УДК 548.571

К КИНЕТИКЕ ДИСЛОКАЦИЙ СОМИЛИАНЫ

Ш. Х. Ханнанов

(*Уфа*)

1. Для описания структуры и различных процессов пластического формоизменения, а также разрушения реальных твердых тел возникает необходимость вводить в рассмотрение дислокации более общего, чем обычные (трансляционные), типа — дислокации Сомилианы [1]. Вопросы построения кинетики таких дефектов и являются предметом исследования данной работы. Некоторые из этих вопросов уже рассматривались ранее [2]. Здесь развивается независимый от [2] подход, в котором дислокации Сомилианы вводятся как естественное обобщение обычных дислокаций. Преимуществом данного подхода является возможность использования хорошо разработанного аппарата континуальной теории обычных дефектов (дислокаций и дисклинаций). При этом, используя результаты [3, 4], удается записать выражения для динамических упругих полей дислокации Сомилианы и получить замкнутую систему уравнений кинетики.

2. Дислокация Сомилианы является обобщением дислокации Вольтерра [1, 5] и определяется обычно [2] как поверхность S, на которой полные смещения в упругом теле u_l^T претерпевают произвольно изменяющийся вдоль S скачок $[u_l^T]$:

$$[u_l^T] = -B_l,$$

где B_l — вектор Бюргерса дислокации Сомилианы. Скачок смещений определяется как скачок смещений при переходе через поверхность S в направлении нормали к поверхности n_k. Здесь поверхность S может зависеть от времени $t(S = S(t))$, однако для простоты записи мы иногда будем опускать значок аргумента t.

Существует и другая возможность определения дислокации Сомилианы, а именно через базисные пластические поля, как это делается в континуальной теории дислокаций Вольтерра [3, 5]. В случае обычных трансляционных дислокаций Вольтерра необходимо задание базисных пластических полей дисторсии β_{kl}^P и скоростей v_l^P, которые имеют вид

$$\beta_{kl}^P(\mathbf{r}, t) = -\int_S \delta(\mathbf{R})\, b_l dS_k; \tag{2.1}$$

$$v_l^P(\mathbf{r}, t) = \int_S \delta(\mathbf{R})\, b_l v_k(\mathbf{r}', t)\, dS_k, \tag{2.2}$$

где $\delta(\mathbf{R})$ — трехмерная дельта-функция Дирака ($\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$); $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ — радиус-векторы точки наблюдения и интегрирования; $v_k(\mathbf{r}, t)$ — скорость движения поверхности $S(t)$; b_l — постоянный вектор Бюргерса дислокации. Мы будем считать, что дислокация Сомилианы является обобщением трансляционных дислокаций Вольтерра, и представим базисные поля выражениями вида (2.1), (2.2), в которых вместо постоянного вектора Бюргерса b_l теперь будет стоять $B_l(\mathbf{r}, t)$ — вектор Бюргерса, изменяющийся вдоль $S(t)$:

$$\beta_{kl}^P(\mathbf{r}, t) = -\int_S \delta(\mathbf{R})\, B_l(\mathbf{r}', t)\, dS_k; \tag{2.3}$$

$$v_l^P(\mathbf{r}, t) = \int_S \delta(\mathbf{R})\, B_l(\mathbf{r}', t)\, v_k(\mathbf{r}', t)\, dS_k. \tag{2.4}$$

Для того чтобы лучше оттенить принятую точку зрения, рассмотрим частный случай дислокации Сомилианы, когда берега поверхности $S(t)$ жестко повернуты относительно друг друга на некоторый угол Ω_q, при этом

$$[u_l^T] = -B_l = -\varepsilon_{lqr}\Omega_q(x_r - x_r^0). \tag{2.5}$$

Здесь ε_{lqr} — единичный антисимметричный тензор; x_r, x_r^0 — декартовы координаты точки наблюдения и точки оси поворота. Такой характер скачка смещений соответствует дисклинации [5]. В континуальной теории базисные пластические поля дисклинации задаются четырьмя величинами [3]: тензором пластической деформации e^P_{kl}, тензором пластического изгиба — кручения $\varkappa^P_{pq}$, вектором скорости пластического смещения v^P_l и поворота w^P_q. Это связано с тем, что тензор пластической дисторсии β^P_{kl} в случае дисклинаций считается неизвестным. В противоположность этому здесь мы для дислокации Сомилианы со скачком смещений (2.5) пластическую дисторсию β^P_{kl} считаем известной (2.3). Таким образом, из теории дислокаций Сомилианы как частный случай вытекает лишь так называемая дислокационная модель дисклинации [5].

Если смысл пластических дисторсий (2.3) ясен, то смысл пластических скоростей (2.4) требует своего раскрытия. Рассмотрим пластическое поле смещений u^P_l (r, t) особого вида

$$u^P_l(\mathbf{r}, t) = \int_V \delta(\mathbf{R}) B_l(\mathbf{r}') \, dV, \tag{2.6}$$

где V — объем, ограниченный замкнутой движущейся поверхностью $S(t)$, а вектор B_l не зависит от времени. Прежде всего установим, что тензор плотности дислокаций α_{pl}, определяемый соотношением [5]

$$\alpha_{pl} = -\varepsilon_{pmk}\beta^P_{kl,m}, \tag{2.7}$$

равен нулю (индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей декартовой координате). Действительно, для тензора пластической дисторсии β^P_{kl} получаем из (2.6)

$$\beta^P_{kl} = u^P_{l,k} = \int_V B_l \delta_{,k}(\mathbf{R}) \, dV. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.7), находим

$$\alpha_{pl} = -\varepsilon_{pmk}\int_V B_l \delta_{,km}(\mathbf{R}) \, dV = 0. \tag{2.9}$$

Далее для скорости пластических смещений v^P_l имеем (точка сверху обозначает дифференцирование по времени)

$$v^P_l = \dot{u}^P_l = \int_S B_l \delta(\mathbf{R}) v_R \, dS_k. \tag{2.10}$$

Как видно из (2.10), для поля (2.6) скорость пластического смещения отлична от нуля только на поверхности $S(t)$ и имеет вид (2.4). Используя обычное соотношение для тензора плотности потока дислокаций J_{kl} [6] (в [6] данное выражение отличается знаком)

$$J_{kl} = \dot{\beta}^P_{kl}, \tag{2.11}$$

получаем (индекс со штрихом после запятой обозначает дифференцирование по переменной интегрирования)

$$J_{kl} = -\int_S B_l \delta_{,k'}(\mathbf{R}) v_i \, dS_i. \tag{2.12}$$

Как видно из (2.12), для поля (2.6) тензор плотности потока дислокации J_{kl} отличен от нуля и сосредоточен на поверхности $S(t)$. Поскольку $\alpha_{pl} = 0$, в статике упругие поля отсутствуют. В динамике, хотя $J_{kl} \neq 0$, можно также полагать (постулировать), что упругих полей нет (см. [3]). Таким образом, скорость пластического смещения v^P_l (2.4) можно интерпретировать как скорость пластического смещения, связанного с пластическим полем перемещений вида (2.6) в некотором объеме тела, примыкающем к $S(t)$. При этом мы постулируем, как и в [3], что пластическое поле скоростей не вызывает упругих полей напряжений. Задание дислокации Сомилианы двумя базисными полями (2.3), (2.4) означает в связи с этим, что на пластическую дисторсию дефекта (2.3) накладывается дополнительная дисторсия среды, скорость которой — $v^P_{l,k}$.

Теперь можно записать основные кинематические соотношения. Полный тензор плотности дислокаций α_{pl} для дислокации Сомилианы (точнее, для среды с дислокацией Сомилианы) будет складываться из слагаемых, связанных с дисторсией самого дефекта (2.3) и среды. Последнее слагаемое, как было показано выше (2.9), равно нулю, поэтому α_{pl} определяется соотношением (2.7), в котором β^P_{kl} — пластическая дисторсия дефекта (2.3). Подставляя (2.3) в (2.7), получаем для тензора плотности дислокаций α_{pl} дислокации Сомилианы

$$\alpha_{pl} = \int_L \tau_p B_l \delta(\mathbf{R})\, dL + \int_S \varepsilon_{pmk} B_{l,m'} \delta(\mathbf{R})\, dS_k, \tag{2.13}$$

где $L(t)$ — замкнутый контур, ограничивающий $S(t)$; τ_p — единичный вектор касательной к контуру L, направление которого согласовано с направлением нормали к поверхности S. Здесь и далее в формулах встречается $B_{l,m}$ — градиент поля B_l. Поскольку поле B_l задано только на поверхности $S(t)$, требуется некоторое разъяснение этого понятия. Точки на поверхности $S(t)$ можно индивидуализировать двумя параметрами, которые обозначим ξ, η. Тогда имеем в каждой точке M поверхности S

$$B_l = B_l(\xi,\ \eta,\ t); \tag{2.14}$$

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_M(\xi,\ \eta,\ t), \tag{2.15}$$

где $\mathbf{r}_M$ — радиус-вектор точки M. Будем предполагать, что зависимость (2.15) взаимно-однозначна, по крайней мере, для достаточно малых промежутков времени Δt (случай неподвижной поверхности требует особого рассмотрения). Тогда, исключая из (2.14) ξ, η, t с помощью (2.15), получаем

$$B_i = B_l(\mathbf{r}_M). \tag{2.16}$$

Поле (2.16) есть функция пространственных координат, и под $B_{l,m}$ будем понимать градиент поля (2.15). Если же почему-либо удобно пользоваться параметрическим заданием (2.14) поля B_l, то градиент B_l будет определяться выражением (в прямых обозначениях)

$$\nabla \mathbf{B} = \nabla_S \mathbf{B} + \frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{v}\cdot\nabla_S \mathbf{B}\right), \tag{2.17}$$

где ∇, ∇_S — пространственный и поверхностный набла-операторы.

Полный тензор плотности потока дислокаций J_{kl} также будет состоять из двух слагаемых. Первое из них определяется, согласно (2.11), скоростью пластической дисторсии дефекта $\dot{\beta}^P_{kl}$. Второе возникает от наложения поля (2.4) с обратным знаком и равно — $v^P_{l,k}$. Отсюда имеем для тензора плотности потока дислокаций

$$J_{kl} = \dot{\beta}^P_{kl} - v^P_{l,k}. \tag{2.18}$$

Подставляя в (2.18) выражения (2.3), (2.4), находим

$$J_{kl} = -\int_S B_{l,k'} \delta(\mathbf{R})\, v_j dS_j + \int_L \delta(\mathbf{R})\, B_l \varepsilon_{pmk} \tau_p v_m dL. \tag{2.19}$$

Формулы (2.13)—(2.19) справедливы лишь в случае, когда скорость движения дислокации Сомилианы v_i нигде на S не обращается в нуль. В частности, как видно из (2.17), $\nabla\mathbf{B}$ имеет сингулярность при $\mathbf{v} \to 0$. Однако если подставить выражение (2.17) в формулы (2.13), (2.19), то сингулярность исчезает и получаются формулы, справедливые и при $\mathbf{v} = 0$:

$$\alpha_{pl} = \int_L \tau_p B_l \delta(\mathbf{R})\, dL + \int_S \varepsilon_{pmk} (\nabla_S \mathbf{B})_{lm'} \delta(\mathbf{R})\, dS_k; \tag{2.20}$$

$$J_{kl} = \int\limits_L \delta(\mathbf{R}) B_l \varepsilon_{pmk} \tau_p v_m dL - \int\limits_S (\nabla_S \mathbf{B})_{kl} \delta(\mathbf{R}) v_j dS_j - \tag{2.21}$$

$$- \int\limits_S \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - v_m (\nabla_S \mathbf{B})_{ml} \right] \delta(\mathbf{R}) \, dS_k,$$

где $(\nabla_S \mathbf{B})_{ml}$ — компоненты поверхностного градиента. Далее из (2.21) можно получить выражение для тензора скорости пластической деформации $\dot{e}^P_{kl} = J_{(kl)}$, тензора скорости пластического поворота $\dot{w}^P_{kl} = J_{[kl]}$ и скорости производства избыточного объема $\dot{V} = J_{kk}$. Этим исчерпываются основные кинематические соотношения для дислокаций Сомилианы. Формулы (2.20), (2.21) выражают характеристики континуальной теории дефектов (плотности и потоки дислокаций) через поле скачка смещений B_l на поверхности $S(t)$.

3. Для формулировки системы уравнений, описывающих эволюцию дислокаций Сомилианы во времени, необходимо далее записать уравнения для динамических самосогласованных полей упругих напряжений, обобщенных сил и скоростей, а также уравнения баланса для функции распределения дефектов.

Коль скоро известны выражения для плотностей и потоков дислокаций (2.20), (2.21), то упругие дисторсии можно вычислить по общим формулам континуальной теории [4]:

$$\beta_{mn}(\mathbf{r}, t) = \int [\varepsilon_{pmk} c_{ijkl} G_{jn,i}(\mathbf{R}, T) \alpha_{pl}(\mathbf{r}', t') - \tag{3.1}$$

$$- \rho \dot{G}_{ln}(\mathbf{R}, T) J_{ml}(\mathbf{r}', t')] \, d\mathbf{r}' dt',$$

где $T = t - t'$; c_{ijkl} — тензор упругих модулей; G_{jn} — динамическая функция Грина; ρ — плотность массы. Упругие напряжения в теле σ_{ij}, вызываемые дислокацией Сомилианы, находятся путем подстановки упругих дисторсий (3.1) в закон Гука:

$$\sigma_{ij} = c_{ijmn} \beta_{mn}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим вопрос о силах, действующих на дислокацию Сомилианы. В общем случае движение дислокации Сомилианы включает в себя как изменение конфигурации и положения поверхности $S(t)$, так и изменение поля B_l. Чтобы было возможно ввести функцию распределения дефектов и записать для нее уравнение баланса, мы вынуждены ограничить число допустимых степеней свободы дислокации Сомилианы. Это можно сделать, приняв допущение, что конфигурация, положение, поле B_l дислокаций Сомилианы в рассматриваемом ансамбле определяются полностью заданием конечного числа параметров (обобщенных координат) q_k ($k = 1, 2, \ldots, N + 3$), где последние три обобщенные координаты соответствуют декартовым координатам радиус-вектора $\mathbf{r}$ положения дефекта. Такой прием использовался ранее при описании микротрещин как разновидности дислокаций Сомилианы в [7]. Кроме того, мы будем рассматривать только консервативное движение, не связанное с образованием лишнего объема, так как в противном случае необходимо включение точечных дефектов, ответственных за перенос массы.

Потенциальная функция $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \ldots, q_{N+3})$ для упругих сил имеет вид

$$\Pi = W - A,$$

где W — собственная упругая энергия дефекта; A — работа всех внешних (по отношению к рассматриваемому дефекту) сил на пластических перемещениях. Для дифференциала работы dA можно записать выражение

$$dA = \int \sigma^+_{ij} \frac{\partial \beta^{+P}_{ij}}{\partial q_k} dq_k dV,$$

где σ_{ij}^{+} — полные напряжения в теле; β_{ij}^{+P} — полная пластическая дисторсия тела с дефектом; интегрирование ведется по объему, заключающему в себе данный дефект. Отсюда получаем для обобщенной силы F_k

$$F_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = -\frac{\partial W}{\partial q_k} + \int\limits_V \sigma_{ij}^{+} \frac{\partial \beta_{ij}^{+P}}{\partial q_k} dV. \tag{3.3}$$

Первое слагаемое в правой части (3.3) есть сила самодействия F_k^S, а второе — внешняя сила F_k^e. Из способа введения обобщенных координат ясно, что векторы $\partial B_i/\partial t$ и v_m, входящие в (2.21),— линейные функции от обобщенных скоростей $\dot{q}_k = dq_k/dt$. В силу этого $J_{ij} = J_{ijk}^{+}\dot{q}_k$ — также линейная функция от $\dot{q}_k$ с коэффициентами J_{ijk}^{+}. Частную производную $\partial\beta_{ij}^{+P}/\partial q_k$, используя правило дифференцирования по параметру t, можно заменить величиной $\partial J_{ij}/\partial\dot{q}_k = J_{ijk}^{+}$. Тогда окончательное выражение для обобщенной силы принимает вид

$$F_k = F_k^S + \int\limits_V \sigma_{ij}^{+} J_{ijk}^{+} dV. \tag{3.4}$$

Рассмотрим в качестве примера движение элемента $\tau_p dL$ трансляционной дислокации, которое описывается тремя обобщенными координатами x_k — декартовыми координатами радиус-вектора положения дислокации. Учитывая, что $\dot{x}_k = v_k$, $B_l = b_l = \mathrm{const}$, находим выражение для внешней силы $F_m^e = \varepsilon_{pml} b_l \sigma_{ik}^{+} \tau_p dL$, совпадающее с известной формулой Пича — Келера [6].

Для описания поведения ансамбля дислокаций Сомилианы введем функцию распределения $f(q_1, q_2, \ldots, q_N; \mathbf{r}, t)$ такую, что число дислокаций Сомилианы с обобщенными координатами между q_k и $q_k + dq_k$ в элементе объема $d\mathbf{r}$ равно $f(q_1, q_2, \ldots, q_N; \mathbf{r}, t)dq_1, \ldots, dq_N d\mathbf{r}$. Для f запишем уравнение баланса в форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_k}(\dot{q}_k f) = I, \tag{3.5}$$

где $\dot{q}_k$ — скорость движения дефекта в $N + 3$-мерном пространстве; I — интеграл столкновений, учитывающий процессы рождения — аннигиляции и других дискретных превращений дефектов. Предполагается, что обобщенные скорости $\dot{q}_k$ являются функциями обобщенных сил:

$$\dot{q}_k = \varphi_k(F_1, F_2, \ldots, F_{N+3}), \tag{3.6}$$

где φ_k должны определяться из микроскопической теории или из эксперимента. В основе предположения (3.6) лежит допущение, что дефекты движутся достаточно медленно и однородно и силы инерции хорошо учитываются средними динамическими полями напряжений σ_{ij} [8]. Обобщенные силы F_k (3.4) определяются полными напряжениями σ_{ij}^{+}, которые складываются из внешне приложенных σ_{ij}^{0} и внутренних σ_{ij}:

$$\sigma_{ij}^{+} = \sigma_{ij}^{0} + \sigma_{ij}. \tag{3.7}$$

Для самосогласования задачи остается выразить внутренние напряжения σ_{ij} через функцию распределения дислокаций Сомилианы. С этой целью с помощью процедуры усреднения введем средние пластические поля дисторсий $\bar{\beta}_{kl}^{P}$ и скоростей $\bar{v}_l^P$:

$$\bar{\beta}_{kl}^{P} = \int \beta_{kl}^{P1}(q_1, \ldots, q_N) f(q_1, \ldots, q_N; \mathbf{r}, t)\, dq_1 \ldots dq_N; \tag{3.8}$$

$$\bar{v}_l^{P} = \int v_l^{P1}(q_1, \ldots, q_N) f(q_1, \ldots, q_N; \mathbf{r}, t)\, dq_1 \ldots dq_N, \tag{3.9}$$

где β_{kl}^{P1}, v_l^{P1} — интегральные характеристики дефектов:

$$\beta_{kl}^{P1} = \int_S \beta_{kl}^P dS, \quad v_l^{P1} = \int_S v_l^P dS.$$

Упругие дисторсии β_{mn}, вызываемые пластическими полями (3.8), (3.9), находятся по формуле (3.1), в которой α_{pl} и J_{ml} должны быть выражены через $\bar{\beta}_{kl}^P$ и $\bar{v}_l^P$ с помощью соотношений (2.7), (2.18). Затем, подставляя полученные значения β_{mn} в закон Гука (3.2), находим искомые напряжения σ_{ij}.

Таким образом, уравнение баланса (3.5), законы движения (3.6) и формулы (3.4), (3.7)—(3.9), (3.1), (2.7), (2.18) для нахождения обобщенных сил составляют замкнутую систему уравнений, описывающую кинетику ансамбля дислокаций Сомилианы.

Поступила 11 XI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963.
2. **Волков А. Е., Лихачев В. А., Шихобалов Л. С.** Механика среды с дислокациями Сомилианы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6.
3. **Kossecka E., De Wit R.** Disclination kinematics.— Archives of Mechanics, 1977, vol. 29, № 5.
4. **Kossecka E., De Wit R.** Disclination dynamics.— Archives of Mechanics, 1977, vol. 29, N 6.
5. **Де Вит Р.** Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир, 1977.
6. **Косевич А. М.** Дислокации в теории упругости. Киев.: Наукова думка, 1978.
7. **Ханнанов Ш. Х.** Кинетика поведения непрерывно распределенных трещин.— Металлофизика, 1981, т. 3, № 2.
8. **Ханнанов Ш. Х.** О кинетике непрерывно распределенных дислокаций.— Физика металлов и металловедение, 1978, т. 46, № 4.

УДК 39.374

ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ТИТАНОВОГО СПЛАВА В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

В. М. Жигалкин, А. Ф. Никитенко, О. М. Усова

(Новосибирск)

В задачах механики горных пород при решении вопроса о напряженно-деформированном состоянии массива применяют упругопластические модели.

В данной работе приводятся результаты экспериментального исследования, целью которого явилась проверка пригодности модели пластического деформирования анизотропно-упрочняющейся среды [1, 2] для случаев простых и сложных нагружений при фиксированных главных направлениях тензора напряжений, а также определение упругопластических свойств одного из титановых сплавов при двуосном напряженном состоянии.

1. В качестве исходного материала взят лист титанового сплава 3В толщиной 35 мм. Заготовки для образцов вырезались в направлении наибольшего размера, в дальнейшем это направление совпадает с осевым направлением образца. Поперечное направление листа совпадает с окружным направлением образца.

Испытуемые образцы имели следующие размеры: внешний диаметр 30 мм, толщина стенки в рабочей части 1+0,01 мм. После изготовления образцы подвергались естественному старению в течение 8 мес.

Опыты проводились на испытательной машине УМЭ-10ТМ, позволяющей нагружать образцы осевой силой. Внутреннее давление в образце создавалось дополнительным ручным насосом непрерывного действия. Деформации измерялись тензометрами с индикаторами часового типа: осевые — на базе 50 мм индикаторами с ценой деления 0,01 мм, окружные — микронным индикатором. Радиальная деформация определялась с помощью гипотезы об упругом изменении объема, радиальное напряжение принималось равным нулю.