_{il}\delta_{jk}) + \alpha_2 (H_{jk}\delta_{li} + H_{kl}\delta_{ji} + H_{lj}\delta_{ki})/3, \\ d_{ijkl} = \beta_1 (h_{ij}\delta_{kl} + h_{ik}\delta_{lj} + h_{il}\delta_{jk}) + \beta_2 (h_{jk}\delta_{li} + h_{kl}\delta_{ji} + h_{lj}\delta_{ki})/3. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь (a_1, a_2), (b_1, b_2); (α_1, α_2), (β_1, β_2) — независимые пары произвольных действительных чисел; a — постоянная; g_i, h_i — векторы; $H_{ij} = H_{(ij)}$, $h_{ij} = h_{(ij)}$ — девиаторы: $H_{ii} = 0$, $h_{ii} = 0$; $S_{ijk} = S_{(ijk)}$ — септор (симметричный бесследовый тензор третьего ранга); $N_{ijkl} = N_{(ijkl)}$ — нонор (симметричный бесследовый тензор четвертого ранга). За счет определенного выбора свободных параметров a_i, b_i; α_i, β_i все части разложений (12), (13) можно сделать ортогональными между собой. Все величины в правых частях (12), (13) однозначно выражаются через тензоры $a_{i(jk)}$, $a_{i(jkl)}$, как и обратно: эти тензоры можно задавать по формулам (12), (13).

Тензоры $c^{(1)}_{ijk}$, $c^{(2)}_{ijk}$ в (12) будут нормированными и ортогональными, если [2]

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\omega_{11} - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\omega_{21}\Big), \quad a_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}\,\omega_{21}; \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\omega_{12} - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\omega_{22}\Big), \quad b_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}\,\omega_{22},$$

где ω_{ij} — произвольная ортогональная матрица второго порядка: $\omega_{ip}\omega_{iq} = \delta_{pq}$. Векторы, девиатор и септор в правой части (12) однозначно определяются тензором a_{ijk} [2]:

$$\begin{gathered} g_i = \frac{(b_1 + 2b_2) a_{ikk} - (3b_1 + b_2) a_{ssi}}{5(a_1 b_2 - a_2 b_1)}, \\ h_i = \frac{(3a_1 + a_2) a_{ssi} - (a_1 + 2a_2) a_{ikk}}{5(a_1 b_2 - a_2 b_1)}, \qquad a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0; \end{gathered} \tag{14}$$

$$H_{lk} = (a_{ijk}\varepsilon_{ijl} + a_{ijl}\varepsilon_{ijk})/3 = 2a_{ij(k}\varepsilon_{l)ij}/3, \quad S_{ijk} = a_{(ijk)} - (a_1 + a_2) g_{(i}\delta_{jk)} - (b_1 + b_2) h_{(i}\delta_{jk)}.$$

Если векторные части в (12) ортогональны, то вместо (14) получим

$$g_i = \frac{a_1 a_{ikk} + a_2 a_{ssi}}{(\sqrt{3}a_1 + a_2/\sqrt{3})^2 + 5a_2^2/3}, \qquad h_i = \frac{b_1 a_{ikk} + b_2 a_{ssi}}{(\sqrt{3}b_1 + b_2/\sqrt{3})^2 + 5b_2^2/3}.$$

При значениях параметров $a_1 = 1/3$, $a_2 = 2/3$; $b_1 = 2/3$, $b_2 = -2/3$ из (12) получаем разложение [11]

$$a_{ijk} = (g_i\delta_{jk} + g_j\delta_{ki} + g_k\delta_{ji})/3 + S_{ijk} + (2h_i\delta_{jk} - h_j\delta_{ki} - h_k\delta_{ji})/3 + (\varepsilon_{ijl}H_{lk} + \varepsilon_{ikl}H_{lj})/2 \quad (15)$$

на симметричную и несимметричную части.

Для поперечных волн симметричная часть в (15) $a_{(ijk)} = 0$, т. е. тензор a_{ijk} имеет вид

$$a_{ijk} = (2h_i\delta_{jk} - h_j\delta_{ki} - h_k\delta_{ji})/3 + (\varepsilon_{ijl}H_{lk} + \varepsilon_{ikl}H_{lj})/2.$$

Отсюда находим поперечную волну (собственный вектор)

$$\begin{gathered} t_{j2} = a_{jsk}\,\partial_{sk} = 2(h_j\partial_{kk} - h_k\,\partial_{kj})/3 + \varepsilon_{jsl}H_{lk}\,\partial_{sk} = c_j\,\partial_{kk} - c_k\,\partial_{kj} + \varepsilon_{jsl}H_{lk}\,\partial_{sk}, \\ c_j = 2h_j/3 \end{gathered} \quad (16)$$

и третий собственный вектор

$$t_{j3} = \varepsilon_{jmn}\,\partial_m t_{n2} = \varepsilon_{jmn}c_n\,\partial_{mss} + H_{lp}\,\partial_{lpj} - H_{jp}\,\partial_{pss}.$$

Несложно проверить, что матрица

$$T = [\partial_j,\ c_j\,\partial_{kk} - c_m\,\partial_{mj} + \varepsilon_{jsl}H_{lp}\,\partial_{sp},\ \varepsilon_{jmn}c_n\,\partial_{mss} + H_{lp}\,\partial_{lpj} - H_{jp}\,\partial_{pss}] \quad (17)$$

и оператор (2) удовлетворяют соотношению (3), причем $D_1 = (\lambda + 2\mu)\,\partial_{kk} - \rho\,\partial_{44}$, $D_2 = D_3 = \mu\,\partial_{kk} - \rho\,\partial_{44}$. При ненулевом девиаторе H_{lk} векторы t_{j2}, t_{j3} смещения поперечных волн являются однородными многочленами второй и третьей степени относительно волновой нормали n_k (∂_k). С учетом (17) по формулам (4) получаем новое представление [2] решения уравнений Ламе (2) в случае изотропного материала.

Рассмотрим теперь тензор $a_{ijkl} = a_{i(jkl)}$. Разложение вида (13) получается с использованием преобразования

$$a^*_{ijkl} = a_{(jkl)i} = (a_{jkli} + a_{klji} + a_{ljki})/3.$$

Найдем проекторы

$$p_{ijkl} = \alpha a_{ijkl} + \beta(a_{jkli} + a_{klji} + a_{ljki})/3. \quad (18)$$

Так как двукратное действие проектора дает проектор, то коэффициенты в (18) удовлетворяют уравнениям

$$3\alpha^2 + \beta^2 = 3\alpha, \qquad 6\alpha\beta + 2\beta^2 = 3\beta,$$

решения которых (1, 0), (1/4, 3/4), (3/4, −3/4). При этом получаются следующие проекторы: $p^{(2)}_{ijkl} = (a_{ijkl} + a_{jkli} + a_{klji} + a_{ljki})/4 = a_{(ijkl)}$ — симметрирование по всем индексам, $p^{(3)}_{ijkl} = (3a_{ijkl} - a_{jkli} - a_{klji} - a_{ljki})/4 = a_{ijkl} - a_{(ijkl)}$ — несимметричная часть. Эти проекторы ортогональны $p^{(2)}_{ijkl}p^{(3)}_{ijkl} = 0$, и сумма их равна тождественному проектору $p^{(1)}_{ijkl} = a_{ijkl}$.

Найдем свертку тензоров из (13)

$$D_{ijkl}d_{ijkl} = [15\alpha_1\beta_1 + 2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 5\alpha_2\beta_2/3]H_{ij}h_{ij} \quad (19)$$

и квадрат их норм

$$\begin{gathered} D_{ijkl}D_{ijkl} = (15\alpha_1^2 + 4\alpha_1\alpha_2 + 5\alpha_2^2/3)H_{ij}H_{ij}, \\ d_{ijkl}d_{ijkl} = (15\beta_1^2 + 4\beta_1\beta_2 + 5\beta_2^2/3)h_{ij}h_{ij}. \end{gathered} \quad (20)$$

Тензоры в (19), (20) ортогональны и нормированы, если

$$15\alpha_1^2 + 4\alpha_1\alpha_2 + 5\alpha_2^2/3 = (\sqrt{15}\,\alpha_1 + 2\alpha_2/\sqrt{15}\,)^2 + (\sqrt{7/5}\,\alpha_2)^2 = 1,$$

$$15\beta_1^2 + 4\beta_1\beta_2 + 5\beta_2^2/3 = (\sqrt{15}\beta_1 + 2\beta_2/\sqrt{15})^2 + (\sqrt{7/5}\,\beta_2)^2 = 1, \tag{21}$$

$$15\alpha_1\beta_1 + 2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 5\alpha_2\beta_2/3 = \\ = (\sqrt{15}\alpha_1 + 2\alpha_2/\sqrt{15})(\sqrt{15}\beta_1 + 2\beta_2/\sqrt{15}) + \sqrt{7/5}\,\alpha_2\sqrt{7/5}\,\beta_2 = 0.$$

Из соотношений (21) следует, что

$$\begin{bmatrix} \sqrt{15}\,\alpha_1 + 2\alpha_2/\sqrt{15} & \sqrt{15}\,\beta_1 + 2\beta_2/\sqrt{15} \\ \sqrt{7/5}\,\alpha_2 & \sqrt{7/5}\,\beta_2 \end{bmatrix} = \omega_{ij}$$

— произвольная ортогональная матрица второго порядка: $\omega_{ip}\omega_{iq} = \delta_{pq}$. При этом

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\omega_{11} - \frac{2}{3\sqrt{7}}\,\omega_{21}\Big), \qquad \alpha_2 = \sqrt{\frac{5}{7}}\,\omega_{21};$$
$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\omega_{12} - \frac{2}{3\sqrt{7}}\,\omega_{22}\Big), \qquad \beta_2 = \sqrt{\frac{5}{7}}\,\omega_{22} \tag{22}$$

и тензоры D_{ijkl}, d_{ijkl} нормированы и ортогональны.

Постоянная, вектор, девиаторы, септор и нонор в правой части (13) однозначно определяются тензором $a_{ijkl} = a_{i(jkl)}$:

$$a = a_{iikk}/5, \qquad g_s = 3\varepsilon_{sij}a_{ijkk}/10;$$
$$H_{ij} = \frac{(5\beta_1 + 2\beta_2/3)p_{ij} - (2\beta_1 + 5\beta_2/3)q_{ij}}{7(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)},$$
$$h_{ij} = \frac{-(5\alpha_1 + 2\alpha_2/3)p_{ij} + (2\alpha_1 + 5\alpha_2/3)q_{ij}}{7(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)}, \tag{23}$$

$$\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 \ne 0, \quad p_{ij} = a_{ssij} - a_{sskk}\delta_{ij}/3, \quad q_{ij} = (a_{ijkk} + a_{jikk})/2 - a_{sskk}\delta_{ij}/3;$$

$$S_{kls} = 3(a_{ij(kl}\varepsilon_{s)ij} - \delta_{(kl}\varepsilon_{s)ij}a_{ijpp}/5)/4 = \\ = [\varepsilon_{sij}a_{ijkl} + \varepsilon_{kij}a_{ijls} + \varepsilon_{lij}a_{ijsk} - (\varepsilon_{sij}\delta_{kl} + \varepsilon_{kij}\delta_{ls} + \varepsilon_{lij}\delta_{sk})a_{ijpp}/5]/4,$$
$$N_{ijkl} = a_{(ijkl)} - a\delta_{i(j}\delta_{kl)} - (3\alpha_1 + \alpha_2)H_{(ij}\delta_{kl)} - (3\beta_1 + \beta_2)h_{(ij}\delta_{kl)}.$$

Для значений параметров (22) девиаторы (23) принимают вид

$$H_{ij} = \omega[-\sqrt{5/7}\,\omega_{12}p_{ij} + (2\omega_{12}/\sqrt{7} + \sqrt{3}\,\omega_{22})q_{ij}/\sqrt{5}],$$
$$h_{ij} = \omega[\sqrt{5/7}\,\omega_{11}p_{ij} - (2\omega_{11}/\sqrt{7} + \sqrt{3}\,\omega_{21})q_{ij}/\sqrt{5}], \quad \omega = |\omega_{ij}| = \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{21}\omega_{12} = \pm 1.$$

При значениях параметров $\alpha_1 = 1/6$, $\alpha_2 = 1/2$; $\beta_1 = 1/6$, $\beta_2 = -1/2$ из (13) получаем разложение [11]

$$a_{ijkl} = a_{i(jkl)} = a(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk})/3 + N_{ijkl} + \\ + (H_{ij}\delta_{kl} + H_{ik}\delta_{lj} + H_{il}\delta_{jk} + H_{jk}\delta_{li} + H_{kl}\delta_{ji} + H_{lj}\delta_{ki})/6 + \\ + g_m(\varepsilon_{mij}\delta_{kl} + \varepsilon_{mik}\delta_{lj} + \varepsilon_{mil}\delta_{jk})/3 + \\ + (h_{ij}\delta_{kl} + h_{ik}\delta_{lj} + h_{il}\delta_{jk} - h_{jk}\delta_{li} - h_{kl}\delta_{ji} - h_{lj}\delta_{ki})/6 + \\ + (\varepsilon_{mij}S_{klm} + \varepsilon_{mik}S_{ljm} + \varepsilon_{mil}S_{jkm})/3, \tag{24}$$

все части которого взаимно ортогональны.

Для поперечных волн симметричная часть в (24) $a_{(ijkl)} = 0$, т. е. тензор a_{ijkl} имеет вид

$$\begin{aligned}a_{ijkl} = g_m(\varepsilon_{mij}\delta_{kl} + \varepsilon_{mik}\delta_{lj} + \varepsilon_{mil}\delta_{jk})/3 + \\ + (h_{ij}\delta_{kl} + h_{ik}\delta_{lj} + h_{il}\delta_{jk} - h_{jk}\delta_{li} - h_{kl}\delta_{ji} - h_{lj}\delta_{ki})/6 + \\ + (\varepsilon_{mij}S_{klm} + \varepsilon_{mik}S_{ljm} + \varepsilon_{mil}S_{jkm})/3.\end{aligned} \tag{25}$$

С учетом (25) находим поперечную волну (собственный вектор)

$$t_{i2} = a_{ijkl}\partial_{jkl} = g_m\varepsilon_{mij}\,\partial_{jkk} + (h_{ij}\,\partial_{jkk} - h_{jk}\,\partial_{ijk})/2 + \varepsilon_{mij}S_{klm}\,\partial_{jkl}$$

и третий собственный вектор

$$t_{j3} = \varepsilon_{jsn}\,\partial_s t_{n2} = g_m\,\partial_{mjkk} - g_j\,\partial_{ppkk} + \varepsilon_{jsl}h_{lp}\,\partial_{spkk}/2 + S_{klm}\,\partial_{klmj} - S_{jkl}\,\partial_{klpp}.$$

Можно проверить, что матрица

$$\begin{aligned}T = [\partial_j,\ \varepsilon_{mjn}g_m\,\partial_{nkk} + (h_{jp}\,\partial_{pss} - h_{lp}\,\partial_{lpj})/2 + \varepsilon_{jpm}S_{mkl}\,\partial_{pkl}, \\ g_m\,\partial_{mjkk} - g_j\,\partial_{ppkk} + \varepsilon_{jsl}h_{lp}\,\partial_{spkk}/2 + S_{klm}\,\partial_{klmj} - S_{jkl}\,\partial_{klpp}]\end{aligned} \tag{26}$$

и оператор (2) удовлетворяют соотношению (3) с теми же D_1, $D_2 = D_3$. При ненулевом септоре S_{mkl} векторы смещения поперечных волн являются однородными многочленами третьей и четвертой степени относительно волновой нормали n_k (∂_k). С учетом (26) по формулам (4) можно получить еще одно представление решения уравнений Ламе (2) в случае изотропного материала.

В работах [12, 13] дается некоторая классификация матриц L, T, удовлетворяющих соотношению (3), и утверждается, что степень векторов t_{jp} относительно n_k (∂_k) не выше второй. Но в матрице (17) вектор t_{j3} третьей степени, если $H_{lp} \neq 0$, а в (26) векторы t_{j2}, t_{j3} третьей и четвертой степени, если $S_{mkl} \neq 0$. Это означает, что данная в [12, 13] классификация не является полной. При $H_{lp} = 0$ из (17) следует (11), а при $S_{mkl} = 0$ из (26) следует (17).

Пусть система координат — главная для девиатора H_{lk} в (16), т. е. $H_{21} = H_{31} = H_{32} = 0$, $H_{11} = H_1$, $H_{22} = H_2$, $H_{33} = H_3$, $H_1 + H_2 + H_3 = 0$. Тогда из (16) имеем

$$\begin{aligned}t_{12} &= c_1(\partial_{22} + \partial_{33}) + (H_3 - H_2)\,\partial_{23} - c_3\,\partial_{13} - c_2\,\partial_{12}, \\ t_{22} &= c_2(\partial_{11} + \partial_{33}) - c_3\,\partial_{23} + (H_1 - H_3)\,\partial_{13} - c_1\,\partial_{12}, \\ t_{32} &= c_3(\partial_{11} + \partial_{22}) - c_2\,\partial_{23} - c_1\,\partial_{13} + (H_2 - H_1)\,\partial_{12}.\end{aligned} \tag{27}$$

Рассмотрим случай $c_j = 0$, при этом (27) принимает вид

$$\begin{gathered}t_{j2} = (h_1\,\partial_{23},\ h_2\,\partial_{13},\ h_3\,\partial_{12}), \\ h_1 = H_3 - H_2, \qquad h_2 = H_1 - H_3, \qquad h_3 = H_2 - H_1, \qquad h_1 + h_2 + h_3 = 0.\end{gathered} \tag{28}$$

Для поперечной волны (28) коэффициенты $\gamma_{j(pq)}$ следующие:

$$\begin{gathered}\gamma_{j(11)} = 0, \qquad \gamma_{j(22)} = 0, \qquad \gamma_{j(33)} = 0, \\ \gamma_{j(23)} = (h_1/2,\ 0,\ 0), \qquad \gamma_{j(13)} = (0,\ h_2/2,\ 0), \qquad \gamma_{j(12)} = (0,\ 0,\ h_3/2).\end{gathered} \tag{29}$$

С учетом (29) система (9) сводится к уравнениям

$$\begin{gathered}(A^*_{11} - a)h_1 + A^*_{66}h_2 + A^*_{55}h_3 = 0, \\ A^*_{66}h_1 + (A^*_{22} - a)h_2 + A^*_{44}h_3 = 0, \qquad A^*_{55}h_1 + A^*_{44}h_2 + (A^*_{33} - a)h_3 = 0.\end{gathered} \tag{30}$$

Здесь $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a$, $a_{23} = a_{13} = a_{12} = 0$ и A^*_{ik} — матрица, соответствующая тензору $A_{i(kl)j}$ [14].

Из (30) следует, что a — собственное значение, h_j — собственный вектор симметричной матрицы

$$A^*_{ij} = \begin{bmatrix} A^*_{11} & A^*_{66} & A^*_{55} \\ A^*_{66} & A^*_{22} & A^*_{44} \\ A^*_{55} & A^*_{44} & A^*_{33} \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Поэтому матрица (31) должна иметь представление через собственные значения и векторы:

$$A^*_{ij} = a_1 h_{i1} h_{j1} + a_2 h_{i2} h_{j2} + a_3 h_{i3} h_{j3}, \tag{32}$$

где h_{ip} — ортогональная матрица [15]:

$$h_{ip} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{-(1+c)}{\sqrt{3[1+(c-1)^2+c^2]}} & \dfrac{c-1}{\sqrt{1+(c-1)^2+c^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2-c}{\sqrt{3[1+(c-1)^2+c^2]}} & \dfrac{-c}{\sqrt{1+(c-1)^2+c^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2c-1}{\sqrt{3[1+(c-1)^2+c^2]}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+(c-1)^2+c^2}} \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Здесь c — произвольный действительный параметр и, очевидно, $h_{1p}+h_{2p}+h_{3p} = 0$, $p = 2, 3$.

Полная матрица A^*_{ik} [14] в данном случае имеет вид

$$A^*_{ik} = \begin{bmatrix} A^*_{11} & & & & & \\ a & A^*_{22} & & & \text{sym} & \\ a & a & A^*_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & A^*_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A^*_{55} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A^*_{66} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

где диагональные элементы задаются формулами (31)–(33), а величина a может принимать значения a_2 или a_3. С учетом (34) оператор (1) будет следующим:

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} A^*_{11}\partial_{11} + a(\partial_{22}+\partial_{33}) - \rho\partial_{44} & A^*_{66}\partial_{12} & A^*_{55}\partial_{13} \\ A^*_{66}\partial_{21} & a\partial_{11} + A^*_{22}\partial_{22} + a\partial_{33} - \rho\partial_{44} & A^*_{44}\partial_{23} \\ A^*_{55}\partial_{31} & A^*_{44}\partial_{32} & a(\partial_{11}+\partial_{22}) + A^*_{33}\partial_{33} - \rho\partial_{44} \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Несложно проверить, что если выполняются уравнения (30), то вектор (28) является собственным для оператора (35), при этом $D_2 = a\partial_{kk} - \rho\partial_{44}$. Очевидно, что при *любом направлении* волновой нормали n_k (∂_k) вектор (28) есть вектор смещения *чисто поперечной* волны, при этом фазовая скорость $\rho v^2 = a_2 n_k n_k = a_2$ или $\rho v^2 = a_3 n_k n_k = a_3$ в зависимости от того, какой столбец в (33) — h_{i2} или h_{i3} — выбираем в качестве h_i в (28).

По (34) находим (см. [14]) матрицу A_{ij} модулей упругости [1] в законе Гука

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A^*_{11} & & & & & \\ A^*_{66}-a & A^*_{22} & & & \text{sym} & \\ A^*_{55}-a & A^*_{44}-a & A^*_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2a & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}, \tag{36}$$

где $a = a_2$ или $a = a_3$. Отметим, что оператор (35) (соответственно, материал (36)) не допускает чисто продольной волны $t_{j1} = \partial_j$ при любом направлении волновой нормали. Это возможно для изотропного материала с оператором (2) (см. формулы (17), (26)) и для анизотропного материала, данного в [4–6, 9].

Так как в (36) величина a может иметь два значения — $a = a_2$ или $a = a_3$, то (36) представляет собой матрицу, которой соответствуют два варианта материалов. Очевидно, это подклассы ортотропных материалов.

С учетом формул (30)–(33) можно показать, что векторы h_{ip} ($p = 1,\ 2,\ 3$) в (33) являются собственными и для первой четверти матрицы (36). Отсюда получаем, что материалы (36) имеют собственные модули [15]

$$\lambda_1 = a_1 - 2a_2, \quad \lambda_2 = 2a_2, \quad \lambda_3 = a_2 + a_3, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2a_2 \tag{37}$$

или

$$\lambda_1 = a_1 - 2a_3, \quad \lambda_2 = a_2 + a_3, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2a_3 \tag{38}$$

и собственные состояния [15]

$$t_{ip} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{-(1+c)}{\sqrt{3[1+(c-1)^2+c^2]}} & \dfrac{c-1}{\sqrt{1+(c-1)^2+c^2}} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2-c}{\sqrt{3[1+(c-1)^2+c^2]}} & \dfrac{-c}{\sqrt{1+(c-1)^2+c^2}} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2c-1}{\sqrt{3[1+(c-1)^2+c^2]}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+(c-1)^2+c^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Из (39) следует, что среди собственных состояний есть шаровой тензор и пять ортогональных девиаторов, три из которых — тензоры чистых сдвигов, т. е. девиаторы с нулевым определителем. Но при некоторых значениях параметра c может быть и четыре тензора чистых сдвигов.

Для физической реальности материалов (36) собственные модули (37), (38) должны быть положительными. Отсюда следуют необходимые и достаточные условия положительной определенности матрицы (36)

$$\begin{aligned} &a_1 - 2a_2 > 0, \qquad a_2 + a_3 > 0, \qquad a_2 > 0; \\ &a_1 - 2a_3 > 0, \qquad a_2 + a_3 > 0, \qquad a_3 > 0. \end{aligned} \tag{40}$$

С учетом кратности собственных модулей (37), (38) материалы вида (36) запишем так:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= (\lambda_1 - \lambda_2)t_{i1}t_{j1} + (\lambda_3 - \lambda_2)t_{i3}t_{j3} + \lambda_2\delta_{ij}; \\ A_{ij} &= (\lambda_1 - \lambda_3)t_{i1}t_{j1} + (\lambda_2 - \lambda_3)t_{i2}t_{j2} + \lambda_3\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{41}$$

Здесь собственные модули λ_1, λ_2, λ_3 даются формулами (37), (38), а собственные состояния t_{i1}, t_{i2}, t_{i3} — формулами (39). В (41) модули λ_1, λ_2, λ_3 не упорядочены, т. е. их нумерация соответствует обозначениям (37), (38). В зависимости от соотношений между модулями λ_1, λ_2, λ_3 материалы вида (41) могут быть классов $\{1,1,4\}$, $\{1,4,1\}$, $\{4,1,1\}$ [16].

Таким образом, анизотропные материалы (41), проводящие *чисто поперечные* волны (28) при *любом направлении* волновой нормали n_k, зависят от четырех параметров:

a_1, a_2, a_3, c. Первые три из них удовлетворяют неравенствам (40), а параметр c, определяющий собственные состояния (39), может принимать произвольные действительные значения. Если в (37), (38) $a_2 = a_3$, то материалы вида (36), (41) становятся изотропными.

Матрица a_{ij} коэффициентов податливости, обратная A_{ij} (41), будет следующей:

$$\begin{gathered} a_{ij} = \Big(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\Big) t_{i1}t_{j1} + \Big(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2}\Big) t_{i3}t_{j3} + \frac{1}{\lambda_2}\,\delta_{ij}; \\ a_{ij} = \Big(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3}\Big) t_{i1}t_{j1} + \Big(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3}\Big) t_{i2}t_{j2} + \frac{1}{\lambda_3}\,\delta_{ij}. \end{gathered} \tag{42}$$

Используя (42), найдем технические постоянные [17, 18] для этих материалов. Объемный модуль K запишем как

$$\frac{1}{K} = a_{iikk} = t_{iipq}\,\frac{1}{\lambda_{pqrs}}\,t_{kkrs} = \\ = \frac{1}{\lambda_1}\,t^2_{ii11} + \frac{1}{\lambda_2}\,t^2_{ii22} + \frac{1}{\lambda_3}\,t^2_{ii33} + \frac{1}{\lambda_4}\,2t^2_{ii23} + \frac{1}{\lambda_5}\,2t^2_{ii13} + \frac{1}{\lambda_6}\,2t^2_{ii12}. \tag{43}$$

Здесь a_{ijkl} — тензор коэффициентов податливости, соответствующий матрице a_{ij}; $t_{ij11}, \dots, \sqrt{2}t_{ij12}$ — тензоры собственных состояний, соответствующие столбцам $t_{i1}, \dots, t_{i6}$ в (39); λ_{pqrs} — диагональный тензор собственных модулей. Так как $t_{ij11} = \delta_{ij}/\sqrt{3}$, $t_{ii11} = \sqrt{3}$ и остальные собственные состояния — девиаторы, т. е. $t_{iipq} = 0$, $pq \ne 11$, то из (37), (38), (43) находим $3K = \lambda_1 = a_1 - 2a_2$ или $3K = \lambda_1 = a_1 - 2a_3$.

Пусть n_i, m_i ($i = 1, 2, 3$) — два ортогональных направления: $n_i n_i = 1$, $m_i m_i = 1$, $n_i m_i = 0$. Обозначим

$$\begin{gathered} \tilde n_i = (n_1^2,\ n_2^2,\ n_3^2,\ \sqrt{2}\,n_2n_3,\ \sqrt{2}\,n_1n_3,\ \sqrt{2}\,n_1n_2), \\ \tilde m_i = (m_1^2,\ m_2^2,\ m_3^2,\ \sqrt{2}\,m_2m_3,\ \sqrt{2}\,m_1m_3,\ \sqrt{2}\,m_1m_2), \\ \widetilde{nm}_i = (n_1m_1,\ n_2m_2,\ n_3m_3,\ \sqrt{2}(n_2m_3+n_3m_2)/2,\ \sqrt{2}(n_1m_3+n_3m_1)/2,\ \sqrt{2}(n_1m_2+n_2m_1)/2), \end{gathered} \tag{44}$$

т. е. (44) — это векторы, соответствующие симметричным тензорам $n_i n_j$, $m_i m_j$, $n_{(i} m_{j)}$. Модуль Юнга E_n в направлении n_i представляется так:

$$\frac{1}{E_n} = n_i n_j a_{ijkl} n_k n_l = n_i n_j t_{ijpq}\,\frac{1}{\lambda_{pqrs}}\,t_{klrs} n_k n_l = \\ = \frac{1}{\lambda_1}\,(t_{ij11}n_in_j)^2 + \frac{1}{\lambda_2}\,(t_{ij22}n_in_j)^2 + \frac{1}{\lambda_3}\,(t_{ij33}n_in_j)^2 + \\ + \frac{1}{\lambda_4}\,2(t_{ij23}n_in_j)^2 + \frac{1}{\lambda_5}\,2(t_{ij13}n_in_j)^2 + \frac{1}{\lambda_6}\,2(t_{ij12}n_in_j)^2 = \\ = \tilde n_i a_{ij} \tilde n_j = \frac{1}{\lambda_1}\,(t_{i1}\tilde n_i)^2 + \frac{1}{\lambda_2}\,(t_{i2}\tilde n_i)^2 + \frac{1}{\lambda_3}\,(t_{i3}\tilde n_i)^2 + \\ + \frac{1}{\lambda_4}\,(t_{i4}\tilde n_i)^2 + \frac{1}{\lambda_5}\,(t_{i5}\tilde n_i)^2 + \frac{1}{\lambda_6}\,(t_{i6}\tilde n_i)^2. \tag{45}$$

С учетом (37)–(39), (42), (44) из (45) находим

$$\frac{1}{E_n} = \frac{4a_2 - a_1}{2a_2(a_1 - 2a_2)}\,(t_{i1}\tilde n_i)^2 + \frac{a_2 - a_3}{2a_2(a_2 + a_3)}\,(t_{i3}\tilde n_i)^2 + \frac{1}{2a_2} = \\ = \frac{a_1 - a_2}{3a_2(a_1 - 2a_2)} + \frac{a_2 - a_3}{2a_2(a_2 + a_3)}\,\frac{[(c-1)n_1^2 - cn_2^2 + n_3^2]^2}{1 + (c-1)^2 + c^2};$$

$$\frac{1}{E_n} = \frac{4a_3 - a_1}{2a_3(a_1 - 2a_3)}\,(t_{i1}\tilde{n}_i)^2 + \frac{a_3 - a_2}{2a_3(a_2 + a_3)}\,(t_{i2}\tilde{n}_i)^2 + \frac{1}{2a_3} =$$
$$= \frac{a_1 - a_3}{3a_3(a_1 - 2a_3)} + \frac{a_3 - a_2}{2a_3(a_2 + a_3)}\frac{[-(1+c)n_1^2 + (2-c)n_2^2 + (2c-1)n_3^2]^2}{3[1 + (c-1)^2 + c^2]}.$$

Коэффициент Пуассона ν_{mn} в направлении m_i при растяжении в направлении n_i имеет вид

$$\frac{\nu_{mn}}{E_n} = m_i m_j a_{ijkl} n_k n_l = m_i m_j t_{ijpq}\,\frac{1}{\lambda_{pqrs}}\,t_{klrs} n_k n_l =$$
$$= \frac{1}{\lambda_1}\,(t_{ij11}m_i m_j)(t_{kl11}n_k n_l) + \frac{1}{\lambda_2}\,(t_{ij22}m_i m_j)(t_{kl22}n_k n_l) + \frac{1}{\lambda_3}\,(t_{ij33}m_i m_j)(t_{kl33}n_k n_l) +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_4}\,2(t_{ij23}m_i m_j)(t_{kl23}n_k n_l) + \frac{1}{\lambda_5}\,2(t_{ij13}m_i m_j)(t_{kl13}n_k n_l) + \frac{1}{\lambda_6}\,2(t_{ij12}m_i m_j)(t_{kl12}n_k n_l) =$$
$$= \tilde{m}_i a_{ij}\tilde{n}_j = \frac{1}{\lambda_1}\,(t_{i1}\tilde{m}_i)(t_{j1}\tilde{n}_j) + \frac{1}{\lambda_2}\,(t_{i2}\tilde{m}_i)(t_{j2}\tilde{n}_j) + \frac{1}{\lambda_3}\,(t_{i3}\tilde{m}_i)(t_{j3}\tilde{n}_j) +$$
$$+\frac{1}{\lambda_4}\,(t_{i4}\tilde{m}_i)(t_{j4}\tilde{n}_j) + \frac{1}{\lambda_5}\,(t_{i5}\tilde{m}_i)(t_{j5}\tilde{n}_j) + \frac{1}{\lambda_6}\,(t_{i6}\tilde{m}_i)(t_{j6}\tilde{n}_j). \qquad (46)$$

С учетом (37)–(39), (42), (44) из (46) получаем

$$\frac{\nu_{mn}}{E_n} = \frac{4a_2 - a_1}{2a_2(a_1 - 2a_2)}\,(t_{i1}\tilde{m}_i)(t_{j1}\tilde{n}_j) + \frac{a_2 - a_3}{2a_2(a_2 + a_3)}\,(t_{i3}\tilde{m}_i)(t_{j3}\tilde{n}_j) =$$
$$= \frac{4a_2 - a_1}{6a_2(a_1 - 2a_2)} + \frac{a_2 - a_3}{2a_2(a_2 + a_3)}\,\frac{[(c-1)m_1^2 - cm_2^2 + m_3^2][(c-1)n_1^2 - cn_2^2 + n_3^2]}{1 + (c-1)^2 + c^2};$$
$$\frac{\nu_{mn}}{E_n} = \frac{4a_3 - a_1}{2a_3(a_1 - 2a_3)}\,(t_{i1}\tilde{m}_i)(t_{j1}\tilde{n}_j) + \frac{a_3 - a_2}{2a_3(a_2 + a_3)}\,(t_{i2}\tilde{m}_i)(t_{j2}\tilde{n}_j) =$$
$$= \frac{4a_3 - a_1}{6a_3(a_1 - 2a_3)} + \frac{a_3 - a_2}{2a_3(a_2 + a_3)} \times$$
$$\times\,\frac{[-(1+c)m_1^2 + (2-c)m_2^2 + (2c-1)m_3^2][-(1+c)n_1^2 + (2-c)n_2^2 + (2c-1)n_3^2]}{3[1 + (c-1)^2 + c^2]}.$$

Модуль сдвига μ_{nm} между площадками с нормалями n_i и m_i запишем как

$$\frac{1}{4\mu_{nm}} = n_i m_j a_{ijkl} n_k m_l = n_i m_j t_{ijpq}\,\frac{1}{\lambda_{pqrs}}\,t_{klrs} n_k m_l =$$
$$= \frac{1}{\lambda_1}\,(t_{ij11}n_i m_j)^2 + \frac{1}{\lambda_2}\,(t_{ij22}n_i m_j)^2 + \frac{1}{\lambda_3}\,(t_{ij33}n_i m_j)^2 +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_4}\,2(t_{ij23}n_i m_j)^2 + \frac{1}{\lambda_5}\,2(t_{ij13}n_i m_j)^2 + \frac{1}{\lambda_6}\,2(t_{ij12}n_i m_j)^2 =$$
$$= \widetilde{nm}_i a_{ij}\widetilde{nm}_j = \frac{1}{\lambda_1}\,(t_{i1}\widetilde{nm}_i)^2 + \frac{1}{\lambda_2}\,(t_{i2}\widetilde{nm}_i)^2 + \frac{1}{\lambda_3}\,(t_{i3}\widetilde{nm}_i)^2 +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_4}\,(t_{i4}\widetilde{nm}_i)^2 + \frac{1}{\lambda_5}\,(t_{i5}\widetilde{nm}_i)^2 + \frac{1}{\lambda_6}\,(t_{i6}\widetilde{nm}_i)^2. \qquad (47)$$

С учетом (37)–(39), (42), (44) из (47) находим

$$\frac{1}{4\mu_{nm}} = \frac{4a_2 - a_1}{2a_2(a_1 - 2a_2)}\,(t_{i1}\widetilde{nm}_i)^2 + \frac{a_2 - a_3}{2a_2(a_2 + a_3)}\,(t_{i3}\widetilde{nm}_i)^2 + \frac{1}{2a_2}\,(\widetilde{nm}_i)(\widetilde{nm}_i) =$$

$$= \frac{1}{4a_2} + \frac{a_2 - a_3}{2a_2(a_2 + a_3)}\,\frac{[(c-1)n_1m_1 - cn_2m_2 + n_3m_3]^2}{1 + (c-1)^2 + c^2};$$

$$\frac{1}{4\mu_{nm}} = \frac{4a_3 - a_1}{2a_3(a_1 - 2a_3)}\,(t_{i1}\widetilde{nm}_i)^2 + \frac{a_3 - a_2}{2a_3(a_2 + a_3)}\,(t_{i2}\widetilde{nm}_i)^2 + \frac{1}{2a_3}\,(\widetilde{nm}_i)(\widetilde{nm}_i) =$$

$$= \frac{1}{4a_3} + \frac{a_3 - a_2}{2a_3(a_2 + a_3)}\,\frac{[-(1+c)n_1m_1 + (2-c)n_2m_2 + (2c-1)n_3m_3]^2}{3[1 + (c-1)^2 + c^2]}.$$

Таким образом, все технические постоянные для материалов (36), (41), (42) найдены в самом общем виде.

Разложение матриц (36), (41) на инвариантные неприводимые части можно получить по формулам, данным в [10]. В частности, постоянные Ламе ближайших к (41) изотропных материалов будут следующими:

$$\lambda = (2A_{sskk} - A_{skks})/15 = (5\lambda_1 - 4\lambda_2 - \lambda_3)/15 = (5a_1 - 19a_2 - a_3)/15,$$

$$2\mu = (3A_{skks} - A_{sskk})/15 = (4\lambda_2 + \lambda_3)/5 = (9a_2 + a_3)/5;$$

$$\lambda = (5\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3)/15 = (5a_1 - a_2 - 19a_3)/15, \qquad 2\mu = (\lambda_2 + 4\lambda_3)/5 = (a_2 + 9a_3)/5.$$

Уравнения (30) допускают еще одно решение, когда в представлении (32) только один собственный вектор, например h_{i3}, удовлетворяет условию $h_{13} + h_{23} + h_{33} = 0$. При этом в (36) $a = a_3$, а во второй формуле (41) собственные модули $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2a_3 > 0$ — независимые величины, причем собственные состояния t_{ip} имеют вид [15]

$$t_{ip} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+c_3^2+(1+c_1(c_3-1))^2}} & \frac{-[c_3+(1+c_1(c_3-1))c_1]}{\sqrt{[1+c_3^2+(1+c_1(c_3-1))^2][1+(c_1-1)^2+c_1^2]}} & \frac{c_1-1}{\sqrt{1+(c_1-1)^2+c_1^2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_3}{\sqrt{1+c_3^2+(1+c_1(c_3-1))^2}} & \frac{1-(1+c_1(c_3-1))(c_1-1)}{\sqrt{[1+c_3^2+(1+c_1(c_3-1))^2][1+(c_1-1)^2+c_1^2]}} & \frac{-c_1}{\sqrt{1+(c_1-1)^2+c_1^2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1+c_1(c_3-1)}{\sqrt{1+c_3^2+(1+c_1(c_3-1))^2}} & \frac{c_3(c_1-1)+c_1}{\sqrt{[1+c_3^2+(1+c_1(c_3-1))^2][1+(c_1-1)^2+c_1^2]}} & \frac{1}{\sqrt{1+(c_1-1)^2+c_1^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{48}$$

где c_1, c_3 — произвольные действительные параметры. Таким образом, в этом случае анизотропный материал (41), проводящий *чисто поперечную* волну (28) при *любом направлении* волновой нормали n_k, зависит от пяти параметров: λ_1, λ_2, a_3, c_1, c_3.

С использованием (36), (41), (48) можно проверить, что матрица (31) имеет собственные вектор $h_{i3} = t_{i3}$ $(i = 1, 2, 3)$ и значение a_3. Собственные векторы h_{i1}, h_{i2} в (32) имеют структуру векторов t_{i1}, t_{i2} $(i = 1,\ 2,\ 3)$ в (48), но с другим параметром c_3. Значения a_1, a_2 в (32) нет необходимости вычислять. При $c_3 = 1$ матрица (48) переходит в матрицу (39).

Технические постоянные в случае (41), (48) также вычисляются по формулам (43), (45)–(47). Постоянные Ламе ближайшего изотропного материала следующие:

$$\lambda = [(\lambda_1 - 2a_3)(2t_{kk11}^2 - 1) + (\lambda_2 - 2a_3)(2t_{kk22}^2 - 1)]/15,$$

$$2\mu = [(\lambda_1 - 2a_3)(3 - t_{kk11}^2) + (\lambda_2 - 2a_3)(3 - t_{kk22}^2)]/15 + 2a_3.$$

В работе [4] в качестве примера анизотропного материала, проводящего чисто поперечные волны при любом направлении волновой нормали, приводится следующий:

$$A_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + H_{ij}\delta_{kl} + H_{kl}\delta_{ij} = A^{is}_{ijkl} + H_{ij}\delta_{kl} + H_{kl}\delta_{ij}, \tag{49}$$

где A^{is}_{ijkl} — изотропная часть, а $H_{ij} = H_{(ij)}$ — девиатор: $H_{ii} = 0$. В главных осях девиатора H_{ij} тензору (49) соответствует матрица A_{ij} модулей упругости

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu+2H_1 & & & & & \\ \lambda-H_3 & \lambda+2\mu+2H_2 & & & \mathrm{sym} & \\ \lambda-H_2 & \lambda-H_1 & \lambda+2\mu+2H_3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}, \tag{50}$$

$$H_1 + H_2 + H_3 = 0.$$

Материал (50) является частным случаем материалов вида (36), (41), (48). Собственные модули λ_p, состояния t_{ip} и параметры c_1, c_3 для (50) следующие:

$$\lambda_1 = 2\mu + [3\lambda + \sqrt{3(3\lambda^2 + 4H_iH_i)}]/2 = 2\mu + \tilde\lambda_1,$$

$$\lambda_2 = 2\mu + [3\lambda - \sqrt{3(3\lambda^2 + 4H_iH_i)}]/2 = 2\mu + \tilde\lambda_2,$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2\mu;$$

$$t_{ip} = \begin{bmatrix} \dfrac{H_1+\tilde\lambda_1/3}{\sqrt{H_sH_s+\tilde\lambda_1^2/3}} & \dfrac{H_1+\tilde\lambda_2/3}{\sqrt{H_sH_s+\tilde\lambda_2^2/3}} & \dfrac{H_3-H_2}{\sqrt{3H_sH_s}} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{H_2+\tilde\lambda_1/3}{\sqrt{H_sH_s+\tilde\lambda_1^2/3}} & \dfrac{H_2+\tilde\lambda_2/3}{\sqrt{H_sH_s+\tilde\lambda_2^2/3}} & \dfrac{H_1-H_3}{\sqrt{3H_sH_s}} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{H_3+\tilde\lambda_1/3}{\sqrt{H_sH_s+\tilde\lambda_1^2/3}} & \dfrac{H_3+\tilde\lambda_2/3}{\sqrt{H_sH_s+\tilde\lambda_2^2/3}} & \dfrac{H_2-H_1}{\sqrt{3H_sH_s}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$c_1 = \frac{H_3 - H_1}{H_2 - H_1}, \qquad c_3 = \frac{H_2 + \tilde\lambda_1/3}{H_1 + \tilde\lambda_1/3}.$$

Матрица (50) будет положительно-определенной, если выполняются необходимые и достаточные условия

$$2\mu(3\lambda + 2\mu) > 3(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2), \qquad \mu > 0.$$

Представляет интерес найти кроме материалов вида (36), (41) и другие анизотропные материалы, допускающие чисто поперечные волны, например когда вектор смещения волны содержит септор S_{mkl} (см. (25), (26)). Для этого надо решить систему уравнений (10) и исследовать свойства септора, но это — предмет дальнейшей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Остросаблин Н. И.** Разложение тензоров третьего и четвертого рангов на неприводимые части и чисто поперечные волны в упругих средах // Всероссийская школа-семинар по современным проблемам механики деформируемого твердого тела: Сб. докл. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. техн. ун-та, 2003. С. 166–171.
2. **Остросаблин Н. И.** Новое представление решения уравнений Ламе линейной теории упругости изотропного тела // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. 18-й межресп. конф., Кемерово, 1–3 июля 2003 г. Новосибирск: Изд-во "Нонпарель", 2003. С. 130–135.
3. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
4. **Rychlewski J.** Elastic waves under unusual anisotropy // J. Mech. Phys. Solids. 2001. V. 49, N 11. P. 2651–2666.
5. **Остросаблин Н. И.** Собственные операторы и векторы для системы дифференциальных уравнений линейной теории упругости анизотропных материалов // Докл. РАН. 1994. Т. 337, № 5. С. 608–610.
6. **Остросаблин Н. И.** Об уравнениях линейной теории упругости анизотропных материалов, сводящихся к трем независимым волновым уравнениям // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 143–150.
7. **Остросаблин Н. И.** Операторы симметрии и общие решения уравнений линейной теории упругости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 5. С. 98–104.
8. **Остросаблин Н. И.** Общие решения и приведение системы уравнений линейной теории упругости к диагональному виду // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 5. С. 112–122.
9. **Остросаблин Н. И.** Упругий анизотропный материал с чисто продольными и поперечными волнами // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 143–151.
10. **Остросаблин Н. И.** Линейные инвариантные неприводимые разложения тензора четвертого ранга модулей упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2002. Вып. 120. С. 149–160.
11. **Сиротин Ю. И.** Разложение материальных тензоров на неприводимые части // Кристаллография. 1974. Т. 19, вып. 5. С. 909–915.
12. **Burridge R., Chadwick P., Norris A. N.** Fundamental elastodynamic solutions for anisotropic media with ellipsoidal slowness surfaces // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1993. V. 440, N 1910. P. 655–681.
13. **Bakker P. M.** About the completeness of the classification of cases of elliptic anisotropy // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1995. V. 451, N 1942. P. 367–373.
14. **Остросаблин Н. И.** О матрице коэффициентов в уравнениях линейной теории упругости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 1. С. 63–65.
15. **Остросаблин Н. И.** О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 66. С. 113–125.
16. **Остросаблин Н. И.** О классификации анизотропных материалов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 71. С. 82–96.
17. **Остросаблин Н. И.** Наитеснейшие границы изменения практических констант упругости анизотропных материалов // ПМТФ. 1992. № 1. С. 107–114.
18. **Рыхлевский Я.** О законе Гука // Прикл. математика и механика. 1984. Т. 48, вып. 3. С. 420–435.

Поступила в редакцию 27/IV 2004 г.