ПМТФ, № 2, 1975

УДК 539.411

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ПЛОСКОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО КОЛЬЦА СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

С. В. Сериков

(*Новосибирск*)

В работе формулируется постановка плоской задачи неустановившегося течения идеально пластического кольца под действием внутреннего давления. Задача определения закона движения границ и изменения давления со временем сводится к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка. Определяется частное решение задачи Коши для этого уравнения, соответствующее расширению границ кольца с отрицательным ускорением. При этом для начального поля скоростей имеется оценка сверху, выраженная через исходные параметры. Полученное весьма частное неустановившееся течение идеально пластического кольца исследуется в дальнейшем на устойчивость по отношению к малым гармоническим возмущениям вектора скорости, давления и границ кольца. Показано, что исследуемое основное течение устойчиво при любом волновом числе. Результат получен в предположении малости инерционных сил в возмущенном течении по сравнению с прочностными.

1. Рассматривается плоская задача деформации пластического кольца под действием внутреннего давления $P(t)$. На внешней границе кольца давление отсутствует.

Компоненты тензора напряжений σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ и вектора скорости v_r, v_θ в полярных координатах r, θ удовлетворяют уравнениям движения непрерывной среды вне поля массовых сил

$$(1.1)\qquad \frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta^2}{r}\right);$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right),$$

где ρ — плотность материала.

Принимаем уравнение состояния пластической среды в виде

$$(1.2)\qquad (\sigma_\theta-\sigma_r)^2+4\tau_{r\theta}^2=4K^2,$$

где $K>0$ — пластическая постоянная. Кроме того, считаем, что главные направления тензора напряжений совпадают в каждой точке среды с главными направлениями тензора скоростей деформаций, компоненты которого выражаются посредством равенств

$$(1.3)\qquad \varepsilon_r=\frac{\partial v_r}{\partial r};\quad \varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r};$$

$$2\gamma_{r\theta}=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}.$$

Предположение о несжимаемости среды приводит к известному соотношению

$$(1.4) \qquad \varepsilon_r+\varepsilon_\theta=0.$$

На границах кольца потребуем выполнения динамического условия

$$(1.5) \qquad \sigma_r=-P(t) \text{ при } r=R_1, \quad \sigma_r=0 \text{ при } r=R_2$$

и кинематического

$$(1.6) \qquad \frac{dR_j}{\partial t}=v_r \qquad \text{при } r=R_j \ (j=1,2).$$

Кольцо образовано двумя концентрическими окружностями радиуса R_1 и R_2 ($R_1<R_2$).

В случае осевой симметрии течения кольца решение краевой задач (1.1) — (1.6) определяется следующими выражениями:

$$(1.7) \qquad \tau_{r\theta}=0;\ v_\theta=0;\ \gamma_{r\theta}=0;$$

$$(1.8) \qquad \sigma_r=-(\rho\dot{a}+2K)\ln R_2/r+\frac{1}{2}\rho a^2\left(r^{-2}-R_2^{-2}\right);$$

$$\sigma_\theta=\sigma_r+2K;\ v_r=ar^{-1};\ \varepsilon_\theta=-\varepsilon_r=ar^{-2}.$$

Здесь

$$(1.9) \qquad P=(\rho\dot{a}+2K)\ln R_2/R_1-\frac{1}{2}\rho a^2\left(R_1^{-2}-R_2^{-2}\right);$$

$$a(t)=\dot{R}_1R_1;\ \dot{R}_1R_1=\dot{R}_2R_2;$$

$$(1.10) \qquad R_j=R_{j0},\ \dot{R}_j=V_{j0} \text{ при } t=0;$$

R_{j0}, V_{j0} — соответственно начальные радиусы и скорости расширения границ кольца; точка означает дифференцирование по времени $t\geqslant 0$. В силу кинематического условия (1.6) для начальных данных имеет место отношение

$$(1.11) \qquad R_{20}/R_{10}=V_{10}/V_{20},$$

а вследствие несжимаемости в любой момент времени выполняется равенство

$$(1.12) \qquad R_2^2-R_1^2=R_{20}^2-R_{10}^2.$$

При известной функции давления $P(t)$ равенства (1.9) — (1.12) определяют закон течения расширяющегося кольца. Задача определения одного из радиусов $R_j(t)$ сводится к задаче Коши для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, построение точного решения которого встречает принципиальные математические трудности.

Но можно рассмотреть обратную задачу, т. е. построить закон изменения границ кольца, удовлетворяющий условиям (1.10)—(1.12), где изменение давления внутри кольца определится из (1.9) при известных $R_1(t)$ и $R_2(t)$.

Непосредственная проверка показывает, что изменение границ кольца, определяемое выражениями

$$(1.13)\qquad R_j = R_{j0}\left(1 + 2\frac{V_{j0}}{R_{j0}}t\right)^{1/2};$$

$$\dot{R}_j = V_{j0}\frac{R_{j0}}{R_j},$$

удовлетворяет условиям (1.10) — (1.12).

Тогда из (1.9), принимая во внимание $\dot{a}(t)=0$, получим изменение давления внутри кольца по формуле

$$(1.14)\qquad P = 2K\ln R_2/R_1 - \alpha_0\left(R_1^{-2} - R_2^{-2}\right);$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\rho V_{10}^2 R_{10}^2.$$

Так как в начальный момент времени должно быть выполнено соотношение $P(0)=P_0 \geqslant 0$, то, согласно (1.14), на начальную скорость расширения внутренней границы кольца следует наложить ограничение

$$V_{10} \leqslant V_0;$$

$$V_0 = 2\left[\frac{K\ln\varkappa_0}{\rho\left(1-\varkappa_0^{-2}\right)}\right]^{1/2};$$

$$(1.15)\qquad \varkappa_0 = R_{20}/R_{10}.$$

Если $V_{10}=V_0$, то $P_0=0$ и течение кольца происходит по инерции с заданным полем скоростей. Когда $V_{10}<V_0$, точное решение (1.13), (1.14) допускает следующую интерпретацию: в начальный момент времени в пластическом кольце с радиусами $R_{j0}(R_{10} < R_{20})$ задано поле скоростей V_{j0} $(V_{10} > V_{20})$, внутри которого имеется определенное давление $P_0>0$, необходимое для пластического деформирования кольца. При $t \geqslant 0$ кольцо расширяется, а скорость течения границ кольца уменьшается со временем. Кроме того, давление внутри кольца убывает до нуля при $t \to \infty$.

2. Построенное частное решение неустановившегося течения пластического кольца исследуем на устойчивость по отношению к малым возмущениям скорости течения, давления и границ кольца. При этом будем различать два случая: $V_{10}=V_0$, $V_{10} < V_0$.

Пусть

$$(2.1)\qquad v_r' = v_r^0 + v_r^*;\quad v_\theta' = v_\theta^0 + v_\theta^*;$$

$$\sigma' = \sigma^0 + \sigma^*;\qquad R_j' = R_j + R_j^*,$$

где основное течение обозначено индексом нуль; v_r', v_θ', —скорости частицы в возмущенном течении; R_j' — радиус возмущенных границ; σ' — среднее арифметическое главных напряжений возмущенного течения.

Вследствие малости элементарного возмущения v_r^*, v_θ^*, σ^*, R_j^* следует ожидать, что движение кольца с возмущенными границами будет мало отличаться от течения концентрического кольца. Поэтому можно считать [1], что главное направление течения в возмущенном движении, соответствующее направлению касательной к возмущенной поверхности кольца, образует малый угол θ' с главным направлением невозмущенного кольца. Согласно формулам преобразования компонент тензора напряжений и тензора скоростей деформации в полярных координатах, а также используя метод работы [2] по линеаризации напряжений и деформаций, получим выражения для компонент тензора напряжений возмущенного движения в виде

$$\sigma_r' = \sigma_r^0 + \sigma^*; \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \sigma^*; \tag{2.2}$$

$$\tau_{r\theta}' = \tau^0 \left[\frac{\partial v_\theta^*}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(v_\theta^* - \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right) \right];$$

$$\tau^0 = K/(\varepsilon_\theta^0 - \varepsilon_r^0).$$

Вследствие несжимаемости рассматриваемой среды из (1.3), (1.4) и (2.1) получим

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta^*) + \frac{\partial}{\partial r}(r v_r^*) = 0.$$

Отсюда следует, что существует достаточно гладкая функция $\chi(r,\theta,t)$, которой соответствует система равенств

$$v_\theta^* = \frac{\partial \chi}{\partial r}; \quad v_r^* = -\frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial \theta}. \tag{2.3}$$

Линеаризуя уравнение (1.1) с учетом (2.1) — (2.3) и опуская инерционные члены в возмущенных уравнениях движения, получим

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial r} + r^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0; \tag{2.4}$$

$$r^{-1}\frac{\partial \sigma^*}{\partial \theta} + 2r^{-1}\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0.$$

Здесь

$$\Phi = \tau^0 \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) \right]. \tag{2.5}$$

Отметим, что для рассматриваемого частного решения, где для начального поля скоростей имеется оценка сверху (1.15), допущение малости инерционных членов в возмущенных уравнениях движения более оправдано, чем, например, в работах [1,2].

Граничные условия (1.5) на криволинейных поверхностях возмущенного кольца после переноса напряжений σ_r', σ_θ', $\tau_{r\theta}'$ на невозмущенные границы [2] примут вид

$$\sigma_\theta \cos(x', \nu) + \tau_{r\theta}' \cos(y', \nu) = 0 \quad \text{при } r = R_j; \tag{2.6}$$

$$\tau_{r\theta}' \cos(x', \nu) + \sigma_r' \cos(y', \nu) = -P' \quad \text{при } r = R_1;$$

$$\tau_{r\theta}' \cos(x', \nu) + \sigma_r' \cos(y', \nu) = 0 \quad \text{при } r = R_2,$$

где (x', y') — прямоугольная система координат с началом на невозмущенной поверхности кольца; ν — внешняя нормаль к возмущенной границе.

Так как $\cos(x', \nu) = \sin(y', \nu)$, где $\operatorname{tg}(y', \nu) = \frac{1}{R_j}\frac{\partial R_j^*}{\partial\theta}$, то вследствие малости возмущения имеем

$$\cos(x', \nu) \simeq \frac{1}{R_j}\frac{\partial R_j^*}{\partial\theta}; \qquad \cos(y', \nu) \simeq 1. \tag{2.7}$$

Следовательно, из (2.1) — (2.3) и (2.6) —(2.7) с учетом соотношения параметров основного течения получим в случае $V_{10} < V_0$

$$\sigma_\theta^0 \frac{1}{R_j}\frac{\partial R_j^*}{\partial\theta} + \Phi = 0 \quad (r = R_j); \tag{2.8}$$

$$\sigma^* = 2K\left(\frac{R_1^*}{R_1} - \frac{R_2^*}{R_2}\right) + 2\alpha_0\left(R_2^{-2}\frac{R_2^*}{R_2} - R_1^{-2}\frac{R_1^*}{R_1}\right) \quad (r = R_1);$$

$$\sigma^* = 0 \quad (r = R_2).$$

Когда $V_{10} = V_0$, то $\sigma^* = 0$ на обеих границах кольца.

Кинематическое условие (1.6) для возмущенного течения, согласно [3], примет вид

$$\frac{\partial R_j^*}{\partial t} + r^{-1}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{\partial v_r^0}{\partial r}R_j^* = 0 \quad (r = R_j). \tag{2.9}$$

3. Сделаем замену переменных

$$x = \frac{V_{10}}{R_{10}}t; \qquad y = \ln r/R_1 \tag{3.1}$$

и рассмотрим возмущение границ кольца и давления соответственно в виде

$$R_j^* = \xi_j(x)\sin\omega\theta; \qquad \sigma^* = \varphi(x, y)\sin\omega\theta. \tag{3.2}$$

При этом, сообразуясь с видом граничных условий, будем искать решение для функции $\chi(r, \theta, t)$ в виде

$$\chi = \psi(x, y)\cos\omega\theta, \tag{3.3}$$

где $\omega = 0, 1, 2, \ldots$ — волновое число для рассматриваемого гармонического возмущения.

Введем безразмерные величины

$$\bar\psi = \psi/V_{10}R_{10}; \quad \bar\varphi = \varphi/\rho V_{10}^2; \quad \bar K = K/\rho V_{10}^2; \quad \bar P = P/\rho V_{10}^2; \tag{3.4}$$

$$\bar R_j = R_j/R_{10}; \quad \bar\xi_j = \xi_j/R_{10}; \quad \bar V_{10} = V_{10}/V_0; \quad \varkappa = R_2/R_1.$$

Подставляя (3.1) — (3.4) в (2.4), (2.5), получим систему уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами относительно функций $\psi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ соответственно (черту для безразмерных величин далее опускаем):

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} + 2(\omega^2 - 2)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \omega^4\psi = 0; \tag{3.5}$$

$$\omega\varphi = -\frac{1}{2}K\left(2 + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - 2\frac{\partial\psi}{\partial y} + \omega^2\psi\right]. \tag{3.6}$$

Граничные условия (2.8) примут вид

$$\sigma_\theta^0\frac{\omega}{R_j}\xi_j + \frac{1}{2}K\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - 2\frac{\partial\psi}{\partial y} + \omega^2\psi\right) = 0 \quad (y = \ln R_j/R_1); \tag{3.7}$$

$$\varphi = 2K\left(\frac{\xi_1}{R_1} - \frac{\xi_2}{R_2}\right) + R_2^{-2}\frac{\xi_2}{R_2} - R_1^{-2}\frac{\xi_1}{R_1} \quad (y = 0); \tag{3.8}$$

$$\varphi = 0 \ (y = \ln \varkappa).$$

При этом имеем в случае $V_{10} < 1$:

$$\sigma_\theta^0 = 2K - P; \quad P = 2K\ln\varkappa - R_2^{-2}(\varkappa^2 - 1) \quad (y = 0); \tag{3.9}$$

$$\sigma_\theta^0 = 2K \quad (y = \ln\varkappa).$$

Когда $V_{10}=1$, то $\sigma_\theta^0=2K$, $\varphi=0$ на обеих границах кольца. Из кинематического условия (2.9) получим

$$\frac{d\xi_j}{\partial x} + R_j^{-2}\xi_j = \omega R_j^{-1}\psi \qquad (y=\ln R_j/R_1) \tag{3.10}$$

с начальным условием

$$\xi_j = \xi_j^0 \quad \text{при } x=0. \tag{3.11}$$

4. Таким образом, равенства (3.5)—(3.11) определяют замкнутую задачу для исследования поведения гармонического возмущения вектора скорости, давления и границ кольца без учета инерционных сил в возмущенном течении. Решение уравнений (3.5), (3.6) представим в виде

$$\psi = \sum_{i=1}^{4} C_i \exp(n_i y); \tag{4.1}$$

$$\omega\varphi = -\frac{1}{2}K\sum_{i=1}^{4} A_i C_i \exp(n_i y),$$

где

$$n_i = \pm\left[2 - \omega^2 \pm 2(1 - \omega^2)^{1/2}\right]^{1/2}, \tag{4.2}$$

$n_1 = -n_2$, $n_3 = -n_4$ — корень характеристического уравнения

$$n^4 + 2(\omega^2 - 2)n^2 + \omega^4 = 0,$$

$$A_i = N_i(n_i + 2), \quad N_i = n_i^2 - 2n_i + \omega^2, \quad (i=1,\ 4).$$

В случае $\omega=1$ характеристическое уравнение имеет кратные корни

$n_1=n_3=1$, $n_2=n_4=-1$. Не останавливаясь отдельно на этом случае, заметим, что конечные результаты при $\omega=1$ и $\omega>1$ совпадают. В дальнейшем считаем n_i различными.

Подставляя в граничные условия (3.7), (3.8) равенства (4.1), получим алгебраическую систему линейных уравнений четвертого порядка относительно функций времени $C_i(x)$:

$$\sum_{i=1}^{4} N_iC_i = f_1, \quad f_1 = -4\omega R_2^{-1}\varkappa\left(1-\frac{P}{2K}\right)\xi_1; \tag{4.3}$$
$$\sum_{i=1}^{4} N_iC_i\varkappa^{n_i} = f_2, \quad f_2 = -4\omega R_2^{-1}\xi_2;$$
$$\sum_{i=1}^{4} A_iC_i = f_3, \quad f_3 = -4\omega R_2^{-1}\left[\varkappa\xi_1-\xi_2+\right.$$
$$\left.+\frac{R_2^{-2}}{2K}(\xi_2-\varkappa^2\xi_1)\right]; \qquad \sum_{i=1}^{4} A_iC_i\varkappa^{n_i}=0.$$

Здесь $f_m(x)$, $m=1, 3$— функции из (3.7) — (3.9), которые представлены через R_2 и $\varkappa$ в случае $V_{10}<1$.

Принимая во внимание имеющие место в силу (1.13) соотношения

$$\frac{d\xi_j}{dx}=\frac{d\eta_j}{dR_2}R_2^{-1}; \quad R_2=(\varkappa_0^2+2x)^{1/2};$$
$$\eta_j(R_2)=\xi_j(x),$$

получим из (3.10), (3.11) систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\eta_1}{dR_2}+R_2^{-1}\varkappa^2\eta_1=\omega\varkappa\sum_{i=1}^{4}C_i; \tag{4.4}$$
$$\frac{d\eta_2}{dR_2}+R_2^{-1}\eta_2=\omega\sum_{i=1}^{4}C_i\varkappa^{n_i}$$

с начальными условиями

$$\eta_i(\varkappa_0)=\eta_j^0 \quad \text{при } R_2=\varkappa_0.$$

Так как $R_2=R_1+\delta$, где δ — текущая толщина кольца, то $\varkappa=1+\varepsilon$, $\varepsilon=\delta/R_1$ и при расширении кольца $\varepsilon\to 0$. Метод построения решения для обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр ε, достаточно изучен (см., например, [4]). Отметим, что параметр ε входит в (4.4) регулярным образом.

Первые члены асимптотических рядов

$$\eta_j=\sum_{q=0}^{\infty}\eta_{jq}(R_2)\,\varepsilon^q; \qquad f_m=\sum_{q=0}^{\infty}f_{mq}(R_2)\,\varepsilon^q$$

определяются из условия $\varepsilon=0$ ($\varkappa=1$). Причем из (4.3), (4.4) следует

$\eta_{10}=\eta_{20}=\eta_0$. Последнее означает, что когда кольцо в процессе основного движения превращается в окружность с нулевой толщиной стенки, то амплитуда возмущения границ становится единственной. Тогда из (4.3) имеем $f_{10}=f_{20}$, $f_{30}=0$ и для построения асимптотики решения случаи $V_{10}<1$, $V_{10}=1$ совпадают при $\varepsilon=0$. Отсюда ранг системы (4.3) равен двум. Вследствие (4.2), принимая во внимание соотношения

$$N_1N_2=N_3N_4=N_1N_4=N_2N_3=0;\quad N_1N_3=4\omega^2(2-n_1-n_3);$$
$$N_2N_4=4\omega^2(2-n_1-n_4);$$
$$A_1=A_3;\ A_2=A_4,$$

получим $\sum\limits_{i=1}^{4} C_i=0$.

Тогда из (4.4) следует

$$\eta_0(R_2)=CR_2^{-1},\qquad C=\text{const},$$

тем самым $\eta_0(R_2)\to 0$ при $R_2\to\infty$. Аналогично можно показать, что $\eta_{j1}(R_2)\to 0$ при $R_2\to\infty$ для любого $\omega>0$.

Вопрос о том, можно ли и далее считать $\eta_{jq}(R_2)\to 0$ при любом $q\geqslant 2$, остается открытым. Высшее приближение более целесообразно рассчитывать численно.

Асимптотика амплитуды гармонического возмущения границ кольца с точностью до второго порядка малости относительно ε, согласно вышесказанному, убывает до нуля ($\eta_j(R_2)\to 0$), когда $R_2\to\infty$. Как следует из (2.3), (4.1), возмущение вектора скорости и давления стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, рассмотренное основное неустановившееся течение пластического кольца устойчиво по отношению к малым гармоническим возмущениям вектора скорости, давления и границ для любого волнового числа, когда начальные параметры задачи удовлетворяют условиям (1.15) и (4.10).

Известно [3], что в случае тонкого кольца идеальной несжимаемой жидкости, расширяющегося по инерции, гармонические возмущения границ кольца неограниченно растут. Наблюдается также неустойчивость течения идеальной жидкости в кольце под действием переменного внутреннего давления [5]. Причем неустойчивость наблюдается при любом $\omega>0$.

Если ввести в рассмотрение силы внутреннего сопротивления среды, например пластические, при наличии верхней оценки для начального поля скоростей основного течения, то тогда в предположении малости инерционных сил в возмущенном движении по сравнению с прочностными и пластическими свойствами среды исследуемое выше основное течение устойчиво по отношению к малым гармоническим возмущениям вектора скорости, давления и границ кольца для любого волнового числа.

Поступила 12 VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильюшин А. А.** Деформация вязкопластического тела.— «Учен. зап. МГУ. Механика», 1940, вып. 39.
2. **Ишлинский А. Ю.** Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута.— ПММ, 1943, т. VII, № 4.
3. **Кузнецов В. М., Шер Е. Н.** Об устойчивости течения идеальной несжимаемой жидкости в полосе и кольце.—ПМТФ, 1964, № 2.
4. **Вазов В. А.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
5. **Кошелев Э. А.** Об устойчивости течения кольца несжимаемой жидкости под действием переменного внутреннего давления.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. XIII, Новосибирск, «Наука», 1973.