УДК 517.95

ИНВАРИАНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ЗАДАЧЕ О ТРЕЩИНЕ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

А. М. Хлуднев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: khlud@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача о равновесии упругого тела, содержащего трещину на границе раздела двух сред. Доказано, что в этой задаче существуют инвариантные (не зависящие от поверхности интегрирования) интегралы. Существование инвариантных интегралов установлено также в задаче о контакте упругого тела, взаимодействующего на части поверхности с жестким штампом. При этом на контактных границах задаются нелинейные краевые условия взаимного непроникания. Установлен физический смысл инвариантных интегралов.

Ключевые слова: инвариантный интеграл, упругое тело, трещина, контактная задача.

Введение. Контактная задача описывает равновесие упругого тела, взаимодействующего на части границы с жестким (недеформируемым) телом. При этом на контактной границе задаются краевые условия, имеющие вид системы равенств и неравенств. В задаче о равновесии упругого тела, содержащего трещину, также задаются нелинейные условия на берегах трещины. В работе доказывается, что в данных нелинейных задачах существуют инвариантные интегралы. Инвариантные интегралы построены как в двумерном, так и в трехмерном случае.

Существование инвариантных интегралов в линейной теории трещин, называемых обычно интегралами Черепанова — Райса, обсуждалось во многих работах (см., например, [1–4]). Речь при этом идет о линейных задачах, что означает задание линейных краевых условий на берегах трещины. Будем рассматривать нелинейные задачи теории трещин, которые исследуются в монографии [5]. Особенностью нелинейных задач являются краевые условия на берегах трещины, имеющие вид системы равенств и неравенств. С точки зрения приложений нелинейные задачи лучше описывают реальные процессы, в то время как линейные задачи теории трещин могут противоречить механике явления. В нелинейных задачах теории трещин ранее были построены инвариантные интегралы для гладких (в частности, постоянных) тензоров модулей упругости [5–7]. В данной работе построены инвариантные интегралы для упругого тела с трещиной на границе раздела двух сред. В этом случае тензор модулей упругости не является гладким в области.

Для получения инвариантных интегралов в контактных задачах применяется метод фиктивных областей, который недавно был разработан для задач с краевыми условиями Синьорини [8, 9]. При этом задача о равновесии тела с трещиной содержится в семействе задач, зависящих от параметра, а контактная задача соответствует предельному значению параметра. Фактически инвариантные интегралы в рассматриваемых задачах, т. е.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00124).

в задаче о равновесии анизотропного тела с трещиной и контактной задаче, получены одновременно. Используемый метод фиктивных областей позволяет с помощью введения вспомогательного параметра построить семейство краевых задач, включающее как контактную задачу, так и задачу о равновесии тела с трещиной. Основы метода фиктивных областей применительно к линейным краевым условиям изложены в [10–12]. Одновременно в работе используется формула для производной функционала энергии по параметру возмущения в задачах теории упругости для тел, содержащих трещины с нелинейными краевыми условиями на берегах. С техникой дифференцирования функционалов энергии в нелинейных задачах теории трещин можно ознакомиться в работах [5–7, 13, 14]. Приложения задач теории трещин в механике деформируемого твердого тела содержатся в [1, 2, 15], а общие вопросы исследования краевых задач в негладких областях рассмотрены в [16].

Двумерный случай. Пусть $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная односвязная область с липшицевой границей Γ_1, а $\Gamma_c \subset \Gamma_1$ — контактная граница, которую для простоты считаем гладкой кривой, заданной в виде графика функции $x_2 = \phi(x_1)$, $x_1 \in [0,1]$. Предполагается, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$((-\delta_0, \delta_0) \times \{0\}) \subset \Gamma_1, \qquad (1-\delta_0, 1+\delta_0) \times \{0\}) \subset \Gamma_1. \tag{1}$$

Эти включения означают, что граница Γ_1 содержит прямолинейные участки вблизи точек $(0,0)$, $(1,0)$. Обозначим через $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ единичный вектор внутренней нормали к Γ_1. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma_1 \setminus \Gamma_c$. Постановка контактной задачи состоит в следующем [17]. В области Ω_1 требуется найти функции $\boldsymbol{u}^0 = (u_1^0, u_2^0)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ $(i,j = 1,2)$ такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = \boldsymbol{f} \qquad \text{в} \quad \Omega_1; \tag{2}$$

$$\sigma = C^1 \varepsilon(\boldsymbol{u}^0) \qquad \text{в} \quad \Omega_1; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}^0 = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma_0; \tag{4}$$

$$\boldsymbol{u}^0 \cdot \boldsymbol{\nu} \geqslant 0, \quad \sigma_\nu \leqslant 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = 0, \quad \boldsymbol{u}^0 \cdot \boldsymbol{\nu}\sigma_\nu = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma_c. \tag{5}$$

Здесь и далее $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$ — компоненты тензора деформаций; $v_{i,j} = \partial v_i / \partial x_j$; $x = (x_1, x_2) \in \Omega_1$; $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2) \in C^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ — известная функция; $C^1 = \{c^1_{ijkl}\}$ — тензор модулей упругости $(i,j,k,l = 1,2)$;

$$c^1_{ijkl} = c^1_{klij} = c^1_{jikl}, \qquad c^1_{ijkl} = \mathrm{const},$$
$$c^1_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geqslant c|\xi|^2, \qquad c > 0 \quad \forall \xi = \{\xi_{ij}\}, \tag{6}$$

$$\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i, \qquad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \sigma\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu\boldsymbol{\nu}, \qquad \sigma\boldsymbol{\nu} = \{\sigma_{ij}\nu_j\}_{i=1}^2.$$

При этом уравнения (2) — уравнения равновесия, соотношения (3) представляют собой закон Гука, краевое условие (4) соответствует закреплению упругого тела на Γ_0, а краевые условия (5) описывают контакт упругого тела с недеформируемой поверхностью при нулевом трении и называются краевыми условиями Синьорини. Все величины с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и т. д.), по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Известно, что задача (2)–(5) допускает вариационную постановку и имеет единственное решение. Действительно, рассмотрим пространство функций Соболева

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega_1) = \{\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega_1) \mid \boldsymbol{v} = 0 \text{ на } \Gamma_0\}$$

и множество допустимых перемещений

$$K = \{\boldsymbol{v} \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega_1) \mid \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \geqslant 0 \text{ п.в. на } \Gamma_c\}.$$

Тогда задача (2)–(5) эквивалентна минимизации функционала

$$\Pi_0(\Omega_1;\boldsymbol{v})=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_1}\sigma(\boldsymbol{v})\varepsilon(\boldsymbol{v})-\int\limits_{\Omega_1}\boldsymbol{f}\boldsymbol{v}$$

на множестве K и может быть записана в виде вариационного неравенства

$$\boldsymbol{u}^0\in K,\qquad \int\limits_{\Omega_1}\sigma(\boldsymbol{u}^0)\varepsilon(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^0)\geqslant\int\limits_{\Omega_1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^0)\qquad\forall\boldsymbol{v}\in K. \tag{7}$$

Здесь и далее $\sigma(\boldsymbol{v})=C^1\varepsilon(\boldsymbol{v})$.

Наряду с контактной задачей (2)–(5) рассмотрим задачу о равновесии упругого тела, содержащего трещину на линии раздела сред. Добавляя к области Ω_1 ограниченную область Ω_2 с липшицевой границей Γ_2 и решая в области $\Omega_c=\Omega_1\cup\Omega_2\cup(\Sigma\setminus\Gamma_c)$ краевую задачу с нелинейными краевыми условиями на Γ_c, можно установить существование инвариантных интегралов в задаче о равновесии анизотропного упругого тела с трещиной на линии раздела сред. Здесь $\Sigma=\Sigma_0\setminus\partial\Sigma_0$; $\Sigma_0=\Gamma_1\cap\Gamma_2$. Получаемая при этом задача описывает равновесие упругого тела, занимающего область Ω_c и имеющего трещину Γ_c, с краевыми условиями непроникания берегов $\Gamma_c^{\pm}$. Фактически мы будем рассматривать семейство краевых задач, зависящих от параметра λ. При этом каждому значению параметра $\lambda>0$ будет соответствовать задача о равновесии тела с трещиной, значению $\lambda=0$ — задача (2)–(5). Существование инвариантных интегралов будет установлено одновременно для всего семейства задач, т. е. при всех $\lambda>0$. Переходя к пределу при $\lambda\to 0$, установим существование инвариантных интегралов и для контактной задачи (2)–(5).

Для контактной задачи (2)–(5) добавленная область Ω_2 названа фиктивной. Как будет показано ниже, коэффициенты оператора задачи в области Ω_2 будут стремиться к бесконечности при стремлении λ к нулю.

Прежде чем перейти к реализации указанной схемы, уточним геометрию областей Ω_1, Ω_2. Будем предполагать, что точки $(0,0)$, $(1,0)$ являются внутренними точками кривой Σ (это предположение не относится к примерам 3, 4, где рассматривается другая геометрия областей). Что же касается гладкости границ Γ_1, Γ_2, то достаточно выполнения условия Липшица. Отметим, что будет установлено существование инвариантных интегралов разных типов и для областей разной геометрии. В каждом двумерном случае необходимо интегрировать по (произвольной) гладкой кривой, в трехмерном случае — по двумерным поверхностям.

Итак, введем тензор $B^\lambda=\{b^\lambda_{ijkl}\}$, $\lambda>0$, $i,j,k,l=1,2$,

$$b^\lambda_{ijkl}=\begin{cases} c^1_{ijkl} & \text{в } \Omega_1,\\ \lambda^{-1}c^2_{ijkl} & \text{в } \Omega_2.\end{cases}$$

Здесь тензор $C^2=\{c^2_{ijkl}\}$ обладает такими же свойствами, что и тензор C^1. В области Ω_c, имеющей трещину-разрез Γ_c, будем решать следующую задачу. Требуется найти функции $\boldsymbol{u}^\lambda=(u_1^\lambda,u_2^\lambda)$, $\sigma^\lambda=\{\sigma^\lambda_{ij}\}$ $(i,j=1,2)$ такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma^\lambda=\boldsymbol{f}\qquad\text{в}\quad\Omega_c; \tag{8}$$

$$\sigma^\lambda=B^\lambda\varepsilon(\boldsymbol{u}^\lambda)\qquad\text{в}\quad\Omega_c; \tag{9}$$

$$\boldsymbol{u}^\lambda=0\qquad\text{на}\quad\Gamma; \tag{10}$$

$$[\boldsymbol{u}^\lambda]\cdot\boldsymbol{\nu}\geqslant 0,\quad [\sigma^\lambda_\nu]=0,\quad \sigma^\lambda_\nu\leqslant 0,\quad \boldsymbol{\sigma}^\lambda_\tau=0,\quad [\boldsymbol{u}^\lambda]\cdot\boldsymbol{\nu}\sigma^\lambda_\nu=0\qquad\text{на}\quad\Gamma_c. \tag{11}$$

Здесь $[\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{v}^-$ — скачок функции $\boldsymbol{v}$ на Γ_c (знаки “+” и “−” соответствуют положительному и отрицательному направлениям нормали $\boldsymbol{\nu}$); Γ — внешняя граница области Ω_c, т. е. $\Gamma = \partial\Omega_c \setminus (\Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-)$; $\sigma_\nu^\lambda = \sigma_{ij}^\lambda \nu_j \nu_i$; $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\lambda = \sigma^\lambda \boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu^\lambda \boldsymbol{\nu}$. Равенство $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\lambda = 0$ на Γ_c означает, что $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\lambda = 0$ на $\Gamma_c^\pm$.

Каждое значение параметра $\lambda > 0$ соответствует задаче о равновесии тела с трещиной на линии раздела анизотропных частей, занимающих области Ω_1, Ω_2 с постоянными тензорами упругости C^1, C^2/λ. Рассмотрим случай $\lambda > 0$ и предельный случай $\lambda = 0$.

Задача (8)–(11) при каждом $\lambda > 0$ имеет единственное решение. Действительно, рассмотрим пространство функций

$$H^1_\Gamma(\Omega_c) = \{\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega_c) \mid \boldsymbol{v} = 0 \text{ на } \Gamma\}$$

и множество допустимых перемещений

$$K_c = \{\boldsymbol{v} \in H^1_\Gamma(\Omega_c) \mid [\boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{\nu} \geqslant 0 \text{ п.в. на } \Gamma_c\}.$$

Тогда задача (8)–(11) эквивалентна минимизации функционала

$$\Pi_\lambda(\Omega_c; \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_c} \sigma^\lambda(\boldsymbol{v}) \varepsilon(\boldsymbol{v}) - \int\limits_{\Omega_c} \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}$$

на множестве K_c и может быть сформулирована в виде вариационного неравенства

$$\boldsymbol{u}^\lambda \in K_c, \qquad \int\limits_{\Omega_c} \sigma^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda) \varepsilon(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^\lambda) \geqslant \int\limits_{\Omega_c} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^\lambda) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in K_c. \tag{12}$$

Здесь $\sigma^\lambda(\boldsymbol{v})$ определяются из уравнения вида (9), т. е. $\sigma^\lambda(\boldsymbol{v}) = B^\lambda \varepsilon(\boldsymbol{v})$.

Цель дальнейших рассуждений — ввести возмущение задачи (12), т. е. рассмотреть семейство возмущенных задач, зависящих от параметра δ и определенных в возмущенной области Ω_c^δ. При каждом фиксированном λ и малом δ будут найдены решение возмущенной задачи $\boldsymbol{u}^{\lambda\delta}$ и производная функционала энергии $\Pi_\lambda(\Omega_c^\delta; \boldsymbol{u}^{\lambda\delta})$ по параметру δ при $\delta = 0$. Полученная формула для производной при подходящем выборе возмущений будет давать инвариантные интегралы в задаче (8)–(11). Затем перейдем к пределу в формуле для указанной производной при $\lambda \to 0$. Важно заметить, что формула для отмеченной производной функционала энергии будет содержать (невозмущенное по δ) решение $\boldsymbol{u}^\lambda$. Кроме того, $\boldsymbol{u}^\lambda$ будут сходиться к $\boldsymbol{u}^0$ при $\lambda \to 0$, где $\boldsymbol{u}^0$ — решение задачи (7), что и позволяет перейти к пределу при $\lambda \to 0$ в формуле для указанной производной. Итоговая формула приводит к инвариантным интегралам для задачи (2)–(5) при соответствующем выборе указанных возмущений.

Рассмотрим возмущение области Ω_c, и в возмущенной области Ω_c^δ будем искать решение задачи. Пусть преобразование независимых переменных

$$y = \Psi_\delta(x), \qquad x \in \Omega_c, \quad y \in \Omega_c^\delta \tag{13}$$

описывает возмущение области Ω_c, где $\Psi_\delta(x) = x + \delta \boldsymbol{V}(x)$; $\boldsymbol{V}(x) = (V_1(x), V_2(x)) \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$. При малых δ преобразование (13) устанавливает взаимно однозначное соответствие между Ω_c и Ω_c^δ. Будем предполагать, что векторное поле $\boldsymbol{V}(x)$ таково, что

$$\boldsymbol{\nu}^\delta(y) = \boldsymbol{\nu}(x), \qquad y = \Psi_\delta(x), \tag{14}$$

где $\boldsymbol{\nu}^\delta(y)$ — нормаль к возмущенному разрезу $\Gamma_c^\delta = \Psi_\delta(\Gamma_c)$. При каждом δ получаем возмущенную область Ω_c^δ и возмущенную (по отношению к (8)–(11)) краевую задачу, которая формулируется следующим образом. Требуется найти функции $\boldsymbol{u}^{\lambda\delta} = (u_1^{\lambda\delta}, u_2^{\lambda\delta})$, $\sigma^{\lambda\delta} = \{\sigma_{ij}^{\lambda\delta}\}$ $(i, j = 1, 2)$ такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma^{\lambda\delta} = \boldsymbol{f} \qquad \text{в} \quad \Omega_c^\delta; \tag{15}$$

$$\sigma^{\lambda\delta} = B^{\lambda\delta}\varepsilon(\boldsymbol{u}^{\lambda\delta}) \qquad \text{в} \quad \Omega_c^\delta; \tag{16}$$

$$\boldsymbol{u}^{\lambda\delta} = 0 \qquad \text{на} \quad \Psi_\delta(\Gamma); \tag{17}$$

$$[\boldsymbol{u}^{\lambda\delta}]\cdot\boldsymbol{\nu} \geqslant 0, \quad [\sigma_\nu^{\lambda\delta}] = 0, \quad \sigma_\nu^{\lambda\delta} \leqslant 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^{\lambda\delta} = 0, \quad [\boldsymbol{u}^{\lambda\delta}]\cdot\boldsymbol{\nu}\sigma_\nu^{\lambda\delta} = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma_c^\delta. \tag{18}$$

Будем считать, что в (16) коэффициенты $b_{ijkl}^{\lambda\delta}$ определяются в Ω_c^δ с сохранением свойств гладкости при отображении (13), т. е. остаются кусочно-постоянными:

$$b_{ijkl}^{\lambda\delta} = \begin{cases} c_{ijkl}^1 & \text{на } \Psi_\delta(\Omega_1), \\ \lambda^{-1}c_{ijkl}^2 & \text{на } \Psi_\delta(\Omega_2). \end{cases}$$

Пусть $\boldsymbol{u}^{\lambda\delta}$ — решение задачи (15)–(18) из пространства $H^1(\Omega_c^\delta)$. Это решение можно определить по следующей схеме. Рассмотрим множество допустимых перемещений в задаче (15)–(18):

$$K_c^\delta = \{\boldsymbol{v} \in H^1_{\Psi_\delta(\Gamma)}(\Omega_c^\delta) \mid [\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{\nu} \geqslant 0 \text{ п.в. на } \Gamma_c^\delta\}.$$

Введем обозначение

$$\Pi_\lambda(\Omega_c^\delta; \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_c^\delta} \sigma^{\lambda\delta}(\boldsymbol{v})\varepsilon(\boldsymbol{v}) - \int\limits_{\Omega_c^\delta} \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}$$

и рассмотрим задачу минимизации

$$\min_{v\in K_c^\delta} \Pi_\lambda(\Omega_c^\delta; \boldsymbol{v}). \tag{19}$$

Решение задачи (19) существует и определяется из вариационного неравенства

$$\boldsymbol{u}^{\lambda\delta} \in K_c^\delta, \quad \int\limits_{\Omega_c^\delta} \sigma^{\lambda\delta}(\boldsymbol{u}^{\lambda\delta})\varepsilon(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^{\lambda\delta}) \geqslant \int\limits_{\Omega_c^\delta} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^{\lambda\delta}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in K_c^\delta. \tag{20}$$

Предположим, что $\boldsymbol{V}(x) = (V_1(x), 0)$, а функция V_1 такова, что $\Psi_\delta(\Gamma) = \Gamma$ и выполнено условие (14). В этом случае отображение (13) устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами $H^1_\Gamma(\Omega_c)$ и $H^1_\Gamma(\Omega_c^\delta)$, а также между множествами K_c и K_c^δ. Определим функционал энергии в задаче (20)

$$\Pi_\lambda(\Omega_c^\delta; \boldsymbol{u}^{\lambda\delta}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_c^\delta} \sigma^{\lambda\delta}(\boldsymbol{u}^{\lambda\delta})\varepsilon(\boldsymbol{u}^{\lambda\delta}) - \int\limits_{\Omega_c^\delta} \boldsymbol{f}\boldsymbol{u}^{\lambda\delta}$$

и введем обозначение

$$I^\lambda = \frac{d}{d\delta}\Pi_\lambda(\Omega_c^\delta; \boldsymbol{u}^{\lambda\delta})\big|_{\delta=0}$$

для производной функционала энергии по параметру δ. Согласно [6, 7] имеем

$$I^\lambda = \int\limits_{\Omega_c} \Big\{\frac{1}{2}\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{V}b_{ijkl}^\lambda)\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)E_{ij}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x}; \boldsymbol{u}^\lambda\Big)\Big\} - \int\limits_{\Omega_c} \mathrm{div}\,(\boldsymbol{V}f_i)u_i^\lambda. \tag{21}$$

Здесь $E_{ij}(\Phi; \boldsymbol{v}) = (v_{i,k}\Phi_{kj} + v_{j,k}\Phi_{ki})/2$; $\Phi = \{\Phi_{ij}\}$ $(i,j = 1,2)$. Заметим, что в силу сделанного предположения о векторном поле $\boldsymbol{V}$ нет необходимости дифференцировать по x_2

коэффициенты b_{ijkl}^{λ}, которые, вообще говоря, имеют разрыв вдоль кривой Σ. Формулу для I^{λ} запишем в виде $I^{\lambda} = I_1^{\lambda} + I_2^{\lambda}$, где

$$\begin{aligned} I_1^{\lambda} &= \int\limits_{\Omega_1} \Big\{ \frac{1}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{V} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^{\lambda}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^{\lambda}) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^{\lambda}) E_{ij}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}; \boldsymbol{u}^{\lambda}\Big)\Big\} - \int\limits_{\Omega_1} \operatorname{div}(\boldsymbol{V} f_i) u_i^{\lambda}, \\ I_2^{\lambda} &= \int\limits_{\Omega_2} \Big\{ \frac{1}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{V} \sigma_{ij}^{\lambda}(\boldsymbol{u}^{\lambda}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^{\lambda}) - \sigma_{ij}^{\lambda}(\boldsymbol{u}^{\lambda}) E_{ij}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}; \boldsymbol{u}^{\lambda}\Big)\Big\} - \int\limits_{\Omega_2} \operatorname{div}(\boldsymbol{V} f_i) u_i^{\lambda}. \end{aligned} \qquad (22)$$

Как известно (см. [8, 9]), при $\lambda \to 0$

$$\boldsymbol{u}^{\lambda}/\sqrt{\lambda} \to 0 \qquad \text{сильно в} \quad H^1(\Omega_2); \qquad (23)$$

$$\boldsymbol{u}^{\lambda} \to \boldsymbol{u}^0 \qquad \text{сильно в} \quad H^1(\Omega_1), \qquad (24)$$

где $\boldsymbol{u}^0$ — решение задачи (2)–(5) (или задачи (7)). Из (23) следует

$$|\nabla \boldsymbol{u}^{\lambda}|^2/\lambda \to 0 \qquad \text{сильно в} \quad L^1(\Omega_2), \quad \lambda \to 0. \qquad (25)$$

Тогда из (21) с учетом (22), (24), (25) находим $I^0 = \lim_{\lambda \to 0} I^{\lambda}$, т. е. имеем

$$I^0 = \int\limits_{\Omega_1} \Big\{ \frac{1}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{V} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^0) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0) E_{ij}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}; \boldsymbol{u}^0\Big)\Big\} - \int\limits_{\Omega_1} \operatorname{div}(\boldsymbol{V} f_i) u_i^0. \qquad (26)$$

Отметим, что в формуле (26) функция $\boldsymbol{u}^0$ является решением задачи (2)–(5).

Инвариантные интегралы в задачах (2)–(5) и (8)–(11) будут получены из формул (26) и (21) соответственно. Поскольку компоненты тензора напряжений не определяются, вообще говоря, в области Ω_2 при $\lambda = 0$, соответствующие инвариантные интегралы для задач (2)–(5) и (8)–(11) будут выписываться отдельно.

Рассмотрим теперь конкретные случаи выбора векторного поля $\boldsymbol{V}$, которые посредством преобразования формул (21), (26) и приведут к инвариантным интегралам. Во всех примерах нам придется выбирать окрестности S_1, S_2 с гладкими (липшицевыми) границами ∂S_1, ∂S_2. В дальнейшем будем считать, что границы областей $(S_1 \setminus S_2) \cap \Omega_c$ также удовлетворяют условию Липшица.

Пример 1. Пусть носитель функции θ лежит в малой окрестности S_1 точки $(1, 0)$ и $\theta = 1$ в окрестности S_2 точки $(1, 0)$, $S_2 \subset S_1$. Малость окрестности S_1 означает, что ∂S_1 пересекает ось x_1 по прямолинейным участкам (1). Возмущение (13) выберем в виде

$$y_1 = x_1 + \delta\theta(x_1, x_2), \qquad y_2 = x_2,$$

где $(x_1, x_2) \in \Omega_c$; $(y_1, y_2) \in \Omega_c^{\delta}$. При этом векторное поле $\boldsymbol{V}(x)$ определяется по формуле $\boldsymbol{V}(x) = (\theta(x), 0)$, а (21) можно переписать в виде

$$I^{\lambda} = \int\limits_{\Omega_c} \Big\{ \frac{1}{2} \theta_{,1} \sigma_{ij}^{\lambda}(\boldsymbol{u}^{\lambda}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^{\lambda}) - \sigma_{ij}^{\lambda}(\boldsymbol{u}^{\lambda}) u_{i,1}^{\lambda} \theta_{,j} \Big\} - \int\limits_{\Omega_c} (\theta f_i)_{,1} u_i^{\lambda}. \qquad (27)$$

Из (27) после интегрирования по частям следует

$$I^{\lambda} = \int\limits_{(\partial S_2) \cap \overline{\Omega}_c} \Big\{ \frac{1}{2} n_1 \sigma_{ij}^{\lambda}(\boldsymbol{u}^{\lambda}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^{\lambda}) - \sigma_{ij}^{\lambda}(\boldsymbol{u}^{\lambda}) u_{i,1}^{\lambda} n_j \Big\} + \int\limits_{(S_1 \setminus S_2) \cap \Omega_c} \theta(\sigma_{ij,j}^{\lambda} + f_i) u_{i,1}^{\lambda} + \int\limits_{S_2 \cap \Omega_c} f_i u_{i,1}^{\lambda}. \qquad (28)$$

Здесь $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ — внутренняя нормаль к границе ∂S_2, а $(\partial S_2) \cap \overline{\Omega}_c$ — замкнутая кривая, окружающая вершину трещины $(1, 0)$. Важно отметить, что решение $\boldsymbol{u}^{\lambda}$ задачи (8)–(11)

является H^2-гладким вплоть до точек $(1-\delta_0, 1)\times\{0\}$ и $(1, 1+\delta_0)\times\{0\}$ (см. [5, с. 100]), что обеспечивает сходимость входящих в (28) интегралов. Кроме того, отметим, что если часть кривой $(\partial S_2)\cap\overline{\Omega}_c$ лежит на отрезке $(1-\delta_0, 1)\times\{0\}$, то в (28) можно интегрировать по любому берегу разреза. Это связано с наличием краевых условий

$$\sigma_{12}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda) = [\sigma_{22}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)] = 0, \qquad \sigma_{22}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)[u_{2,1}^\lambda] = 0 \quad \text{на} \quad (1-\delta_0, 1)\times\{0\}. \tag{29}$$

Действительно, условия $\sigma_{12}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda) = 0$, $[\sigma_{22}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)] = 0$ на $(1-\delta_0, 1)\times\{0\}$ совпадают с условиями $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\lambda = 0$, $[\sigma_\nu^\lambda] = 0$ (см. (11)), а доказательство второго соотношения (29) можно найти в [5, с. 276].

Предположим, что $\boldsymbol{f} \equiv 0$ в $S_2 \cap \Omega_c$. Учитывая справедливость уравнений равновесия (8) в Ω_c, из (28) получим инвариантный интеграл для задачи (8)–(11):

$$I^\lambda = \int\limits_{(\partial S_2)\cap\overline{\Omega}_c} \Big\{\frac{1}{2}\, n_1 \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda) u_{i,1}^\lambda n_j\Big\},$$

который не зависит от выбора кривой $(\partial S_2)\cap\overline{\Omega}_c$. Рассуждая аналогично, при тех же условиях на $\boldsymbol{f}$ из (26) получаем инвариантный интеграл для задачи (2)–(5):

$$I^0 = \int\limits_{(\partial S_2)\cap\Omega_1} \Big\{\frac{1}{2}\, n_1 \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^0) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0) u_{i,1}^0 n_j\Big\}. \tag{30}$$

Кривая $(\partial S_2)\cap\Omega_1$ является в данном случае произвольной “шапочкой”, лежащей в Ω_1 и окружающей точку $(1, 0)$.

При выводе (30) из (26) важно отметить справедливость краевого условия

$$\sigma_{22}(\boldsymbol{u}^0) u_{2,1}^0 = 0 \quad \text{на} \quad (1-\delta_0, 1)\times\{0\}, \tag{31}$$

а также H^2-гладкость решения $\boldsymbol{u}^0$ вплоть до точек $(1-\delta_0, 1)\times\{0\}$. Указанная гладкость решения $\boldsymbol{u}^0$ контактной задачи (2)–(5) доказана в [17], а справедливость краевого условия (31) может быть установлена аналогично второму соотношению в (29).

Инвариантный интеграл по кривой, лежащей в Ω_1 и окружающей точку $(0, 0)$, также существует и имеет вид (30).

Пример 2. Пусть θ — гладкая функция с носителем в малой окрестности S_1 кривой Γ_c. Более того, $\theta = 1$ в окрестности S_2 кривой Γ_c, $S_2 \subset S_1$. Рассмотрим возмущение (13) в виде

$$y_1 = x_1 + \delta\theta(x), \qquad y_2 = x_2,$$

где $(x_1, x_2) \in \Omega_c$, $(y_1, y_2) \in \Omega_c^\delta$. Как и в примере 1, имеем $\boldsymbol{V}(x) = (\theta(x), 0)$, и формула (21) будет совпадать с (27).

Предполагая, что $\boldsymbol{f} \equiv 0$ в $S_2 \cap \Omega_c$, осуществим интегрирование по частям в (27). Получим инвариантный интеграл для задачи (8)–(11):

$$I^\lambda = \int\limits_{(\partial S_2)\cap\overline{\Omega}_c} \Big\{\frac{1}{2}\, n_1 \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) u_{i,1}^\lambda n_j\Big\},$$

где $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ — внутренняя нормаль к ∂S_2. В данном случае $(\partial S_2)\cap\overline{\Omega}_c$ — кривая, лежащая в $\overline{\Omega}_c$ и окружающая Γ_c.

Для задачи (2)–(5) инвариантный интеграл получается при том же выборе $\boldsymbol{V}(x)$ в (26) и имеет вид

$$I^0 = \int\limits_{(\partial S_2)\cap\Omega_1} \Big\{\frac{1}{2}\, n_1 \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^0) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0) u_{i,1}^0 n_j\Big\}.$$

Теперь рассмотрим другую геометрию областей Ω_1, Ω_2.

Пример 3. Пусть ограниченная область Ω_1 имеет вид полосы. Будем считать, что Ω_1 имеет границу, состоящую из частей Γ_0 и Γ_c вида

$$\Gamma_0 = ((0,1)\times\{0\}) \cup ((0,1)\times\{1\}) \cup (\{0\}\times[0,1]),$$
$$\Gamma_c = \{(x_1,x_2) \mid x_1 = \psi(x_2),\ x_2 \in [0,1]\}.$$

Предполагается, что функция ψ удовлетворяет условию Липшица; $0 < \psi(x_2) < 2$, $x_2 \in [0,1]$. Область Ω_2 также имеет вид ограниченной полосы с границей

$$\Gamma_2 = \Gamma_c \cup ((1,2)\times\{0\}) \cup ((1,2)\times\{1\}) \cup (\{2\}\times[0,1]).$$

Пусть гладкая функция θ обращается в нуль вне некоторой окрестности S_1 кривой Γ_c и существует окрестность S_2 кривой Γ_c, где $\theta = 1$, $S_2 \subset S_1$. Рассмотрим преобразование $y = \Psi_\delta(x)$ следующего вида:

$$y_1 = x_1 + \delta\theta(x), \qquad y_2 = x_2.$$

Здесь $(x_1,x_2) \in \Omega_c$; $(y_1,y_2) \in \Omega_c^\delta$. Как и ранее, $\Omega_c = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Sigma \setminus \Gamma_c)$. Очевидно, что $\Sigma \setminus \Gamma_c = \varnothing$, где $\Sigma = \Sigma_0 \setminus \partial\Sigma_0$, $\Sigma_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, так что в данном случае $\Omega_c = \Omega_1 \cup \Omega_2$. На множестве Ω_c можно решить задачу вида (12) и найти решение $\boldsymbol{u}^\lambda$, а затем на возмущенном множестве Ω_c^δ решить задачу отыскания $\boldsymbol{u}^{\lambda\delta} = (u_1^{\lambda\delta}, u_2^{\lambda\delta})$, $\sigma^{\lambda\delta} = \{\sigma_{ij}^{\lambda\delta}\}$ $(i,j=1,2)$ таких, что

$$-\operatorname{div}\sigma^{\lambda\delta} = \boldsymbol{f} \qquad \text{в} \quad \Omega_c^\delta,$$
$$\sigma^{\lambda\delta} = B^\lambda\varepsilon(\boldsymbol{u}^{\lambda\delta}) \qquad \text{в} \quad \Omega_c^\delta,$$
$$\boldsymbol{u}^{\lambda\delta} = 0 \qquad \text{на} \quad (\partial\Omega_1^\delta \cup \partial\Omega_2^\delta) \setminus \Psi_\delta(\Gamma_c)^\pm,$$
$$[\boldsymbol{u}^{\lambda\delta}]\cdot\boldsymbol{\nu} \geqslant 0, \quad [\sigma_\nu^{\lambda\delta}] = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\nu^{\lambda\delta} \leqslant 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^{\lambda\delta} = 0, \quad [\boldsymbol{u}^{\lambda\delta}]\cdot\boldsymbol{\nu}\sigma_\nu^{\lambda\delta} = 0 \qquad \text{на} \quad \Psi_\delta(\Gamma_c).$$

Здесь $\boldsymbol{\nu}$ — внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega_1$, определенная на Γ_c; $\Omega_i^\delta = \Psi_\delta(\Omega_i)$ $(i=1,2)$. Отметим, что в данном случае $\boldsymbol{\nu}^\delta = \Psi_\delta(\boldsymbol{\nu})$. Множество Ω_c и возмущенное множество Ω_c^δ не являются областями, так как их связность нарушена. Можно найти производную I^λ функционала энергии в виде (21) и векторное поле $\boldsymbol{V}(x) = (\theta(x), 0)$. Следовательно, формулу (21) можно записать в виде (27). Интегрируя по частям в (27) и предполагая, что $\boldsymbol{f} \equiv 0$ в $S_2 \cap \Omega_c$, получаем инвариантный интеграл для задачи (8)–(11):

$$I^\lambda = \int\limits_{(\partial S_2)\cap\overline{\Omega}_c} \Big\{\frac{1}{2}\,n_1\sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)u_{i,1}^\lambda n_j\Big\},$$

где $\boldsymbol{n} = (n_1,n_2)$ — внутренняя нормаль к ∂S_2.

Рассуждая аналогично, из формулы (26) получаем инвариантный интеграл для контактной задачи (2)–(5):

$$I^0 = \int\limits_{(\partial S_2)\cap\Omega_1} \Big\{\frac{1}{2}\,n_1\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^0) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0)u_{i,1}^0 n_j\Big\}.$$

В данном случае $(\partial S_2) \cap \Omega_1$ — гладкая кривая, соединяющая верхний и нижний берега полосы Ω_1.

Пример 4. Пусть область Ω_1 имеет вид конуса и при этом

$$\Gamma_c = \{(r,\varphi) \mid 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0,\ r = q_0(\varphi),\ q_0 > 0,\ q_0 \in C^{0,1}\},$$
$$\Gamma_0 = \{(r,\varphi) \mid \varphi = 0,\ 0 \leqslant r \leqslant q_0(0)\} \cup \{(r,\varphi) \mid \varphi = \varphi_0,\ 0 \leqslant r \leqslant q_0(\varphi_0)\}.$$

Здесь (r, φ) — полярные координаты на плоскости. Выберем гладкую функцию θ, равную нулю вне некоторой малой окрестности S_1 кривой Γ_c. Пусть $\theta = 1$ в окрестности S_2 кривой Γ_c, $S_2 \subset S_1$. Область Ω_2 выбрана следующим образом:

$$\Omega_2 = \{(r, \varphi) \mid 0 < \varphi < \varphi_0,\ q_0(\varphi) < r < q_1(\varphi),\ q_1 \in C^{0,1}\}.$$

Определим (несвязное) множество $\Omega_c = \Omega_1 \cup \Omega_2$ и рассмотрим возмущение множества Ω_c вида

$$y_1 = x_1(1 + \delta\theta(x)), \qquad y_2 = x_2(1 + \delta\theta(x)), \qquad x \in \Omega_c, \quad y \in \Omega_c^\delta. \tag{32}$$

Как и ранее, получим формулу для производной функционала энергии в возмущенной задаче (15)–(18):

$$I^\lambda = \int\limits_{\Omega_c} \Big\{\frac{1}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{V} \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda) E_{ij}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}; \boldsymbol{u}^\lambda\Big)\Big\} - \int\limits_{\Omega_c} \operatorname{div}(\boldsymbol{V} f_i) u_i^\lambda.$$

Находим векторное поле для возмущения (32):

$$\boldsymbol{V}(x) = (\theta(x)x_1, \theta(x)x_2).$$

Далее заметим, что это векторное поле обеспечивает равенство

$$\int\limits_{S_2 \cap \Omega_c} \Big\{\frac{1}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{V} \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda) E_{ij}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}; \boldsymbol{u}^\lambda\Big)\Big\} = 0.$$

Таким образом, считая, что $\boldsymbol{f} \equiv 0$ в $S_2 \cap \Omega_c$, получим

$$I^\lambda = \int\limits_{(S_1 \setminus S_2) \cap \Omega_c} \Big\{\frac{1}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{V} \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda) E_{ij}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}; \boldsymbol{u}^\lambda\Big)\Big\} - \int\limits_{(S_1 \setminus S_2) \cap \Omega_c} \operatorname{div}(\boldsymbol{V} f_i) u_i^\lambda.$$

Подставляя в это равенство значения поля $\boldsymbol{V}(x)$, найдем

$$I^\lambda = \int\limits_{(S_1 \setminus S_2) \cap \Omega_c} \Big\{\frac{1}{2} (\theta_{,l} x_l) \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)(u_{i,l}^\lambda x_l)\theta_{,j}\Big\} - \int\limits_{(S_1 \setminus S_2) \cap \Omega_c} (x_l \theta f_i)_{,l} u_i^\lambda. \tag{33}$$

Проинтегрируем по частям в (33), освобождаясь от производных функции θ в первом интеграле и сбрасывая на u_i^λ производные во втором интеграле. Заметим, что после интегрирования по частям сумма интегралов по $(S_1 \setminus S_2) \cap \Omega_c$ будет равна нулю, и, следовательно, приходим к инвариантному интегралу по $(\partial S_2) \cap \overline{\Omega}_c$ в задаче (8)–(11):

$$I^\lambda = \int\limits_{(\partial S_2) \cap \overline{\Omega}_c} \Big\{\frac{1}{2} (n_l x_l) \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)(u_{i,l}^\lambda x_l) n_j\Big\},$$

где $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ — внутренняя нормаль к границе ∂S_2. Вид этого инвариантного интеграла отличается от предыдущих.

Для контактной задачи (2)–(5) инвариантный интеграл имеет вид

$$I^0 = \int\limits_{(\partial S_2) \cap \Omega_1} \Big\{\frac{1}{2} (n_l x_l) \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^0) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0)(u_{i,l}^0 x_l) n_j\Big\}.$$

Трехмерный случай. Рассмотрим контактную задачу в ограниченной односвязной области $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей Γ_1. Пусть $\Gamma_c \subset \Gamma_1$ — контактная граница, т. е. часть границы, на которой выполнены краевые условия Синьорини; $\Gamma_0 = \Gamma_1 \setminus \Gamma_c$,

$\operatorname{meas}\Gamma_0 > 0$. Для простоты предполагаем, что Γ_c как двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$ может быть записана в виде графика функции

$$x_3 = \phi(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \overline{D}$$

с достаточно гладкой функцией ϕ. Здесь $D \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная односвязная область с границей γ_0 класса $C^{0,1}$, причем γ_0 как кривая в $\mathbb{R}^3$ может быть записана в виде

$$\gamma_0 = \{(r, \varphi, 0) \mid r = g(\varphi),\ \varphi \in [0, 2\pi],\ g(0) = g(2\pi),\ g > 0,\ g \in C^{0,1}\}$$

и, более того, существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\{(r, \varphi, 0) \mid g(\varphi) - \delta_0 < r < g(\varphi) + \delta_0\} \subset \Gamma_1. \tag{34}$$

Здесь (r, φ, ξ) — цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$. Условие (34) означает, что вблизи края γ_0 контактной границы Γ_c имеется плоский участок, принадлежащий границе Γ_1.

Постановка контактной задачи в области Ω_1 состоит в следующем. Требуется найти функции $\boldsymbol{u}^0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ такие, что

$$\begin{gathered} -\operatorname{div}\sigma = \boldsymbol{f} \qquad \text{в} \quad \Omega_1, \\ \sigma = C^1\varepsilon(\boldsymbol{u}^0) \qquad \text{в} \quad \Omega_1, \\ \boldsymbol{u}^0 = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma_0, \\ \boldsymbol{u}^0 \cdot \boldsymbol{\nu} \geqslant 0, \quad \sigma_\nu \leqslant 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = 0, \quad \boldsymbol{u}^0 \cdot \boldsymbol{\nu}\sigma_\nu = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma_c. \end{gathered} \tag{35}$$

Здесь $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — внутренняя нормаль к $\partial\Omega_1$ на Γ_c; $C^1 = \{c_{ijkl}^1\}$ $(i, j, k, l = 1, 2, 3)$ — тензор модулей упругости, обладающий такими же свойствами, как в двумерном случае (см. (6)); $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3) \in C_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$. Остальные обозначения такие же, как и ранее.

Задача (35) допускает вариационную формулировку и может быть записана в виде вариационного неравенства. Обозначим

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega_0) = \{\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in H^1(\Omega_c) \mid \boldsymbol{v} = 0 \ \text{ на } \Gamma_0\},$$

$$K = \{\boldsymbol{v} \in H_\Gamma^1(\Omega_c) \mid [\boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{\nu} \geqslant 0 \text{ п.в. на } \Gamma_c\}.$$

Существует решение вариационного неравенства

$$\boldsymbol{u}^0 \in K, \qquad \int\limits_{\Omega_1} \sigma(\boldsymbol{u}^0)\varepsilon(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^0) \geqslant \int\limits_{\Omega_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^0) \quad \forall v \in K.$$

Как и в двумерном случае, построим ограниченную область Ω_2 с липшицевой границей Γ_2. Пусть $\Omega_c = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Sigma \setminus \Gamma_c)$, $\Sigma = \Sigma_0 \setminus \partial\Sigma_0$, $\Sigma_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Фактически мы предполагаем, что существует область в $\mathbb{R}^3$, которая делится регулярной поверхностью Σ_0 на две подобласти Ω_1, Ω_2, при этом $\Gamma_c \subset \Sigma_0$. Внешнюю границу области Ω_c (т. е. $\partial\Omega_c \setminus \Gamma_c^\pm$) обозначим через Γ. Геометрия областей Ω_1, Ω_2 предполагается такой, что разрез Γ_c не выходит на внешнюю границу Γ, т. е. $\Gamma_c \cap \Gamma = \emptyset$. Это предположение не относится к примерам 7, 8.

Положим $B^\lambda = \{b_{ijkl}^\lambda\}$, $\lambda > 0$, $i, j, k, l = 1, 2, 3$,

$$b_{ijkl}^\lambda = \begin{cases} c_{ijkl}^1 & \text{в } \Omega_1, \\ \lambda^{-1}c_{ijkl}^2 & \text{в } \Omega_2, \end{cases}$$

где тензор $C^2 = \{c_{ijkl}^2\}$ обладает такими же свойствами, как и C^1. В области Ω_c с разрезом Γ_c можно найти решение семейства задач, зависящих от параметра $\lambda > 0$, а именно:

для каждого $\lambda > 0$ требуется найти функции $\boldsymbol{u}^\lambda = (u_1^\lambda, u_2^\lambda, u_3^\lambda)$, $\sigma^\lambda = \{\sigma_{ij}^\lambda\}$ $(i,j = 1,2,3)$ такие, что

$$\begin{gathered} -\operatorname{div}\sigma^\lambda = \boldsymbol{f} \qquad \text{в} \quad \Omega_c, \\ \sigma^\lambda = B^\lambda \varepsilon(\boldsymbol{u}^\lambda) \qquad \text{в} \quad \Omega_c, \\ \boldsymbol{u}^\lambda = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma, \\ [\boldsymbol{u}^\lambda]\cdot\boldsymbol{\nu} \geqslant 0, \quad [\sigma_\nu^\lambda] = 0, \quad \sigma_\nu^\lambda \leqslant 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^\lambda = 0, \quad [\boldsymbol{u}^\lambda]\cdot\boldsymbol{\nu}\sigma_\nu^\lambda = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma_c. \end{gathered} \tag{36}$$

Пусть

$$H_\Gamma^1(\Omega_c) = \{\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in H^1(\Omega_c) \mid \boldsymbol{v} = 0 \text{ на } \Gamma\},$$
$$K_c = \{\boldsymbol{v} \in H_\Gamma^1(\Omega_c) \mid [\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{\nu} \geqslant 0 \text{ п.в. на } \Gamma_c\}.$$

Тогда задача (36) эквивалентна минимизации функционала

$$\Pi_\lambda(\Omega_c; \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_c} \sigma^\lambda(\boldsymbol{v})\varepsilon(\boldsymbol{v}) - \int\limits_{\Omega_c} \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}$$

на множестве K_c, поэтому решение $\boldsymbol{u}^\lambda$ этой задачи существует и удовлетворяет вариационному неравенству

$$\boldsymbol{u}^\lambda \in K_c, \quad \int\limits_{\Omega_c} \sigma^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^\lambda) \geqslant \int\limits_{\Omega_c} f(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^\lambda) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in K_c.$$

Дальнейшее построение в целом аналогично использованному в двумерном случае. Рассмотрим возмущение $y = \Psi_\delta(x)$ исходной области в виде

$$y = x + \delta\boldsymbol{V}(x), \qquad x \in \Omega_c, \quad y \in \Omega_c^\delta, \qquad \boldsymbol{V}(x) = (V_1(x), V_2(x), 0).$$

Более того, считаем, что носитель поля $\boldsymbol{V} \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ не пересекается с границей Γ. При этом предполагается, что выполнено условие (14). Далее решаем возмущенную задачу вида (15)–(18) и находим решение $\boldsymbol{u}^{\lambda\delta}$, а затем производную функционала энергии $\Pi_\lambda(\Omega_c^\delta; \boldsymbol{u}^{\lambda\delta})$ по параметру δ при $\delta = 0$. Пусть

$$I^\lambda = \frac{d}{d\delta}\,\Pi_\lambda(\Omega_c^\delta; \boldsymbol{u}^{\lambda\delta})\Big|_{\delta=0}.$$

Аналогично (21) получим

$$I^\lambda = \int\limits_{\Omega_c} \Big\{\frac{1}{2}\operatorname{div}(\boldsymbol{V} b_{ijkl}^\lambda)\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)E_{ij}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x}; \boldsymbol{u}^\lambda\Big)\Big\} - \int\limits_{\Omega_c} \operatorname{div}(\boldsymbol{V} f_i)u_i^\lambda, \tag{37}$$

где

$$E_{ij}(\Phi; \boldsymbol{v}) = (v_{i,k}\Phi_{kj} + v_{j,k}\Phi_{ki})/2, \qquad \Phi = \{\Phi_{ij}\}, \qquad i,j,k,l = 1,2,3.$$

Отметим, что в силу сделанного выбора векторного поля $\boldsymbol{V}$ нет необходимости дифференцировать по x_3 коэффициенты b_{ijkl}^λ в формуле (37).

Используя вновь сходимость вида (23)–(25), получим формулу для $I^0 = \lim_{\lambda\to 0} I^\lambda$. Действительно,

$$I^0 = \int\limits_{\Omega_1} \Big\{\frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{V}\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^0) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0)E_{ij}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x}; \boldsymbol{u}^0\Big)\Big\} - \int\limits_{\Omega_1} \operatorname{div}(\boldsymbol{V} f_i)u_i^0. \tag{38}$$

Теперь рассмотрим конкретные случаи выбора векторного поля $\boldsymbol{V}(x)$ в формулах (37), (38), которые приведут к инвариантным интегралам в трехмерном случае для задач (35) и (36).

Пример 5. Выберем гладкую функцию θ с носителем в малой окрестности S_1 поверхности Γ_c. Считаем, что $\theta = 1$ в окрестности S_2 поверхности Γ_c, $S_2 \subset S_1$. Малость окрестности S_1 означает, что край поверхности $(\partial S_1) \cap \Omega_c$ является частью плоского участка (34) границы Γ_1. Выберем возмущение области Ω_c в виде

$$y_1 = x_1 + \delta\theta(x_1, x_2, x_3)\cos\alpha, \qquad y_2 = x_2 + \delta\theta(x_1, x_2, x_3)\sin\alpha, \qquad y_3 = x_3,$$

где $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega_c$; $(y_1, y_2, y_3) \in \Omega_c^\delta$; $\alpha \in [0, 2\pi)$ — фиксированное число. Обозначим $p_1 = \cos\alpha$, $p_2 = \sin\alpha$. В этом случае $\boldsymbol{V}(x) = (\theta(x)p_1, \theta(x)p_2, 0)$, а формула (37) принимает вид

$$I^\lambda = \int\limits_{\Omega_c} \Big\{\frac{1}{2}\,(\theta_{,l}p_l)\sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)(u_{i,l}^\lambda p_l)\theta_{,j}\Big\} - \int\limits_{\Omega_c} (\theta f_i)_{,l} p_l u_i^\lambda. \tag{39}$$

Интегрируя по частям в (39), получаем

$$I^\lambda = \int\limits_{(\partial S_2)\cap\overline{\Omega}_c} \Big\{\frac{1}{2}\,(n_l p_l)\sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)(u_{i,l}^\lambda p_l)n_j\Big\} + \int\limits_{(S_1\setminus S_2)\cap\Omega_c} \theta(\sigma_{ij,j}^\lambda + f_i)(u_{i,l}^\lambda p_l) + \int\limits_{S_2\cap\Omega_c} f_i u_{i,l}^\lambda p_l.$$

Здесь $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — внутренняя нормаль к ∂S_2. Предполагая, что $\boldsymbol{f} \equiv 0$ в $S_2 \cap \Omega_c$, из предыдущего соотношения получаем инвариантный интеграл для задачи (36):

$$I^\lambda = \int\limits_{(\partial S_2)\cap\overline{\Omega}_c} \Big\{\frac{1}{2}\,(n_l p_l)\sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)(u_{i,l}^\lambda p_l)n_j\Big\}, \tag{40}$$

где суммирование проводится по $i, j = 1, 2, 3$. Аналогично формуле (38) инвариантный интеграл для контактной задачи (35) имеет вид

$$I^0 = \int\limits_{(\partial S_2)\cap\Omega_1} \Big\{\frac{1}{2}\,(n_l p_l)\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^0) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0)(u_{i,l}^0 p_l)n_j\Big\}. \tag{41}$$

В данном случае $(\partial S_2) \cap \Omega_1$ — поверхность типа “шапочки”, лежащая в Ω_1 и накрывающая Γ_c.

Пример 6. Пусть $\theta(x)$ — гладкая функция, равная нулю вне малой окрестности S_1 кривой γ_0, $\theta = 1$ в окрестности S_2 кривой $\gamma_0, S_2 \subset S_1$. Например, S_1, S_2 — торы, содержащие γ_0 и настолько малые, что $(\partial S_1) \cap \Gamma_1$ является частью плоского участка (34). Рассмотрим возмущение области Ω_c в виде

$$y_1 = x_1 + \delta\theta(x)p_1, \qquad y_2 = x_2 + \delta\theta(x)p_2, \qquad y_3 = x_3,$$

где $x \in \Omega_c$, $y \in \Omega_c^\delta$, $p_1^2 + p_2^2 = 1$. Имеем $\boldsymbol{V}(x) = (\theta(x)p_1, \theta(x)p_2, 0)$, а формула для I^λ совпадает с (39). Отличие данного случая от примера 5 состоит в том, что возмущается лишь окрестность фронта γ_0 трещины Γ_c.

Инвариантный интеграл для задачи (36) при $\boldsymbol{f} \equiv 0$ в $S_2 \cap \Omega_c$ в данном случае имеет вид (40).

То же значение векторного поля $\boldsymbol{V}(x)$ в (38) дает инвариантный интеграл в задаче (35), вид которого совпадает с (41). При этом $(\partial S_2) \cap \Omega_1$ — поверхность типа “шапочки”, лежащая в Ω_1 и накрывающая кривую γ_0.

Случаю, когда возмущается лишь часть края границы Γ_c, соответствует следующий пример.

Пример 7. Пусть контактная граница Γ_c является частью плоскости, а именно:

$$\Gamma_c = \{(x_1, x_2, 0) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant \phi(x_2),\ \phi(x_2) > 0,\ x_2 \in [-1, 1]\},$$

причем существует $\delta_0 > 0$ такое, что $\gamma_1 \subset \Gamma_1$, где

$$\gamma_1 = \{(x_1, x_2, 0) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant \phi(x_2) + \delta_0,\ x_2 \in [-1, 1]\}.$$

Здесь $\phi(x_2)$ — достаточно гладкая функция. Как и ранее, вводим в рассмотрение область Ω_2 с гладкой границей Γ_2 и строим область Ω_c. Далее рассмотрим возмущение области Ω_c при $x \in \Omega_c$, $y \in \Omega_c^\delta$:

$$y_1 = x_1 + \delta\theta(x), \qquad y_2 = x_2, \qquad y_3 = x_3. \tag{42}$$

Здесь выбранная функция θ равна нулю вне некоторой малой трехмерной окрестности S_1 кривой

$$\{(x_1, x_2, 0) \mid x_1 = \phi(x_2),\ x_2 \in [-1, 1]\}. \tag{43}$$

Более того, $\theta = 1$ в некоторой окрестности S_2 кривой (43), $S_2 \subset S_1$. Малость окрестности S_1 означает, что $S_1 \cap \gamma_1$ является частью плоскости. Согласно (42) имеем $\boldsymbol{V}(x) = (\theta(x), 0, 0)$. Тогда из формулы (37) в данном случае получаем

$$I^\lambda = \int\limits_{\Omega_c} \Big\{\frac{1}{2}\,\theta_{,1}\sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)u_{i,1}^\lambda\theta_{,j}\Big\} - \int\limits_{\Omega_c} (\theta f_i)_{,1}u_i^\lambda. \tag{44}$$

Осуществим интегрирование по частям в (44). Получим инвариантный интеграл для задачи (36) в предположении, что $\boldsymbol{f} \equiv 0$ в $S_2 \cap \Omega_c$. Этот интеграл имеет вид

$$I^\lambda = \int\limits_{(\partial S_2)\cap\overline{\Omega}_c} \Big\{\frac{1}{2}\,n_1\sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)u_{i,1}^\lambda n_j\Big\},$$

где $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — внутренняя нормаль к ∂S_2.

Как и в других примерах, из формулы (38) подстановкой выбранного поля $\boldsymbol{V}(x)$ найдем инвариантный интеграл для задачи (35):

$$I^0 = \int\limits_{(\partial S_2)\cap\Omega_1} \Big\{\frac{1}{2}\,n_1\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^0) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0)u_{i,1}^0 n_j\Big\}.$$

Пример 8. Пусть область Ω_1 имеет вид “бруса”

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 < x_1 < \varphi(x_2, x_3),\ x_2 \in (0, 1),\ x_3 \in (0, 1)\}$$

с достаточно гладкой функцией φ, такой что $\varphi = 1$ при $x_2 = 0, 1$, $x_3 = 0, 1$. Предполагаем, что $0 < \varphi(x_2, x_3) < 2$ при $x_2 \in [0, 1]$, $x_3 \in [0, 1]$. Пусть контактная граница Γ_c в задаче Синьорини (35) выбрана в виде

$$\Gamma_c = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = \varphi(x_2, x_3),\ x_2 \in [0, 1],\ x_3 \in [0, 1]\}.$$

Область Ω_2 также возьмем в виде “бруса”

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid \varphi(x_2, x_3) < x_1 < 2,\ x_2 \in (0, 1),\ x_3 \in (0, 1)\}.$$

Выберем гладкую функцию θ, равную нулю вне некоторой малой окрестности S_1 поверхности Γ_c и такую, что $\theta = 1$ в окрестности S_2 поверхности Γ_c, $S_2 \subset S_1$. Рассмотрим возмущение множества $\Omega_c = \Omega_1 \cup \Omega_2$:

$$y_1 = x_1 + \delta\theta(x), \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3, \qquad x \in \Omega_c, \quad y \in \Omega_c^\delta.$$

Отметим, что множество Ω_c в данном случае не будет областью, так как связность Ω_c нарушена. Легко находим векторное поле $\boldsymbol{V}(x) = (\theta(x), 0, 0)$. Таким образом, для данного векторного поля $\boldsymbol{V}(x)$ из (37) получаем формулу

$$I^\lambda = \int\limits_{\Omega_c} \Big\{\frac{1}{2}\,\theta_{,1}\sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)u_{i,1}^\lambda\theta_{,j}\Big\} - \int\limits_{\Omega_c} (\theta f_i)_{,1}u_i^\lambda. \tag{45}$$

Интегрируя по частям в (45), находим инвариантный интеграл для задачи (36) в предположении, что $\boldsymbol{f} \equiv 0$ в $S_2 \cap \Omega_c$:

$$I^\lambda = \int\limits_{(\partial S_2)\cap\overline{\Omega}_c} \Big\{\frac{1}{2}\,n_1\sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda) - \sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}^\lambda)u_{i,1}^\lambda n_j\Big\},$$

где $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — внутренняя нормаль к границе ∂S_2.

Аналогичные рассуждения при $\boldsymbol{f} \equiv 0$ в $S_2 \cap \Omega_c$ приводят к инвариантному интегралу в задаче (35):

$$I^0 = \int\limits_{(\partial S_2)\cap\Omega_1} \Big\{\frac{1}{2}\,n_1\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^0) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^0)u_{i,1}^0 n_j\Big\}.$$

В частности, здесь можно выбрать

$$(\partial S_2) \cap \Omega_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = \psi(x_2, x_3),\ x_2 \in (0,1),\ x_3 \in (0,1)\}$$

с достаточно гладкой функцией $\psi(x_2, x_3)$ такой, что

$$0 < \psi(x_2, x_3) < \varphi(x_2, x_3), \qquad x_2 \in (0,1), \quad x_3 \in (0,1).$$

В заключение отметим, что установить наличие инвариантных интегралов можно и в ряде других случаев. Во всех рассмотренных выше ситуациях значение инвариантного интеграла численно совпадает со значением производной функционала энергии по параметру возмущения δ при $\delta = 0$. В частности, инвариантные интегралы могут быть использованы для приближенного отыскания функционалов энергии в возмущенных задачах. Как уже отмечалось, инвариантный интеграл I^λ равен значению производной функционала энергии $\Pi_\lambda(\Omega_c^\delta; \boldsymbol{u}^{\lambda\delta})$ по параметру возмущения δ при $\delta = 0$. Поэтому можно использовать формулу

$$\Pi_\lambda(\Omega_c^\delta; \boldsymbol{u}^{\lambda\delta}) = \Pi_\lambda(\Omega_c; \boldsymbol{u}^\lambda) + \delta I^\lambda + o(\delta),$$

справедливую для всех $\lambda > 0$. Аналогичное разложение имеет место и для $\lambda = 0$, при этом Ω_c следует заменить на Ω_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
2. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985.
3. **Назаров С. А.** Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности напряжений и инвариантные интегралы // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 3. С. 489–502.
4. **Назаров С. А., Полякова О. Р.** Весовые функции и инвариантные интегралы высших порядков // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 1. С. 104–119.
5. **Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.** Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.

6. **Соколовский Я., Хлуднев А. М.** О производной функционала энергии по длине трещины в задачах теории упругости // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 3. С. 464–475.
7. **Ковтуненко В. А.** Инвариантные интегралы энергии для нелинейной задачи о трещине с возможным контактом берегов // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 1. С. 109–164.
8. **Степанов В. Д., Хлуднев А. М.** Метод фиктивных областей в задаче Синьорини // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1350–1364.
9. **Hoffmann K.-H., Khludnev A. M.** Fictitious domain method for the Signorini problem in a linear elasticity // Adv. Math. Sci. Appl. 2004. V. 14, N 2. P. 465–481.
10. **Копченов В. Д.** Приближение решения задачи Дирихле методом фиктивных областей // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 1. С. 151–164.
11. **Брусникин М. Б.** Об эффективных алгоритмах решения задач метода фиктивных областей в многосвязном случае // Докл. РАН. 2002. Т. 387, № 2. С. 151–155.
12. **Вабищевич П. В.** Метод фиктивных областей в задачах математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.
13. **Лазарев Н. П.** Дифференцирование функционала энергии для задачи о равновесии тела, содержащего трещину, с краевыми условиями Синьорини // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 2. С. 139–147.
14. **Khludnev A. M., Ohtsuka K., Sokolowski J.** On derivative of energy functional for elastic bodies with cracks and unilateral conditions // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60, N 1. P. 99–109.
15. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
16. **Grisvard P.** Elliptic problems in nonsmooth domains. Boston etc.: Pitman, 1985.
17. **Фикера Г.** Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.

Поступила в редакцию 23/XII 2004 г.