При $U_0(\tau) = A\tau^{\alpha}$, $(\alpha \geqslant 0)$ уравнение (2.11) легко интегрируется. Особенно простой вид (2.1) принимают в случае $U_0(\tau) = U_0 = \mathrm{const}$. В этом случае $F = 5 \cdot 3^{2/3}\, U_0$ и решения принимают вид

$$U = -\frac{16q^2\tau^2 - 1}{16\tau^2} Y^2 + \frac{U_0}{\sqrt[3]{2}} \frac{20q\tau - 1}{(12q\tau - 1)^{5/3}}, \quad X = qy^2 - \frac{U_0\tau}{(6q\tau - 1/2)^{5/3}} \tag{2.13}$$

$$V = \left(\frac{1}{24\tau^3} - \frac{2}{3} q^2 - q \frac{1}{8\tau^2}\right) Y^3 + 10\sqrt[3]{2}\, U_0 \frac{(4q\tau - 1) q}{(1 - 12q\tau)^{5/3}} Y$$

Полученное решение дает возможность проследить во времени процесс установления течения типа течения Прандтля — Майера, а также проследить влияние волн разрежения на первоначальное течение. На фиг. 1 и 2 показаны поля скоростей для двух моментов времени $\tau = 0.1$ и $\tau = 1$, $U_0 = 1$.

Поступила 16 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Б. И. Некоторые частные решения уравнений «коротких» волн. ПМТФ, 1962, № 1.
2. Заславский Б. И., Клепикова Н. А. Об одном классе точных частных решений уравнений околозвуковых течений газа. ПМТФ, 1965, № 6.
3. Овсянников Л. В. Уравнения околозвукового движения газа. Вестн. Ленингр. ун-та, 1952, № 6.
4. Рыжов О. С., Шефтер Г. М. О нестационарных течениях газа в соплах Лаваля. Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 3.

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ВЯЗКОСТЬЮ

*А. Д. Чернышов (Воронеж)*

Вопрос о толщине ударных волн в вязком газе рассматривался в работах [1,2]. В настоящей работе выводятся общие уравнения для решения задач о течении среды внутри слоя ударной волны и изменении этого слоя в средах с вязкостью.

В качестве примера рассматривается подобная задача для среды Кельвина.

**1.** В работе [3] показывается, что в вязкой жидкости волны разрыва нулевой толщины распространяться не могут. Можно предположить, что вследствие действия сил вязкости в таких средах ударные волны представляют некоторый слой, внутри которого происходит быстрое, но непрерывное изменение функций. Толщина слоя ударной волны не одинакова в различных местах.

При выводе основных уравнений для решения задачи о течении среды с вязкостью внутри слоя ударной волны, введем следующие предположения.

а) Толщина слоя ударной волны мала, а передний и задний фронты этого слоя в первом приближении параллельны между собой.

б) Если значения некоторой величины $z$ на обоих фронтах ударной волны одинаковые, то эта величина в первом приближении не зависит от координаты, поперечной к слою ударной волны, т. е.

$$z = C \quad \text{при} \quad [z] = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $C$ — функция, не зависящая от поперечной координаты.

в) Если величина $z$ имеет разные значения на фронтах слоя ударной волны, то будем пренебрегать производными от этой величины по направлениям в касательной плоскости к фронтам слоя ударной волны, по сравнению с производной от этой величины в поперечном направлении, т. е.

$$z_{,i} = z_{,k} \nu^k \nu_i \quad \text{при} \quad [z] \neq 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\nu_i$, $\nu^k$ — ковариантные и контравариантные компоненты нормали к фронтам слоя ударной волны. Заметим, что соотношение (1.2) тем точнее, чем меньше толщина слоя ударной волны.

Вследствие малости толщины слоя ударной волны имеют место динамические условия для разрывов плотности $\rho$, скорости $v_i$ и напряжений [4] $\sigma_{ij}$

$$[\rho (v_n - C)] = 0, \qquad [\sigma_{ij}\nu^j - \rho (v_n - G) v_i] = 0 \tag{1.3}$$

Применяя (1.1) к этим выражениям, получим

$$\rho (v_n - G) = C, \qquad \sigma_{ij}\nu^j - C v_i = C_i \tag{1.4}$$

Здесь $C$ — произвольная функция, $C_i$ — произвольный вектор, не зависящие от поперечной координаты. Первое уравнение (1.4) было получено в работе [1].

Если взаимодействие слоя ударной волны с основным потоком среды мало, то, по аналогии с теорией пограничного слоя, первоначально решается задача для невязкого течения среды, в которой движется ударная волна. При этом на ударной волне выполняются динамические, кинематические и геометрические условия совместности [4]. Затем решается задача для слоя ударной волны, где за граничные условия на фронтах этого слоя берутся граничные условия на ударной волне из невязкого течения.

Под скоростью $G$ можно понимать скорость распространения некоторой поверхности $\Sigma$, расположенной внутри слоя ударной волны параллельно его фронтам. За такую поверхность для простоты можно принять срединную поверхность слоя, на которой некоторая функция принимает свое среднее значение.

Индексами внизу 1 и 2 будем обозначать значения величин на заднем и переднем фронтах слоя ударной волны соответственно. Так как в слое ударной волны среда претерпевает большие деформации, то при написании уравнений, определяющих состояние среды в этом слое, следует учитывать конечность деформаций.

2. В качестве примера в дальнейшем будет рассматриваться задача о толщине слоя ударной волны и о течении внутри этого слоя в случае среды Кельвина с учетом конечности деформаций и конвективных членов при определении скорости через перемещения. В связи с этим рассмотрим задачу о распространении продольной ударной волны в упругой среде в такой же постановке. Задача о распространении ударных волн в упругой среде в линеаризированной постановке рассматривалась в работе [4].

Запишем закон Гука в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \qquad e_{ij} = {}^1\!/_2\,(u_{i,\,j} + u_{j,\,i} - u_{k,\,i}u_{k,\,j}) \tag{2.1}$$

где $u_i$ — вектор перемещений.

Для упрощения задачи выберем систему координат так, чтобы ее начало лежало на поверхности $\Sigma$, а плоскость $x_1$, $x_2$ совпадала с касательной плоскостью к этой поверхности. Введем обозначения

$$u_{1,3} = u, \qquad u_{2,3} = v, \qquad u_{3,3} = w \tag{2.2}$$

На продольной волне $[u] = [v] = 0$, $[w] \neq 0$. Из определения скорости через перемещения в первом приближении находим

$$v_3 = (u_{3,\,t} - Gw)\,/\,(1 - w) \tag{2.3}$$

Подставляя (2.1) — (2.3) в (1.3) при $i = 3$, получим выражение для определения скорости распространения продольной волны сильного разрыва в упругой среде

$$\frac{(G - u_{3,\,t})^2}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 - w_2}{\rho_2}\,(1 - w_2)\,(1 - w_1)\left(1 - \frac{w_1 + w_2}{2}\right) \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что если $w_1$ и $w_2$ малы, то продольная ударная волна слабой интенсивности распространяется со скоростью продольной волны ускорений. Если по обе стороны поверхности среда сжата ($w < 0$), то она распространяется со скоростью, большей чем скорость волны ускорений. Если по обе стороны волны среда растянута, то скорость ее распространения меньше скорости волны ускорений. При очень сильном растяжении, когда $w_2$ или $w_1 \to 1$, скорость распространения ударной волны уменьшается до нуля. При сильном сжатии, когда $w_2$ или $w_1 \to -\infty$ скорость ударной волны неограниченно возрастает.

3. Для среды Кельвина связь между тензорами напряжений, деформаций и скоростью деформаций запишем в виде [5]

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk} + \xi\varepsilon_{kk})\,\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + 2\eta\varepsilon_{ij} \tag{3.1}$$

Из (2.3) находим

$$v_{3,3} = \frac{(1 - w)\,w_{,t} - (G - u_{3,\,t})\,w_{,3}}{(1 - w)^2} \tag{3.2}$$

Решая совместно систему уравнений (1.4), (2.3), (3.1) и (3.2) с учетом (1.2), получим для функции $w$ нелинейное уравнение

$$(1 - w)\{aw^3 - 3aw^2 + [C_3 + a\,(2 + u^2 + v^2) + C\,(Gw - u_{3,\,t})]\,w - [C_3 + a\,(u^2 + v^2)]\} =$$

$$= (\xi + 2\eta)\,[(G - u_{3,\,t})\,w_{,3} - (1 - w)\,w_{,t}] \qquad (a = {}^1\!/_2\lambda + \mu) \tag{3.3}$$

Предположим, что на переднем и заднем фронтах слоя ударной волны вязкость не влияет на течение среды. В этом случае $w_1$ и $w_2$ будут корнями полинома в левой части (3.3). Уравнение (3.3) может быть записано в виде

$$a\,(1 - w)\,(w - w_1)\,(w - w_2)\,(w - w_0) = (\xi + 2\,\eta)\;[(G - u_{3,\,t})\,w_{,3} - (1 - w)\,w_{,t}] \tag{3.4}$$

Если $w_1 \; w_2 \neq 0$, то корень

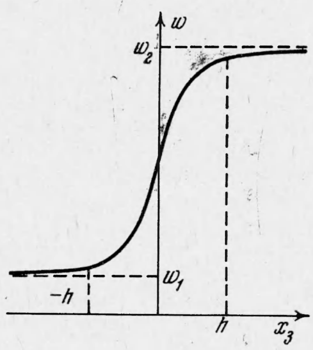
$$w_0 = \frac{C_3 + a(u^2 + v^2)}{a w_1 w_2} \tag{3.5}$$

В случае волны нагрузки или разгрузки ($w_1 w_2 = 0$) корень $w_0$ равен

$$w_0 = \frac{C_3 + a(2 + u^2 + v^2) + C(Gw - u_{3,\,t})}{aw^*}, \qquad w^* = \begin{cases} w_2 & (w_1 = 0) \\ w_1 & (w_2 = 0) \end{cases} \tag{3.6}$$

Чтобы найти выражение корня $w_0$ через $w_1$ и $w_2$, найдем значения $C_3$ и $C$ через величины на ударной волне. Полагая в левой части (3.3) $w = w_2$ и приравнивая ее к нулю, получим

$$C_3 = 2aw_2 - aw_2^2 - a(u^2 + v^2) + \frac{C\,(Gw_2 - u_{3,\,t})}{1 - w_2}\, w_2 \tag{3.7}$$




Фиг. 1

Из первого уравнения (1.4) и (2.3) находим

$$C = -\rho_2\,(Gw_2 - u_{3,\,t})\,/\,(1 - w_2) \tag{3.8}$$

Подставляя (3.7), (3.8) и (2.4) в (3.5) и в (3.6), соответственно получим

$$w_0 = 3 - (w_1 + w_2), \qquad w_0 = 3 - w^* \tag{3.9}$$

Таким образом, в обоих случаях (3.5) и (3.6) разность $w_0 - w = 3 - (w + w_1 + w_2)$ положительна. Поэтому левая часть (3.4) внутри слоя ударной волны всюду положительна.

Для квазистационарного случая при $w_{,t} = 0$ уравнение (3.4) можно проинтегрировать. Граничное условие запишем в виде:

$$w = {}^1\!/_2\;(w_1 + w_2) \quad \text{при } x_3 = 0 \tag{3.10}$$

Интегрирование (3.4) при условии (3.10) в рассматриваемом случае дает

$$x_3 = \frac{(G - u_{3,\,t})(\xi + 2\eta)}{a}\left[a_1 \ln\frac{2(1 - w)}{2 - w_1 - w_2} + a_2 \ln\frac{3(2 - w_1 - w_2)}{2(w_0 - w)} + a_3 \ln\frac{w_2 - w_1}{2(w_2 - w)} + a_4 \ln\frac{2(w - w_1)}{w_2 - w_1}\right] \tag{3.11}$$

$$a_1 = \frac{1}{(w_0 - 1)(1 - w_1)(1 - w_2)}, \qquad a_2 = \frac{1}{(w_0 - 1)(w_0 - w_1)(w_0 - w_2)}$$

$$a_3 = \frac{1}{(1 - w_2)(w_0 - w_2)(w_2 - w_1)}, \qquad a_4 = \frac{1}{(1 - w_1)(w_0 - w_1)(w_2 - w_1)}$$

Уравнение (3.11) определяет изменение величины $w$ между значениями $w_1$ и $w_2$. При $x_3 \to \pm\infty$ величина $w$ быстро приближается асимптотически к значениям $w_2$ и $w_1$ (фигура 1). Основное изменение $w$ происходит на расстоянии порядка величины

$$h = \frac{8(G - u_{3,\,t})(\xi + 2\eta)}{3a(2 - w_1 - w_2)^2(w_2 - w_1)} \tag{3.12}$$

Эту величину можно считать толщиной слоя ударной волны.

Из (3.12) следует, что эта толщина тем меньше, чем больше интенсивность ударной волны, чем сильнее сжата среда по одну из сторон ударной волны и чем меньше коэффициент вязкости. Таким образом, ударные волны большой интенсивности в среде Кельвина можно рассматривать как волны, не имеющие толщины. Слабые ударные волны при квазистационарном процессе имеют большую толщину.

Поступила 25 VII 1965

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ОГИЗ, Гостехиздат, 1944.
2. Бай Ши И. Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. 1962. Изд. иностр. лит.
3. Баренблатт Г. И., Черный Г. Г. О моментных соотношениях на поверхностях разрыва в диссипативных средах. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
4. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах, Изд. «Мир», 1964.
5. Сб. Реология. т. 1. Изд. Иностр. лит., 1962.