

ВОЛОЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ КРИВОЛИНЕЙНУЮ МАТРИЦУ

Б. А. Друянов

(Москва)

Задача о волочении листа из жестко идеально пластического материала при условии плоской деформации является статически неопределимой.

В случае прямолинейной матрицы удается удовлетворить граничным условиям для скоростей благодаря прямолинейности характеристик в пластической области, примыкающей к стенке матрицы [1].

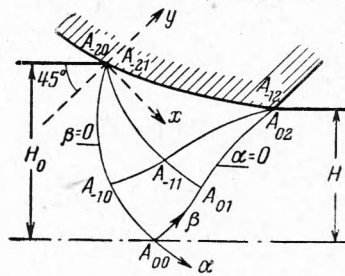
Задача о волочении через криволинейную матрицу рассматривалась К. Н. Шевченко [2], однако построенное им решение не удовлетворяет граничным условиям для скоростей на жестко-пластической границе. Решение этой задачи дано ниже. При этом использован метод, предложенный в работе [3].

I. Об интегрировании уравнений плоской деформации. Во всех областях, где характеристики криволинейны, можно ввести криволинейные координаты по формулам [1]

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2} \left[\frac{p_0}{2k} - \left(\frac{p}{2k} + \varphi \right) \right] \\ \beta &= \frac{1}{2} \left[-\frac{p_0}{2k} + \left(\frac{p}{2k} + \varphi \right) \right]\end{aligned}\quad (1.1)$$

Здесь

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}, \quad p = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



Проекции скорости v_α, v_β на направления α, β , а также величины X, Y ,

$$(X = x \cos \varphi + y \sin \varphi, Y = -x \sin \varphi + y \cos \varphi)$$

удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} + f = 0 \quad (1.2)$$

Решение задачи Гурса для этого уравнения имеет вид [1]

$$\begin{aligned}f(\alpha, \beta) &= f(\alpha_0, \beta_0) J_0 [2 \sqrt{(\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0)}] + \\ &+ \int_{\alpha_0}^{\alpha} J_0 [2 \sqrt{(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_0)}] \frac{\partial}{\partial \alpha_1} f(\alpha_1, \beta_0) d\alpha_1 + \int_{\beta_0}^{\beta} J_0 [2 \sqrt{(\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_1)}] \frac{\partial}{\partial \beta_1} f(\alpha_0, \beta_1) d\beta_1\end{aligned}\quad (1.3)$$

Пусть $J_0 [2 \sqrt{(\alpha - a)(\beta - b)}]$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Эта функция удовлетворяет уравнению (1.2). Подставляя ее в (1.3) вместо f и полагая $b = \beta_0$, получим тождество

$$\begin{aligned}\int_{\beta_0}^{\beta} J_0 [2 \sqrt{(\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_1)}] \frac{\partial}{\partial \beta_1} J_0 [2 \sqrt{(\alpha_0 - a)(\beta_1 - \beta_0)}] d\beta_1 = \\ = J_0 [2 \sqrt{(\alpha - a)(\beta - \beta_0)}] - J_0 [2 \sqrt{(\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0)}]\end{aligned}\quad (1.4)$$

Тождество (1.4) позволяет свести многократные интегралы, которые появляются в формулах для v_α, v_β, X, Y при переходе от одной пластической области к другой, к однократным.

2. Предположим, что поле линий скольжения имеет вид, показанный на фигуре. Примем для простоты, что сила трения между материалом листа и стенкой матрицы постоянна и равна T . Тогда вдоль линии контакта $A_{-21} A_{-12}$ имеет место соотношение (фиг.)

$$\theta - (\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \pi - \delta \quad \left(\delta = \frac{1}{2} \arccos \frac{T}{k} \right) \quad (2.1)$$

Здесь θ — отсчитываемый от оси $A_{-21} x$ против часовой стрелки угол между этой осью и касательной к линии $A_{-21} A_{-12}$, а k — предел текучести на сдвиг материала листа.

Примем скорость листа после деформации за единицу, тогда скорость листа до деформации будет равна $1 - \varepsilon$, где $\varepsilon = (H_0 - H)/H_0$.

Имеют место следующие граничные условия для скоростей:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} &= (1 - \varepsilon) \cos\left(\frac{1}{4}\pi + \alpha\right), \quad \frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha} = -(1 - \varepsilon) \sin\left(\frac{1}{4}\pi + \alpha\right) \quad \text{при } \beta = 0 \text{ (на } A_{-20} A_{00}) \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta} &= \cos\left(\frac{1}{4}\pi + \beta\right), \quad \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi + \beta\right) \quad \text{при } \alpha = 0 \text{ (на } A_{00} A_{02}) \\ v_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v_\beta = \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{при } \alpha = 0, \beta = 0 \text{ (в точке } A_{00})\end{aligned}$$

На линии $A_{-21} A_{-12}$ нормальная скорость равна нулю, что дает

$$v_\alpha \cos \delta - v_\beta \sin \delta = 0 \quad (2.2)$$

Определяя v_α и v_β и подставляя получающиеся формулы в (2.2), получим уравнение

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{\alpha\beta}) [\cos \delta - (1 - \varepsilon) \sin \delta] + \\ & + (1 - \varepsilon) \int_0^\alpha \cos\left(\lambda + \frac{1}{4}\pi - \delta\right) J_0[2\sqrt{(\alpha - \lambda)\beta}] d\lambda + \\ & + \int_0^\beta \cos\left(\lambda + \frac{1}{4}\pi - \delta\right) J_0[2\sqrt{\alpha(\beta - \lambda)}] d\lambda = 0\end{aligned} \quad (2.3)$$

При выводе этого уравнения использовано тождество (1.4). Учитывая, что $\sin(\alpha + \beta + \pi/4 - \delta)$ удовлетворяет уравнению (1.2), и используя формулу (1.3), получим тождество

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha + \beta + \frac{1}{4}\pi - \delta\right) &= \sin\left(\frac{1}{4}\pi - \delta\right) J_0[2\sqrt{\alpha\beta}] + \\ &+ \int_0^\alpha \cos\left(\lambda + \frac{1}{4}\pi - \delta\right) J_0[2\sqrt{(\alpha - \lambda)\beta}] d\lambda + \int_0^\beta \cos\left(\lambda + \frac{1}{4}\pi - \delta\right) J_0[2\sqrt{\alpha(\beta - \lambda)}] d\lambda\end{aligned}$$

Упрощая при помощи этого тождества уравнение (2.3), получим

$$\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{\alpha\beta}) \sin \delta - \int_0^\alpha J_0[2\sqrt{(\alpha - \lambda)\beta}] \cos\left(\frac{1}{4}\pi - \delta + \lambda\right) d\lambda \right] \quad (2.4)$$

Это уравнение совместно с уравнением (2.1) определяет α и β как функции от θ . Тем самым на дуге контакта определяется p , как функция θ (см. 1.1), и становится возможным построение сетки линий скольжения.

Уравнения (2.1), (2.4) допускают решения

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{1}{4}\pi - \arcsin\left[\frac{\varepsilon \cos \delta}{\sqrt{2}(1 - \varepsilon)}\right], \quad \alpha_1 = \theta_1 - \frac{1}{2}\pi + \delta, \quad \beta_1 = 0 \\ \theta_2 &= \frac{1}{4}\pi - \arcsin\left[\frac{\varepsilon \sin \delta}{\sqrt{2}}\right], \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = \theta_2 - \frac{1}{2}\pi + \delta\end{aligned}$$

Дифференцируя уравнения (2.1), (2.4) по θ и полагая затем в них $\theta = \theta_2$, $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \beta_2$, получим значения первых трех производных от функций $\alpha(\theta)$, $\beta(\theta)$ в точке $\theta = \theta_2$, что позволяет написать первые четыре члена разложения этих функций в ряд Тейлора в окрестности точки $\theta = \theta_2$

$$\begin{aligned}\alpha_2' &= \Delta \sin\left(\theta_2 + \frac{1}{4}\pi\right), \quad \Delta = \varepsilon^{-1} \left[\frac{\sin \delta}{\sqrt{2}} \beta_2 + \cos\left(\frac{1}{4}\pi - \delta\right) \right]^{-1} \\ \alpha_2'' &= \Delta \left\{ \cos\left(\theta_2 + \frac{1}{4}\pi\right) + \varepsilon \left[\frac{\sin \delta}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \alpha_2'^2 \beta_2^2 - 2\alpha_2' \beta_2' \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \cos\left(\frac{1}{4}\pi - \delta\right) \alpha_2' \beta_2 + \sin\left(\frac{1}{4}\pi - \delta\right) \alpha_2' \right] \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2''' = \Delta \left\{ -\sin\left(\theta_2 + \frac{1}{4}\pi\right) + \varepsilon \left\{ \frac{\sin \delta}{\sqrt{2}} \left[3\alpha_2'' \left(\frac{1}{2} \alpha_2' \beta_2^2 - \beta_2' \right) - \right. \right. \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \alpha_2'^3 \beta_2^3 + 3\alpha_2'^2 \beta_2' \beta_2 - 3\alpha_2' \beta_2'' \right] + \cos\left(\frac{1}{4}\pi - \delta\right) \left[\alpha_2'' \beta_2 (1 + 2\alpha_2') + \right. \\ \left. \left. + \alpha_2'^2 \left(-\frac{1}{2} \beta_2^2 + \beta_2' + 1 \right) + 2\alpha_2' \beta_2' \right] + \sin\left(\frac{1}{4}\pi - \delta\right) \left[\alpha_2'' (1 + \alpha_2') - \alpha_2'^3 \beta_2 \right] \right\} \right\} \\ \beta_2' = 1 - \alpha_2', \quad \beta_2'' = -\alpha_2'', \quad \beta_2''' = -\alpha_2''' \end{aligned}$$

Значения θ , α и β в точке A_{-21} обозначим через θ_0 , α_0 , β_0 , а в точке A_{-12} — через θ_* , α_* , β_* . Величина угла раствора сектора $A_{00} A_{-20} A_{-21} A_{11}$ равна β_0 , а сектора $A_{00} A_{02} A_{-12} A_{-10} - (-\alpha_*)$. Поэтому должны выполняться условия $\alpha_* \leq 0$, $\beta_0 \geq 0$.

Учитывая, что в промежутке $0 \leq \theta \leq \pi/4$ величины α и β обращаются в нуль только по одному разу, а также, что $(d\alpha/d\theta)_2 > 0$ и $(d\beta/d\theta)_1 < 0$, получим границы применимости найденного решения: $\theta_0 \leq \theta_1$, $\theta_* \leq \theta_2$.

Величина $\theta_2 \leq \pi/4$, причем знак равенства имеет место лишь при $\delta = 0$, что соответствует условию $T = k$. Таким образом, только в случае, когда сила трения между стенкой матрицы и материалом листа равна пределу текучести на сдвиг материала листа, полученное решение удовлетворяет условию $\theta_* = \pi/4$, что соответствует наличию горизонтальной касательной к стенке матрицы в точке A_{-12} . Линия контакта в этом случае является огибающей линий скольжения β .

Так как точка A_{00} (фиг.) должна находиться на оси симметрии матрицы, то при $\alpha = \beta = 0$ должно выполняться условие $x - y = \sqrt{2}(x, y - \text{безразмерные координаты, представляющие собой отношения размерных координат к } H_0)$. Так как на оси симметрии $x = X$, $y = Y$, то это условие принимает вид

$$X - Y = \sqrt{2} \quad (\alpha = \beta = 0) \quad (2.5)$$

Пусть параметрические уравнения кривой $A_{-21} A_{-12}$ будут $x = \varphi_1(\theta)$, $y = \varphi_2(\theta)$. Для величин X, Y имеем граничные условия

$$\begin{aligned} X = \varphi_1, \quad \frac{\partial X}{\partial \alpha} = \psi_2 + \left(\frac{d\varphi_1}{d\theta} - \psi_2 \right) / \left(\frac{d\alpha}{d\theta} \right), \quad \frac{\partial X}{\partial \beta} = \psi_2 \\ Y = \varphi_2, \quad \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = -\varphi_1, \quad \frac{\partial Y}{\partial \beta} = -\varphi_1 + \left(\frac{d\varphi_2}{d\theta} + \varphi_1 \right) / \left(\frac{d\beta}{d\theta} \right) \quad \text{при } x = \varphi_1(\theta), y = \varphi_2(\theta) \\ X = 0, \quad Y = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0 \\ \frac{\partial X}{\partial \alpha} = -a \sin(\alpha + \beta_*) + b \cos(\alpha + \beta_*) \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = -a \cos(\alpha + \beta_*) - b \sin(\alpha + \beta_*) \quad \text{при } \beta = \beta_* \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \psi_1 = \varphi_1(\theta) \sin(\theta + \delta) - \varphi_2(\theta) \cos(\theta + \delta), \quad a = \varphi_1(\theta_*), \\ \psi_2 = \varphi_1(\theta) \cos(\theta + \delta) + \varphi_2(\theta) \sin(\theta + \delta), \quad b = \varphi_2(\theta_*) \end{aligned}$$

Интегрируя уравнение (1.2) по методу Римана, используя тождество (1.4), определим величины X и Y в области $A_{00} A_{-10} A_{-11} A_{01}$ (фиг.)

$$\begin{aligned} X = \frac{1}{2} \psi_1(\theta_*) J_0 [2 \sqrt{(\alpha - \alpha_*)(\beta - \beta_*)}] + \\ + \int_{\alpha_*}^{\alpha} [-a \sin(\alpha_1 + \beta_*) + b \cos(\alpha_1 + \beta_*)] J_0 [2 \sqrt{(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_*)}] d\alpha_1 + \\ + \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_*} \left\{ \left[G\psi_2 - \frac{\partial G}{\partial \alpha_1} \psi_1 \right] \frac{d\alpha_1}{d\theta} + \left[\frac{\partial G}{\partial \beta_1} \psi_1 - G\psi_2 \right] \frac{d\beta_1}{d\theta} + G \left(\frac{d\varphi_1}{d\theta} - \psi_2 \right) \right\} d\theta \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = \frac{1}{2} \psi_2(\theta_*) J_0 [2 \sqrt{(\alpha - \alpha_*)(\beta - \beta_*)}] - \\ - \int_{\alpha_*}^{\alpha} [a \cos(\alpha_1 + \beta_*) + b \sin(\alpha_1 + \beta_*)] J_0 [2 \sqrt{(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_*)}] d\alpha_1 + \\ + \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_*} \left\{ - \left[G\psi_1 + \frac{\partial G}{\partial \alpha_1} \psi_2 \right] \frac{d\alpha_1}{d\theta} + \left[\frac{\partial G}{\partial \beta_1} \psi_2 + G\psi_1 \right] \frac{d\beta_1}{d\theta} - G \left(\frac{d\varphi_2}{d\theta} + \varphi_1 \right) \right\} d\theta \quad (2.7) \end{aligned}$$

Здесь $G = J_0 [2 \sqrt{(\alpha - \alpha_1(\theta))(\beta - \beta_1(\theta))}]$, функции $\alpha_1(\theta)$ и $\beta_1(\theta)$ определяются из уравнений (2.1), (2.4).

Условие (2.5) принимает теперь вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[a \sin \left(\theta_* + \delta - \frac{1}{4} \pi \right) - b \cos \left(\theta_* + \delta - \frac{1}{4} \pi \right) \right] J_0 [2 \sqrt{\alpha_* \beta_*}] + \\ & + \int_{\alpha_*}^0 \left[a \cos \left(\frac{1}{4} \pi + \beta_* + \lambda \right) + b \sin \left(\frac{1}{4} \pi + \beta_* + \lambda \right) \right] J_0 [2 \sqrt{\lambda \beta_*}] d\lambda + \\ & + \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{\theta_0}^{\theta_*} \left\{ \left[G_0(\psi_1 + \psi_2) + \frac{\partial G_0}{\partial \alpha_1} (\psi_2 - \psi_1) \right] \frac{d\alpha_1}{d\theta} + \left[\frac{\partial G_0}{\partial \beta_1} (\psi_1 - \psi_2) - G_0(\psi_1 + \psi_2) \right] \frac{d\beta_1}{d\theta} + \right. \\ & \left. + G_0 \left[(\psi_1 - \psi_2) + \frac{d}{d\theta} (\psi_1 + \psi_2) \right] \right\} d\theta = 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь

$$G_0 = J_0 [2 \sqrt{\alpha_1(\theta) \beta_1(\theta)}]$$

Если функции $\varphi_1(\theta)$, $\varphi_2(\theta)$ и параметры заданы, то уравнение (2.8) удовлетворяется лишь в исключительных случаях. Если, однако, мы располагаем свободой выбора двух параметров в каждой из функций $\varphi_1(\theta)$, $\varphi_2(\theta)$, то указанное на фиг. 1 поле линий скольжения дает решение поставленной задачи. При этом значения вышеупомянутых параметров определяются из уравнения (2.8) и из уравнений $\psi_1(\theta_0) = 0$, $\psi_2(\theta_0) = 0$, $a - b = \varepsilon \sqrt{2}$. Последнее уравнение требует, чтобы точка A_{-12} лежала на прямой $x - y = \varepsilon \sqrt{2}$. Например, имеется семейство эллипсов, зависящее от одного параметра, дуги которых могут быть приняты за линию $A_{-21}A_{-12}$. Аналогичный факт имеет место в задаче о перекусывании полосы штампом с цилиндрической подошвой [3].

Полученное решение будет справедливо и в случае, когда стенки матрицы прямолинейны, так как в этом случае проекции скорости на направления α, β , так же как и в общем случае, являются однозначными функциями α, β . Можно показать, что в случае прямолинейной матрицы уравнение (2.8) выполняется автоматически в силу уравнения (2.4).

Условие $\theta_0 \leq \theta_1$ в этом случае совпадает с условием применимости рассмотренного поля линий скольжения, полученного Хиллом [1] из геометрических соображений.

Ограниченность полученного решения можно преодолеть, если рассмотреть другое поле линий скольжения.

Поступила 18 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1956.
2. Шевченко К. Н. Пластическое напряженное состояние и течение металла при холодной прокатке и волочении. Изв. АН СССР, ОТН, 1946, № 3.
3. Друянов Б. А. Распределение напряжений под штампом с криволинейной подошвой при перекусывании идеально пластической полосы. ПМТФ, 1961, № 6.