О ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ДРЕНАХ В СЛОИСТЫХ ГРУНТАХ

В. Н. Эмих (*Новосибирск*)

Верхний безнапорный горизонт прорезан двумя параллельными дренами до границы со слабопроницаемым пластом (фиг. 1). Расстояние между дренами равно $2l$. В нижележащем напорном пласте поддерживается постоянный напор H, уровень в дренах равен h_l. Если $h_l < H$, то в междренье, на участке, где $h > H$, может иметь место переток из верхнего горизонта в нижележащий водоносный пласт; на остальной же части будет происходить переток снизу вверх.

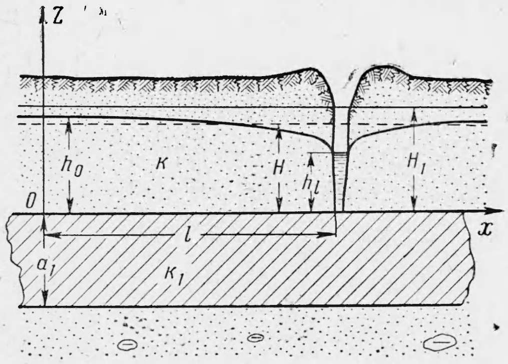
Найдем форму свободной поверхности в междренье. Уравнение неразрывности для установившегося движения имеет вид [1].

$$k\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right)-\frac{k_1}{a_1}(h-H)+w=0$$

или

$$k\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right)-\frac{k_1}{a_1}(h-H_1)=0$$

$$\left(H_1=H+\frac{wa_1}{k_1}\right) \qquad (1)$$



Фиг. 1

Задачу решаем в гидравлической постановке: пренебрегаем вертикальными скоростями фильтрации в верхнем горизонте.

Уравнение (1) для свободной поверхности при наличии инфильтрации имеет такой же вид, как и при ее отсутствии ($w = 0$), только в случае инфильтрации нужно вместо H брать H_1 по (1).

В этом случае влияние инфильтрации на форму свободной поверхности равносильно изменению напора на величину wa_1/k_1. Величину H_1 будем называть приведенным напором.

Частное решение $h = H_1 = \text{const}$ уравнения (1) соответствует установившемуся перетоку воды из верхнего горизонта в нижележащий при наличии инфильтрации и при отсутствии дрен.

Решение уравнения (1). Воспользуемся подстановкой $hdh/dx = u$. При условии

$$x=0,\; h=h_0 \quad \text{(неизвестное заранее)}, \qquad dh/dx=0$$

получим

$$x=-\sqrt{\frac{3a_1k}{2k_1}}\int_{h_0}^{h}\frac{hdh}{\sqrt{(h-h_0)\left[h^2+(h_0+3H_1/2)h+h_0(h_0-3H_1/2)\right]}} \qquad (2)$$

или после преобразования эллиптического интеграла (2) к лежандровой форме [2]

$$x=\sqrt{6a_1k/k_1(h_1-h_2)}\,\{h_1[K(\lambda)-F(\varphi,\lambda)]-(h_1-h_2)[E(\pi/2,\lambda)-E(\varphi,\lambda)]\} \qquad (3)$$

Здесь

$$F(\varphi,\lambda)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}, \qquad E(\varphi,\lambda)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$K(\lambda)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}$$

эллиптические интегралы первого и второго рода и полный эллиптический интеграл первого рода

$$\lambda^2=\frac{h_0-h_2}{h_1-h_2}, \qquad \varphi=\arcsin\sqrt{\frac{h-h_2}{h_0-h_2}}$$

$$h_1=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}H_1-h_0+\sqrt{\left(\frac{3}{2}H_1-h_0\right)\left(\frac{3}{2}H_1+3h_0\right)}\right]$$

$$h_2=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}H_1-h_0-\sqrt{\left(\frac{3}{2}H_1-h_0\right)\left(\frac{3}{2}H_1+3h_0\right)}\right]$$

Так как $h = h_l$, $\varphi = \varphi_l = \arcsin \sqrt{(h_l - h_2)/(h_0 - h_2)}$ при $x = l$, то

$$l = \sqrt{6a_1k}\left\{k_1\left[\left(\frac{3}{2}H_1 - h_0\right)\left(\frac{3}{2}H_1 + 3h_0\right)\right]^{1/2}\right\}^{-1/2}\times$$
$$\times\{h_1[K(\lambda) - F(\varphi_l, \lambda)] - (h_1 - h_2)[E(\pi/2, \lambda) - E(\varphi_l, \lambda)]\} \qquad (4)$$

Соотношение (4) позволяет определить расстояние $2l$, на котором дрены должны отстоять одна от другой, чтобы уровень воды в середине междренья (где он максимален) понизился до h_0, если уровень воды в дренах равен h_l.

Пользуясь (2), можно определить расход на единицу длины дрены (5)

$$q_0 = -kh\left[\frac{dh}{dl}\right]_{x=l} = \left\{\frac{2}{3}\frac{kk_1}{a_1}(h_l - h_0)\left[h_l^2 + \left(h_0 - \frac{3}{2}H_1\right)h_l + h_0\left(h_0 - \frac{3}{2}H_1\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Вводя безразмерные величины

$$h_0^\circ = h_0/H_1, \qquad h_l^\circ = h_l/H_1, \qquad l^\circ = \omega l \qquad (\omega = \sqrt{k_1/ka_1h_0})$$

приведем уравнения (4) и (5) к виду, удобному для вычислений

$$l^\circ = 1.225\,\{[S(h_0^\circ) + R(h_0^\circ)][K(\lambda) - F(\varphi_l, \lambda)] -$$
$$-2R(h_0^\circ)[E(\pi/2, \lambda) - E(\varphi_0, \lambda)]\}[h_0^\circ R(h_0^\circ)]^{-1/2}$$

$$q_0^\circ = \sqrt{h_0^\circ(h_0^\circ - h_l^\circ)[h_0^\circ(3 - 2h_0^\circ) + h_l^\circ(3 - 2h_0^\circ) - 2h_l^{\circ 2}]}$$

Здесь $q_0^\circ = q_0\sqrt{3}/k\omega H_1^2$ — приведенный расход. В безразмерных величинах

$$\varphi_l = \arcsin\sqrt{\frac{4h_l^\circ - S(h_0^\circ) + R(h_0^\circ)}{4h_0^\circ - S(h_0^\circ) + R(h_0^\circ)}}, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{4h_0^\circ - S(h_0^\circ)}{2R(h_0^\circ)}}$$

Приближенное решение уравнения (1). Уравнение (3) громоздко для вычислений. Кроме того, оно представляет не искомую зависимость $h(x)$, а обратную ей. На практике целесообразно решать уравнение (1) приближенно, линеаризуя его.

Заменим множитель h в скобках (1) некоторым постоянным значением h^* (т. е. мощность потока считаем постоянной); получим уравнение, линейное относительно h. (Линеаризация по h^2 дала менее точное решение.) Уравнение (1) перепишем тогда следующим образом:

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \omega^2(h - H_1) = 0 \qquad (6)$$

Учитывая, что $h = h_l$ при $x = \pm l$, а $h = h_0$, при $x = 0$ найдем решение уравнения (6)

$$h = H_1 - (H_1 - h_0)\,\mathrm{ch}\,\omega x \qquad (7)$$

Положив в (7) $x = l$, $h = h_l$, найдем соотношение

$$h_0 = \frac{h_l + H_1[\mathrm{ch}(\sqrt{k_1/ka_1h_0}\,l) - 1]}{\mathrm{ch}(\sqrt{k_1/ka_1h_0}\,l)} \qquad (8)$$

из которого h_0 можно найти методом последовательных приближений.

Расход через дрену на единицу ее длины определяется формулой

$$q_0 = -kh_l\left[\frac{dh}{dx}\right]_{x=l} = kh_l\omega(H_1 - h_0)\,\mathrm{sh}\,\omega l \qquad (9)$$

В безразмерных величинах формулы (7) и (9) запишутся так:

$$h^\circ = 1 - (1 - h_0^\circ)\,\mathrm{ch}\,x^\circ, \qquad q_0^\circ = \sqrt{3}h_l^\circ(1 - h_0^\circ)\,\mathrm{sh}\,l^\circ \qquad (10)$$

Выражения для количества воды q_1', уходящей вниз через слабопроницаемый слой на участке $h > H$, и для количества воды q_1'', поступающей через этот слой снизу на участке $h < H$, имеют вид

$$q_1' = \int_0^{x_0}\frac{k_1}{a_1}(h - H)\,dx = wx_0 - \frac{k_1\sqrt{(h_0 - H)(2H_1 - h_0 - H)}}{\omega a_1} \qquad (11)$$

$$q_1'' = \int_{x_0}^{l}\frac{k_1}{l_1}(h - H)\,dx = -w(l - x_0) + k(H_1 - h_0)\times$$
$$\times\frac{1}{\omega a_1}\left[\mathrm{sh}\,\omega l - \frac{\sqrt{(h_0 - H)(2H_1 - h_0 - H)}}{H_1 - h_0}\right] \qquad (12)$$

При этом координата точки x_0, разделяющей эти участки, определяется из уравнения (7) при $h = H$

$$x_0 = \frac{1}{\omega} \operatorname{arch} \frac{H_1 - H}{H_1 - h_0} \tag{13}$$

Было показано, что при наличии инфильтрации и отсутствии дрен в верхнем горизонте устанавливается уровень $H_1 = H + wa_1/k_1$. При наличии дрен последние создают на всем междренье повышение (понижение) уровня, $S = H_1 - h$, вычисляемое по формулам (7) и (8)

$$S = (H_1 - h_l)\, \operatorname{ch} \omega x \,/\, \operatorname{ch} \omega l \tag{14}$$

Примеры. По приближенным формулам были произведены расчеты при различных значениях параметров. Оказалось, что для случаев, имеющих место на практике, когда проницаемость подстилающего слоя мала по сравнению с проницаемостью верхнего горизонта, основную роль в понижении уровня в верхнем горизонте играют дрены: большая часть воды уходит через них.

Рассмотрим случай, когда $k = 20$ *м/сут*; $k_1 = 0.1$ *м/сут*; $w = 0.01$ *м/сут*; $l = 50$ *м*; $a_1 = 10$ *м*; $h_l = 5$ *м*; $H = 5$ *м*.

В этом случае $H_1 = 6$ *м*. Согласно (14) по всему междренью $S > 0$, т. е. дрены создают понижение. Из формулы (8) находим $h_0 \approx 5{,}1$ *м*.

Затем из формул (9) и (12) подсчитываем отток в дрены $q_0 = 0.449$ *м*^{3}*/сут* и переток в нижележащий горизонт $q_1' = 0.055$ *м*^{3}*/сут*. Обратного перетока не будет ($q_1'' = 0$), и в (11) следует взять $x_0 = l$.

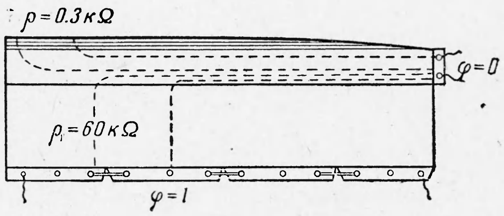
Таким образом переток через слабопроницаемый слой составляет всего $0.055 \,/\, (0.449 + 0.055) \approx 10.9\%$ общего оттока из верхнего горизонта. Для меньших значений ω эта величина будет еще меньше.

Для $H = 5.1$ *м* и прежних значений остальных параметров имеет место как переток из верхнего горизонта в нижележащий, так и переток в обратном направлении $x_0 = 5.12$ *м*. Точка раздела обоих участков находится из (13): $x_0 = 20.2$ *м*. При этом

$$q_0 \approx 0.5 \text{ м}^3/\text{сут}$$

$$q_1' \approx 0.001 \text{ м}^3/\text{сут}$$

$$q_1'' \approx 0.011 \text{ м}^3/\text{сут}$$



Фиг. 2

Сравнение приближенных формул с точными, произведенное для безразмерных формул, показало приемлемость приближенных формул для определения формы свободной поверхности в междренье при среднем значении $h^* \approx h_0$. Подсчитанная по приближенным свободная поверхность лежит ниже подсчитанной по точным формулам, но это расхождение составляет десятые доли процента.

Качественная картина хорошо видна на модели задачи, выполненной в масштабе из электропроводной бумаги (фиг. 2). Влияние инфильтрации при моделировании было учтено тем, что единичный потенциал по шине соответствовал напору H_1, в выражение которого входит инфильтрация.

Линии тока на электрической модели близки к горизонталям в хорошо проводящем слое (соответствующем слою грунта с большим коэффициентом фильтрации) и почти вертикальны в слабопроводящем слое. Это говорит о применимости рассматриваемой гидравлической теории движения грунтовых вод в слоистых грунтах.

Автор выражает признательность П. Я. Полубариновой-Кочиной за советы при подготовке работы.

Поступила 7 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2, Физматгиз, 1956.